Novena edición

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

40 ANIVERSARIO

Con AMPL®, Solver, Excel, e implementaciones TORA

HAMDY A. TAHA

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Investigación de operaciones

Investigación de operaciones

Novena edición

Hamdy A. Taha

University of Arkansas, Fayetteville

TRADUCCIÓN

Rodolfo Navarro Salas

Ingeniero Mecánico

Universidad Nacional Autónoma de México

REVISIÓN TÉCNICA

MÉXICO

Alicia Nandeli Mercado Zepeda

Humberto Oviedo Galdeano

Francisco García Mora

Academia de Investigación de Operaciones

Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería

y Ciencias Sociales y Administrativas (UPIICSA)

Instituto Politécnico Nacional

Mario Álvarez García

Departamento de Ingeniería Industrial

Instituto Tecnológico Superior del Occidente del Estado de Hidalgo

Ulises Mercado Valenzuela

Unidad de Estudios de Posgrado e Investigación

Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco

ARGENTINA

Osvaldo Facundo Martínez

Departamento de Ingeniería Industrial

Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Córdoba

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

TAHA, HAMDY A.

Investigación de operaciones
Novena edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012

ISBN: 978-607-32-0796-6

Área: Matemáticas

Formato: 18.5 × 23.5 cm   Páginas: 824

Authorized translation from the English language edition, entitled *Operations Research: An Introduction, 9th* Edition, by *Hamdy A. Taha,* published by Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall,

ISBN 9780132555937

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés, titulada *Operations Research: An Introduction, 9a.* edición, por *Hamdy A. Taha,* publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Prentice Hall,

Edición en español

Editora:	Gabriela López Ballesteros e-mail: gabriela.lopezballesteros@pearson.com
Editor de desarrollo:	Bernardino Gutiérrez Hernández
Supervisor de producción:	Rodrigo Romero Villalobos

NOVENA EDICIÓN, 2012

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-32-0796-6
ISBN VERSIÓN E-BOOK: 978-607-32-0797-3
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-0798-0

PRIMERA IMPRESIÓN
Impreso en México/*Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 14 13 12 11

A Karen

Los ríos no llevan agua,
el sol las fuentes secó…
¡Yo sé donde hay una fuente
que no ha de secar el sol!
La fuente que no se agota
es mi propio corazón…

—V. Ruiz Aguilera (1862)

Contenido

Material disponible en el sitio web de este libro (en inglés)

(www.pearsoneducacion.net/taha)

Categorización por herramienta de los archivos en el sitio web*

AMPL:

Modelo de asignación, *AppenCFiles*
Programación de citas, *ch26Files*
Programación de metas (interactiva), *AppenCFiles*
Modelos de programación entera
Algoritmo de ramificación y acotamiento (interactivo), *AppenCFiles*
Secuenciación de trabajos, *AppenCFiles*
Planificación de personal de ventas por teléfono en Qantas, *ch26Files*
Hospital Monte Sinaí, *ch26Files*
Optimización de PGF Glass, *ch26Files*
Cobertura de conjuntos, *AppenCFiles*
Organización de rutas marítimas, *ch26Files*
Modelos de programación lineal
Programación de autobuses, *ch2Files*
Almacenamiento de combustible, *ch26Files*
Producción de válvulas cardiacas, *ch26Files*
Modelo de Reddy Mikks, *AppenCFiles*
Renovación urbana, *AppenCFiles*
Modelos de programación no lineal
EOQ con limitación, *AppenCFiles*
PNL, *AppenCFiles*
Modelos de red
CPM, *AppenCFiles*
Flujo máximo, *AppenCFiles*
Red capacitada de costo mínimo, *AppenCFiles*
Ruta más corta, *AppenCFiles*
Modelo de transporte, *AppenCFiles*
Problema del agente viajero (TSP)
Ramificación y acotamiento (interactivo), *AppenCFiles*
Plano de corte, *AppenCFiles*

Excel:

Proceso de jerarquía analítica (PJA), *ch15Files*
Probabilidades de Bayes, *ch15Files*
Decisiones bajo incertidumbre, *ch15Files*

*Todo el material incluido en el sitio web se encuentra en idioma inglés.

Métodos de búsqueda
- Dicótomo, *ch21Files*
- Sección dorada, *ch21Files*
- Newton-Raphson, *ch20Files*

Heurística
- Vecino más cercano en el problema del agente viajero (TSP), *ch11/Files*
- Caminata aleatoria, *ch11Files*
- Inversiones en el problema del agente viajero (TSP), *ch11/Files*

Elaboración de histogramas, *ch23Files*

Inventario
- Revisión continua, *ch16Files*
- Cantidad de pedido económica (EOQ), *ch11Files*
- PD general, *ch11/Files*
- PD de Wagner-Whitin, *ch11/Files*
- Heurística de Silver-Meal, *ch11/Files*

Problema de la mochila, PD, *ch10Files*

Manipulación de matrices, *AppenDFiles*

Cadenas de Markov
- Probabilidades absolutas, *ch17Files*
- Probabilidades de absorción, *ch17Files*
- Tiempo de primer paso, *ch117Files*
- Matriz de transición en *n* pasos, *ch17Files*
- Probabilidades de estado estable, *ch17Files*

Metaheurística
- PLE, tabú, *ch11/Files*
- PLE, genética, *ch11Files*

PLE de recocido simulado, *ch11Files*

Técnica del promedio móvil, *ch23Files*

Colas
- Poisson, *ch18Files*
- Fórmula de P-K, *ch18Files*

Regresión, *ch23Files*

Simulación
- Montecarlo (área de un círculo), *ch19Files*
- Cola de un solo servidor, *ch9Files*
- Cola de varios servidores, *ch19Files*
- Generador de números aleatorios, *ch19Files*
- Método regenerativo (ciclos), *ch19Files*

Tablas estadísticas, "electrónicas", *ch14Files*

TSP (Agente viajero)
- Metaheurística. *Vea* Metaheurística
- Heurística. *Vea* Heurística

Solver:

Modelo de inventario de cantidad de pedido económica (EOQ) con limitación, *ch11/Files*

Programación entera de ramificación y acotamiento, *ch9Files*

Modelos de programación lineal
- TOYCO, *ch3Files*, *ch3Files*
- Reddy Mikks, *ch3Files*
- Análisis de sensibilidad, *ch3Files*
- Renovación urbana, *ch2Files*

Modelos de red
- Flujo máximo, *ch6Files*
- Red capacitada de costo mínimo, *ch22Files*
- Ruta más corta, *ch6Files*

Programación cuadrática, *ch21Files*
Programación estocástica, *ch21Files*

Tora:

Reemplazo de equipo, *ch5Files*
Modelos de programación entera
- Ramificación y acotamiento, *ch9Files*
- Presupuesto de capital, *ch9Files*
- Cobertura de conjuntos, *ch9Files*
- Cargo fijo, *ch9Files*
- Uno - u - otro, Si - entonces, *ch9Files*
- Cortes en TSP, *ch9Files*

Modelos de programación lineal
- Variables acotadas, *ch7Files*
- Dieta, *ch2Files*
- Diet, *ch2Files*
- método M, *ch3Files*
- Reddy Mikks, *ch2Files*
- Análisis de sensibilidad, *ch3Files*
- TOYCO, *ch3Files*
- Modelos de red

CPM (Método de la ruta crítica), *ch6Files*
- Flujo máximo, *ch6Files*
- PERT (Técnica de evaluación y revisión de programas), *ch6Files*
- Ruta más corta, *ch6Files*
- Modelos de colas (Poisson), *ch18Files*
- Modelo de transporte, *ch5Files*

Juegos de suma cero, *ch15Files*

Lo nuevo en esta edición

Esta novena edición contiene, de manera más concisa que las anteriores, tanto el texto como el software de apoyo, con el fin de que el lector se enfoque de lleno en la puesta en ejecución algorítmica y práctica de las técnicas de investigación de operaciones.

- La nueva sección 3.7 constituye un amplio encuadre (sin necesidad de utilizar matemáticas) de cómo los diferentes algoritmos de PL, programación lineal (simplex, simplex dual, simplex revisado y de punto interior) se ponen en ejecución en códigos comerciales (por ejemplo CPLEX y XPRESS) para incrementar la velocidad de cómputo y precisión necesarias para resolver problemas muy grandes.
- El nuevo capítulo 10 se ocupa de la heurística y la metaheurística diseñadas para obtener buenas soluciones aproximadas a problemas de programación entera y combinatoria. La necesidad de la heurística y la metaheurística es un reconocimiento del hecho de que el desempeño de los algoritmos exactos ha sido menos satisfactorio desde el punto de vista computacional.
- El nuevo capítulo 11 está dedicado al importante problema del agente viajero. Incluye varias aplicaciones y el desarrollo de algoritmos de solución heurísticos y exactos.
- Todos los algoritmos de los nuevos capítulos 10 y 11 se codificaron en Excel para permitir una conveniente experimentación interactiva con los modelos.
- Todos los modelos AMPL se movieron al apéndice C* para complementar las reglas sintácticas de AMPL presentadas en el apéndice. Los modelos aparecen oportunamente en el libro con sus respectivas referencias.
- A lo largo del libro se agregaron numerosos problemas nuevos.
- Se actualizó el software TORA.
- Con el fin de mantener una cantidad razonable de páginas impresas, hemos pasado al sitio web* parte del material, entre el que se incluye el apéndice AMPL.

* Todo el material incluido en el sitio web se encuentra en idioma inglés.

Agradecimientos

Pearson agradece a los profesores usuarios de esta obra y a los centros de estudio su apoyo y retroalimentación, elemento fundamental para esta nueva edición de *Investigación de operaciones*.

ARGENTINA

Marisa Raquel De Giusti
María Teresa Guardarucci
Universidad Nacional de La Plata

MÉXICO
CIUDAD DE MÉXICO

Guillermo Márquez Arreguín
Escuela Superior de Computación (ESCOM)
Instituto Politécnico Nacional

Jorge Herrera Ayala
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME)
Instituto Politécnico Nacional

Alejandra Alcántara Pacheco
Araceli Guerrero Huerta
Domingo González Zúñiga
Erasto Víctor Vergara Nava
Fidel Cisneros Molina
José Luis Arvizuo Rivera
Luis Chávez García
Manuel Roberto Montes de Ortiz
María Mayra Vázquez Jiménez
Pedro Azuara Rodríguez
Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas (UPIICSA)
Instituto Politécnico Nacional

Claudia Gómez Wulschner
Edgar Possani Espinosa
Miguel de Lascuráin Morhan
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Luis Moncayo
Instituto Tecnológico Autónomo de México
Campus Ciudad de México

Eric Porras Musalem
Lino A. Notarantonio
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Santa Fe

Raúl Chávez
Universidad Anáhuac del Sur

Adolfo Miguel Castro Gómez
Gema Esther González Flores
José Luis Ruz D.
Facultad de Contaduría y Administración
Universidad Nacional Autónoma de México

Armando Popoca Flores
Daniel Hadad Cartas
Manuel Fuentes Ruiz
Miguel Ángel Aguirre Pitol
Facultad de Economía
Universidad Nacional Autónoma de México

Bonifacio Román Tapia
Eduardo Alejandro Hernández González
Efraín Ramos Trejo
Leonardo Bañuelos Saucedo
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

Cuauhtémoc Tenopala Granados
Universidad La Salle

ESTADO DE MÉXICO

Ángel Díaz Pineda
Arizbel Bailón Salgado
Jeanette López Alanís
Francisco Quiroz Aguilar
María de la Luz Dávila Flores
Mario Luis Chew Hernández
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Coacalco

Martha Eugenia Limón Hernández
Rodolfo Flores Pineda
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Cuautitlán Izcalli

Ciria Salinas López
Jorge Coria
Martha Chapa Plata
Víctor Jiménez Guido
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec

Francisco Franco Urzúa
Jesús Avendaño Martínez
Instituto Tecnológico de Tlalnepantla

Martha Beatriz Martínez Ponce
Instituto Tecnológico de Toluca

Eduardo Díaz
Luis E. Herrera
Manuel Álvarez Madrigal
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Estado de México

Karla Valenzuela
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Toluca

Fernando López Solís
Gastón Vértiz Camarón
Mónica Marina Mondragón Ixtlah
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma del Estado de México
Campus Toluca

Raúl Arreguín Bustamante
Universidad del Valle de México
Campus Toluca

Jorge Luis Suárez Madariaga
Florentino Almida Martínez
Facultad de Estudios Superiores Acatlán
Universidad Nacional Autónoma de México

Andrés Gutiérrez Bárcenas
José Isaac Sánchez Guerra
Marco Antonio Hernández
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán
Universidad Nacional Autónoma de México

GUANAJUATO

José Luis Laguna
Escuela Profesional de Comercio y Administración

Antonio Murillo Montoya
Francisco Rodríguez S.
Hugo Carrillo Rodríguez
José Alfredo Jiménez García
José Francisco Rodríguez Silva
José Luis Martínez Pichardo
Juan Antonio Sillero Pérez
Instituto Tecnológico de Celaya

José Enrique González Martínez
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus León

Ricardo Zúñiga Almanza
Universidad de Celaya

Mario Cruz Alcaraz
Universidad de León

Fernando Gómez Guerra
Jorge Velázquez Centeno
Universidad Iberoamericana, León

PUEBLA

Juan Carlos Ruiz Arenas
Universidad de Las Américas

Carlos Gerardo Díaz Marín
Guillermo Francisco López Torres
María del Pilar León Franco
Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla

SAN LUIS POTOSÍ

Julio César González Martínez
Universidad del Valle de México
Campus San Luis Potosí

SINALOA

Raúl Soto
Universidad de Occidente
Unidad Culiacán

Reconocimientos

Quiero reconocer la importancia de las revisiones realizadas a la novena edición por los profesores Yahya Fathi (NCSU), Marc E. Posner (Ohio State University), Charu Chandra (University of Michigan, Dearbon), Yasser Hosni (University of Central Florida), M. Jeya Chandra (Penn State University) y Manbir Sodhi (Rhode Island University).

Como siempre, sigo en deuda con mis amigos y colegas por su continuo apoyo durante tantos años: John Ballard (University of Nebraska, Lincoln), David Elizandro (Tennessee Tech University), Rafael Gutiérrez (University of Texas, El Paso), José Pablo Nuño de la Parra (Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla), y Jung-Fu Tsai (National Taipei University of Technology).

Deseo expresar mi aprecio al personal de editorial y de producción de Pearson por su ayuda durante la producción de esta edición.

Hamdy A. Taha
hat@uark.edu

Acerca del autor

Hamdy A. Taha es profesor emérito de ingeniería industrial en la University of Arkansas, donde enseña, investiga y simula operaciones. Es autor de otros tres libros sobre programación y simulación, los cuales se han traducido a varios idiomas. También es autor de varios capítulos de libros, y sus artículos técnicos han aparecido en revistas como *European Journal of Operations Research*, *IEEE Transactions on Reliability*, *IIE Transactions*, *Interfaces*, *Management Science*, *Naval Research Logistics Quarterly*, *Operations Research* y *Simulation.*
El profesor Taha recibió el premio Alumni por excelencia en investigación y el premio Nadine Baum por excelencia en la enseñanza, ambos por parte de la University of Arkansas, así como otros premios por investigación y enseñanza del Colegio de Ingeniería de esta misma universidad. También recibió el nombramiento de becario Fulbright Senior de la Universidad Carlos III de Madrid, España. Domina tres idiomas y se ha desempeñado como profesor y consultor en Europa, México y Medio Oriente.

Marcas registradas

AMPL es una marca registrada de AMPL Optimization, LLC, 900 Sierra Place SE, Albuquerque, NM 87108-3379, EUA.
CPLEX es una marca registrada de ILOG, Inc., IBM Corporation, 1 New Orchard Road, Armonk, Nueva York, 10504 10504-1722.
KNITRO es una marca registrada de Ziena Optimization Inc., 1801 Maple Ave. Suite 6320, Evanston IL, 60201.
LOQO es una marca registrada de Princeton University, Princeton University, Princeton, NJ, 08544.
Microsoft es una marca registrada y Windows y Excel son marcas registradas de Microsoft Corporation, One Microsoft Way Redmond, WA, 98052-7329.
MINOS es una marca registrada de Stanford University, 450 Serra Mall, Stanford, CA 94305.
Solver es una marca registrada de Frontline Systems, Inc., P.O. Box 4288, Incline Village, NV 89450.
TORA es una marca registrada de Hamdy A. Taha.

CAPÍTULO 1

Qué es la investigación de operaciones

1.1 INTRODUCCIÓN

Las primeras actividades formales de investigación de operaciones (IO) se iniciaron en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial, cuando un equipo de científicos empezó a tomar decisiones con respecto a la mejor utilización del material bélico. Al término de la guerra, las ideas formuladas en operaciones militares se adaptaron para mejorar la eficiencia y productividad en el sector civil.

Este capítulo presenta la terminología básica de la IO, que comprende el modelado matemático, soluciones factibles, optimización y cálculos iterativos. Hace hincapié en que la definición correcta del problema es la fase más importante (y más difícil) de practicar la IO. También se recalca que si bien el modelado matemático es la piedra angular de la IO, en la decisión final se deben tomar en cuenta factores incuantificables, como el comportamiento humano, por ejemplo. El libro presenta varias aplicaciones que utilizan ejemplos resueltos y problemas específicos.*

1.2 MODELOS DE INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Imagine que tiene un compromiso de negocios que requiere 5 semanas de traslado continuo entre Fayetteville (FYV) y Denver (DEN). Sale de Fayetteville los lunes y regresa los miércoles. Un boleto regular de viaje redondo cuesta $400, pero se ofrece 20% de descuento si el viaje redondo comprende un fin de semana. Un boleto sencillo en cualquier dirección cuesta 75% del precio regular. ¿Cómo debe comprar los boletos para reducir el costo del traslado durante las 5 semanas?

*En el sitio web de este libro encontrará el capítulo 26 (en inglés), el cual está dedicado por completo a la presentación del análisis de casos totalmente desarrollados.

Podemos considerar la situación como un problema de toma de decisiones, cuya solución requiere responder tres preguntas:

1. ¿Cuáles son las **alternativas** de decisión?
2. ¿Conforme a qué restricciones se toma la decisión?
3. ¿Cuál es el **criterio objetivo** apropiado para evaluar las alternativas?

Se consideran tres **alternativas** razonables:

1. Comprar cinco boletos normales FYV-DEN-FYV para salir el lunes y regresar el miércoles de la misma semana.
2. Comprar un boleto FYV-DEN, cuatro DEN-FYV-DEN que abarquen fines de semana, y uno DEN-FYV.
3. Comprar un boleto FYV-DEN-FYV para el lunes de la primera semana y el miércoles de la última semana, y cuatro DEN-FYV-DEN para los viajes restantes. Todos los boletos en esta alternativa cubren por lo menos un fin de semana.

La **restricción** en estas opciones es que pueda salir de FYV el lunes y regresar el miércoles de la misma semana.

Un **criterio objetivo** obvio para evaluar la alternativa propuesta es el precio de los boletos. La alternativa que dé el costo mínimo será la mejor. Específicamente, tenemos:

$$\text{Costo de la alternativa } 1 = 5 \times 400 = \$2000$$

$$\text{Costo de la alternativa } 2 = .75 \times 400 + 4 \times (.8 \times 400) + .75 \times 400 = \$1880$$

$$\text{Costo de la alternativa } 3 = 5 \times (.8 \times 400) = \mathbf{\$1600}$$

La alternativa 3 es la mejor porque es la más económica.

Aunque el ejemplo anterior ilustra los tres componentes principales de un modelo de IO, los cuales son: **alternativas, criterio objetivo** y **restricciones**, las situaciones difieren por los detalles de la construcción de cada componente y la solución del modelo resultante. Para ilustrar este punto, considere la formación de un rectángulo de área máxima con un trozo de alambre de L pulgadas de longitud. ¿Cuál será el mejor ancho y altura del rectángulo?

En contraste con el ejemplo de los boletos, el número de alternativas en este ejemplo no es finito; es decir, el ancho y la altura del rectángulo pueden asumir una cantidad infinita de valores porque son variables continuas. Para formalizar esta observación, las alternativas del problema se identifican definiendo el ancho y la altura como variables algebraicas

$$w = \text{ancho del rectángulo en pulgadas,}$$
$$h = \text{altura del rectángulo en pulgadas.}$$

Con base en estas definiciones, las restricciones de la situación pueden expresarse verbalmente como

1. Ancho del rectángulo + altura del rectángulo = la mitad de la longitud del alambre.
2. El ancho y la altura no pueden ser negativos.

Estas restricciones se traducen de manera algebraica como sigue

1. $2(w + h) = L$
2. $w \geq 0, h \geq 0$

Ahora el único componente restante es el objetivo del problema; es decir, maximizar el área del rectángulo. Si z se define como el área del rectángulo, el modelo completo es

$$\text{Maximizar } z = wh$$

sujeto a

$$2(w + h) = \text{L}$$

$$w, h \geq 0$$

Utilizando cálculo diferencial, la mejor solución de este modelo es $w = h = \frac{L}{4}$, la cual requiere la construcción de una forma cuadrada.

Con los datos de los dos ejemplos anteriores, el modelo general de IO se organiza en el siguiente formato general:

> Maximizar o minimizar **Función objetivo**
>
> sujeto a
>
> **Restricciones**

Una solución del modelo es **factible** si satisface todas las restricciones; es **óptima** si, además de ser factible, produce el mejor valor (máximo o mínimo) de la función objetivo. En el ejemplo de los boletos, el problema considera tres alternativas factibles, y la tercera es la que produce la solución óptima. En el problema del rectángulo, una alternativa factible debe satisfacer la condición $w + h = \frac{L}{2}$, donde w y h son variables no negativas. Esta definición conduce a una infinidad de soluciones factibles y, a diferencia del problema de los boletos, el cual utiliza una sencilla comparación de precios, la solución óptima se determina aplicando cálculo diferencial.

Aunque los modelos de IO están diseñados para "optimizar" un criterio objetivo específico sujeto a un conjunto de restricciones, la calidad de la solución resultante depende de la exactitud con que el modelo representa el sistema real. Considere, por ejemplo, el modelo de los boletos. Si no se identifican *todas* las alternativas dominantes para comprar los boletos, entonces la solución resultante es óptima sólo en relación con las opciones representadas en el modelo. Específicamente, si se omite la alternativa 3 en el modelo, entonces la solución "optima" requeriría que se compraran los boletos en \$1880, la cual es una solución **subóptima**. La conclusión es que "la" solución óptima de un modelo es mejor sólo para ese modelo. Si el modelo es una representación razonablemente buena del sistema real, entonces su solución también es óptima para la situación real.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 1.2A[1]

1. En el ejemplo de los boletos, identifique una cuarta alternativa factible.

2. En el problema del rectángulo, identifique dos soluciones factibles, e indique cuál es la mejor.

3. Determine la solución óptima del problema del rectángulo (*Sugerencia:* Aplique la restricción para expresar la función objetivo respecto de una variable, luego utilice cálculo diferencial).

4. Amy, Jim, John y Kelly están en la ribera de un río y desean cruzar a la ribera opuesta en una canoa, la cual sólo puede llevar dos personas a la vez. Como Amy es la más atlética, puede cruzar el río remando en 1 minuto. Jim, John y Kelly lo harían en 2, 5 y 10 minutos, respectivamente. Si dos personas están en la canoa, la persona más lenta determina el tiempo de cruce. El objetivo es que las cuatro personas estén en la ribera opuesta en el menor tiempo posible.

(a) Identifique por los menos dos planes factibles para cruzar el río (recuerde que la canoa es el único medio de transporte y que no puede viajar vacía).

(b) Defina el criterio para evaluar las alternativas.

*__(c)__ ¿Cuál es el menor tiempo para llevar a las cuatro personas al otro lado del río?

***5.** En un juego de béisbol, Jim es el lanzador y Joe es el bateador. Suponga que Jim puede lanzar una bola rápida o una curva al azar. Si Joe predice correctamente una curva, puede mantener un promedio de bateo de .500; de otra manera, si Jim lanza una curva y Joe está preparado para una bola rápida, su promedio de bateo se mantiene por debajo de .200. Por otra parte, si Joe predice correctamente una bola rápida, mantiene un promedio de bateo de .300, de lo contrario su promedio es de sólo .100.

(a) Defina las alternativas para este caso.

(b) Determine la función objetivo para el problema, y describa en qué difiere de la optimización común (maximización o minimización) de un criterio.

6. Durante la construcción de una casa, se deben recortar seis viguetas de 24 pies cada una a la longitud correcta de 23 pies. La operación de recortar una vigueta implica la siguiente secuencia:

Operación	Tiempo (segundos)
1. Colocar la vigueta en caballetes de aserrar	15
2. Medir la longitud correcta (23 pies)	5
3. Marcar la línea de corte para la sierra circular	5
4. Recortar la vigueta a la longitud correcta	20
5. Apilar las viguetas recortadas en un área designada	20

Intervienen tres personas: Dos deben realizar al mismo tiempo las operaciones 1, 2 y 5, y un cortador se ocupa de las operaciones 3 y 4. Hay dos pares de caballetes de aserrar donde se colocan las viguetas sin recortar, y cada par puede manejar tres viguetas. Sugiera un buen plan para recortar las seis viguetas.

7. Se construye una pirámide (bidimensional) en cuatro capas. La capa inferior se compone de los puntos (equidistantes) 1, 2, 3 y 4; la siguiente incluye los puntos 5, 6 y 7; la tercera comprende los puntos 8 y 9, y la superior el punto 10. Lo que se quiere es invertir la

[1] Un asterisco antes del número señala problemas cuya solución aparece en el Apéndice B.

pirámide (que la capa inferior incluya un punto y la superior cuatro) cambiando de lugar los puntos.

(a) Identifique dos soluciones factibles.

(b) Determine el número mínimo de movimientos necesarios para invertir la pirámide.[2]

8. Cuenta con cuatro cadenas y cada una consta de tres eslabones sólidos. Tiene que hacer un brazalete conectando las cuatro cadenas; romper un eslabón cuesta 2 centavos, y volverlo a soldar 3 centavos.

(a) Identifique dos soluciones factibles y evalúelas.

(b) Determine el costo mínimo para hacer el brazalete.

9. Los cuadros de una tabla rectangular de 11 filas y 9 columnas están numerados en secuencia del 1 al 99 con una recompensa monetaria *oculta* de entre 0 y 20 dólares, asignada a cada cuadro. El juego consiste en que un jugador elige un cuadrado seleccionando cualquier número de dos dígitos y luego restando al número seleccionado la suma de sus dos dígitos. El jugador recibe entonces la recompensa asignada al cuadro seleccionado. Sin importar cuántas veces se repita el juego, ¿qué valores monetarios deben asignarse a los 99 cuadros para minimizar la recompensa de los jugadores? Para hacer el juego interesante, asignar $0 a *todos* los cuadros no es una opción.

1.3 SOLUCIÓN DEL MODELO DE IO

En la investigación de operaciones no se cuenta con una técnica general única para resolver todos los modelos que puedan surgir en la práctica. En su lugar, el tipo y complejidad del modelo matemático determina la naturaleza del método de solución. Por ejemplo, en la sección 1.2 la solución del problema de los boletos requiere una clasificación simple de las alternativas, basada en el precio de la compra total, mientras que la solución del problema del rectángulo utiliza cálculo diferencial para determinar el área máxima.

La técnica de IO más importante es la **programación lineal**. Está diseñada para modelos con funciones objetivo y restricciones lineales. Otras técnicas incluyen la **programación entera** (en la cual las variables asumen valores enteros), la **programación dinámica** (en la cual el modelo original puede descomponerse en subproblemas más pequeños y manejables), la **programación de red** (en la cual el problema puede modelarse como una red), y la **programación no lineal** (en la cual las funciones del modelo son no lineales). Éstas son sólo algunas de las muchas herramientas de IO con que se cuenta.

Una peculiaridad de la mayoría de las técnicas de IO es que por lo general las soluciones no se obtienen en formas cerradas (como si fueran fórmulas), sino que más bien se determinan mediante **algoritmos**. Un algoritmo proporciona reglas fijas de cálculo que se aplican en forma repetitiva al problema, y cada repetición (llamada **iteración**) acerca la solución a lo óptimo. Como los cálculos asociados con cada iteración suelen ser tediosos y voluminosos, es recomendable que estos algoritmos se ejecuten con la computadora.

Algunos modelos matemáticos pueden ser tan complejos que es imposible resolverlos con cualquiera de los algoritmos de optimización disponibles. En esos casos quizá sea necesario abandonar la búsqueda de la solución *óptima* y simplemente buscar una *buena* solución aplicando la **heurística**, y la **metaheurística**, o bien *reglas empíricas*.

[2] Los problemas 7 y 8 se tomaron y compendiaron de Bruce Goldstein, *Cognitive Psychology*: *Mind, Research, and Everyday Experience,* Wadsworth Publishing, 2005.

1.4 MODELOS DE COLAS Y SIMULACIÓN

Las colas y la simulación estudian las líneas de espera. No son técnicas de optimización; más bien determinan medidas de desempeño de las líneas de espera, como tiempo de espera promedio en la cola, tiempo de espera promedio para el servicio, y el uso de las instalaciones de servicio.

Los modelos de colas utilizan modelos probabilísticos y estocásticos para analizar líneas de espera, y la simulación estima las medidas de desempeño al imitar el comportamiento del sistema real. De cierto modo, la simulación tiene ventajas para observar un sistema real, ya que la diferencia principal entre las colas y la simulación es que los modelos de colas son puramente matemáticos y, en consecuencia, están sujetos a hipótesis específicas que limitan el alcance de su aplicación. La simulación, por otra parte, es flexible y puede utilizarse para analizar prácticamente cualquier situación de colas.

El uso de la simulación no está exento de inconvenientes. El proceso de desarrollar modelos de simulación es costoso, tanto en tiempo como en recursos; además la ejecución de los modelos de simulación suele ser lenta, aun con la computadora más rápida.

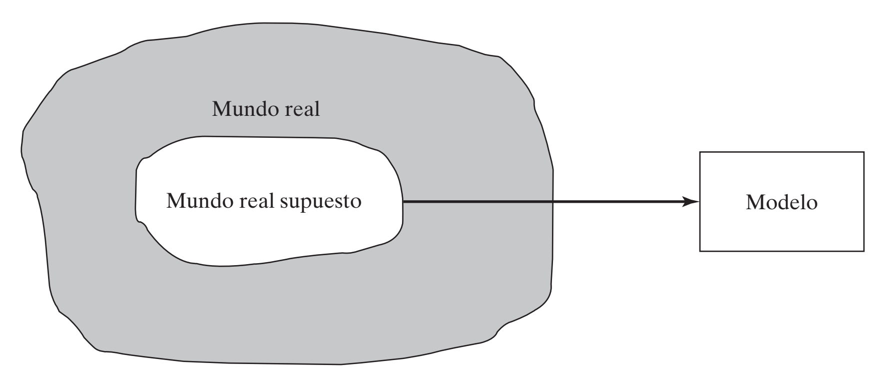
1.5 EL ARTE DEL MODELADO

Los modelos desarrollados en la sección 1.1 son representaciones exactas de situaciones reales. Esto es raro en la IO, ya que la mayoría de las aplicaciones suelen implicar diversos grados de aproximación. La figura 1.1 ilustra los niveles de abstracción que caracterizan el desarrollo de un modelo de IO. Abstraemos de la situación real el mundo real supuesto al concentrarnos en las variables dominantes que controlan el comportamiento del sistema real. El modelo expresa de una manera razonable las funciones matemáticas que representan el comportamiento del mundo real supuesto.

Para ilustrar los niveles de abstracción en el modelado, considere la Tyko Manufacturing Company, donde se producen varios recipientes de plástico. Cuando se emite una orden de producción al departamento de producción, las materias primas necesarias se toman de las existencias de la compañía o se adquieren con proveedores

FIGURA 1.1

Niveles de abstracción en el desarrollo de un modelo



externos. Una vez que se completa un lote de producción, el departamento de ventas se encarga de distribuir el producto a los clientes.

Una pregunta lógica al analizar la situación de Tyko es la determinación del tamaño de un lote de producción. ¿Cómo puede un modelo representar esta situación?

Al examinar todo el sistema se ve que algunas variables pueden incidir directamente en el nivel de producción, incluida la siguiente lista (parcial) clasificada por departamentos.

1. *Departamento de producción:* Capacidad de producción expresada en función de las horas de mano de obra y máquina disponibles, inventario en proceso y normas de control de calidad.
2. *Departamento de materiales:* Existencias disponibles de materias primas, programas de entrega de proveedores externos y limitaciones de almacenamiento.
3. *Departamento de ventas:* Pronóstico de ventas, capacidad de las instalaciones de distribución, eficacia de las campañas publicitarias y el efecto de la competencia.

Cada una de estas variables afecta el nivel de producción en Tyko. Sin embargo, es realmente difícil establecer relaciones funcionales explícitas entre ellas y el nivel de producción.

Un primer nivel de abstracción requiere definir los límites del mundo real supuesto. Reflexionando un poco, podemos aproximar el sistema real por medio de dos parámetros dominantes:

1. Tasa de producción.
2. Tasa de consumo.

La determinación de la tasa de producción implica variables como la capacidad de producción, las normas de control de calidad y la disponibilidad de las materias primas. Los datos de ventas determinan la tasa de consumo. En esencia, la simplificación a partir del mundo real al mundo real supuesto se logra "concentrando" varios parámetros del mundo real en un único parámetro del mundo real supuesto.

Ahora es más fácil abstraer un modelo desde el mundo real supuesto. Con las tasas de producción y consumo se pueden establecer medidas de exceso o escasez de inventario. Entonces el modelo abstraído puede construirse para equilibrar los costos conflictivos de exceso y escasez de inventario; es decir, para minimizar el costo total del inventario.

1.6 MÁS QUE SÓLO MATEMÁTICAS

Debido a la naturaleza matemática de los modelos de IO, tendemos a pensar que un estudio de investigación de operaciones *siempre* está enraizado en el análisis matemático. Aunque el modelado matemático es fundamental en la IO, primero se deben explorar métodos más sencillos. En algunos casos se puede obtener una solución de "sentido común" mediante observaciones sencillas. En realidad, como invariablemente el elemento humano afecta la mayoría de los problemas de decisión, un estudio de la psicología de las personas puede ser clave para resolver el problema. A continuación se presentan tres ejemplos que respaldan este argumento.

1. Al atender quejas sobre la lentitud de los elevadores en un gran edificio de oficinas, el equipo de IO percibió la situación en principio como un problema de línea de espera que podría requerir el uso del análisis matemático o la simulación de colas. Después de estudiar el comportamiento de las personas que se quejaron, el psicólogo del equipo sugirió que se instalaran espejos de cuerpo completo a la entrada de los elevadores. Como por milagro, las quejas desaparecieron, ya que las personas se mantenían ocupadas observándose a sí mismas y a las demás mientras esperaban el elevador.

2. En un estudio de los mostradores de documentación en un gran aeropuerto inglés, un equipo de consultores estadounidenses y canadienses utilizó la teoría de colas para investigar y analizar la situación. Una parte de la solución recomendaba utilizar letreros bien colocados que urgieran a los pasajeros cuya salida era en 20 minutos a que avanzaran al inicio de la cola y solicitaran el servicio de inmediato. La solución no tuvo éxito porque los pasajeros, en su mayoría británicos, estaban "condicionados a un comportamiento muy estricto en las colas" y, por consiguiente, se rehusaban a adelantarse a otros que esperaban en la cola.

3. En una fundidora de acero en India, primero se producen lingotes a partir del mineral de hierro, los cuales se utilizan después en la fabricación de varillas y vigas de acero. El gerente notó una gran demora entre la producción de los lingotes y su transferencia a la siguiente fase de fabricación (donde se elaboraban los productos finales). Idealmente, para reducir el costo de recalentamiento la fabricación debía comenzar en cuanto los lingotes salieran del horno. Al principio el problema se percibió como una situación de equilibrio de la línea de producción, el cual podría resolverse reduciendo la producción de lingotes o incrementando la capacidad del proceso de fabricación. El equipo de IO utilizó tablas sencillas para registrar la producción de los hornos durante los tres turnos del día. Se descubrió que aun cuando el tercer turno comenzaba a las 11:00 P.M., la mayoría de los lingotes se producían entre las 2:00 y las 7:00 A.M. Una investigación más a fondo reveló que los operadores del turno preferían descansar más al principio del turno y luego compensar durante la madrugada la producción perdida. El problema se resolvió "nivelando" la producción de los lingotes a lo largo del turno.

De estos ejemplos se pueden sacar tres conclusiones:

1. Antes de aventurarse en un complicado modelado matemático, el equipo de IO debe explorar la posibilidad de utilizar ideas "agresivas" para resolver la situación. La solución del problema de los elevadores con la instalación de espejos se basó en la psicología humana más que en el modelado matemático. También es más sencilla y menos costosa que cualquier recomendación que un modelo matemático pudiera haber producido. Quizás esta sea la razón de que los equipos de investigación de operaciones suelan recurrir a los conocimientos de personas "externas" que se desempeñan en campos no matemáticos (el psicológico en el caso del problema de los elevadores). Este punto fue aceptado y ejecutado por el primer equipo de IO en Inglaterra durante la Segunda Guerra Mundial.

2. Las soluciones se originan en las personas y no en la tecnología. Cualquier solución que no tome en cuenta el comportamiento humano probablemente falle. Aun cuando la solución matemática del problema del aeropuerto británico pudo haber sido

razonable, el hecho de que el equipo consultor no se percatara de las diferencias culturales entre los Estados Unidos e Inglaterra (los estadounidenses y los canadienses tienden a ser menos formales) dio por resultado una recomendación que no se podía poner en práctica.

3. Un estudio de IO no debe iniciar con el prejuicio de utilizar una herramienta matemática específica antes de que se justifique su uso. Por ejemplo, como la programación lineal es una técnica exitosa, existe la tendencia de utilizarla para modelar "cualquier" situación. Esa forma de proceder suele conducir a un modelo matemático del todo alejado de la situación real. Por lo tanto, es imperativo que se analicen primero los datos disponibles aplicando las técnicas más simples siempre que sea posible (por ejemplo, promedios, gráficas e histogramas), para determinar el origen del problema. Una vez que se define el problema, puede decidirse cuál será la herramienta más apropiada para la solución.[3] En el problema de la fundidora de acero, todo lo que se necesitaba para aclarar la situación de la producción de lingotes era la elaboración de tablas sencillas.

1.7 FASES DE UN ESTUDIO DE IO

Los estudios de investigación de operaciones se basan en la *labor de equipo*, donde los analistas de IO y el cliente trabajan codo con codo. Los conocimientos de modelado de los analistas de IO se deben complementar con la experiencia y cooperación del cliente para quien realizan el estudio.

Como herramienta de toma de decisiones, la IO es tanto una ciencia como un arte. Es una ciencia por las técnicas matemáticas que incorpora, y un arte porque el éxito de las fases que conducen a la solución del modelo matemático depende en gran medida de la creatividad y experiencia del equipo de IO. Willemain (1994) manifiesta que "una práctica [de IO] eficaz requiere más que competencia analítica. También requiere, entre otros atributos, juicio técnico (es decir, cuándo y cómo utilizar una técnica dada), así como habilidades de comunicación y supervivencia organizacional".

Es difícil prescribir cursos de acción específicos (semejantes a los que indica la teoría precisa de la mayoría de los modelos matemáticos) para estos factores intangibles. Sin embargo, podemos ofrecer lineamientos generales para la implementación de la IO en la práctica.

Para implementar la IO en la práctica, las fases principales son:

1. Definición del problema.
2. Construcción del modelo.
3. Solución del modelo.
4. Validación del modelo.
5. Implementación de la solución.

---

[3] Decidir sobre un modelo matemático específico antes de justificar su uso es como "poner la carreta adelante del caballo", y me recuerda la historia de un viajero aéreo frecuente, paranoico en cuanto a la posibilidad de una bomba terrorista a bordo del avión. Calculó la probabilidad de que semejante desgracia pudiera ocurrir, y aunque resultó muy pequeña no bastó para calmar su angustia. Desde entonces, siempre llevaba una bomba en su portafolio porque, según sus cálculos, ¡la probabilidad de que hubiera *dos* bombas a bordo era prácticamente cero!

La fase 3, que se ocupa de la *solución del modelo*, es la mejor definida y por lo general la más fácil de implementar en un estudio de IO, porque maneja principalmente modelos matemáticos precisos. La implementación de las fases restantes es más un arte que una teoría.

La **definición del problema** implica definir el alcance del problema investigado. Esta función debe ser realizada por todo el equipo de IO. El objetivo es identificar tres elementos principales del problema de decisión: (1) descripción de las alternativas de decisión; (2) determinación del objetivo del estudio, y (3) especificación de las limitaciones bajo las cuales funciona el sistema modelado.

La **construcción del modelo** implica un intento de transformar la definición del problema en relaciones matemáticas. Si el modelo resultante se ajusta a uno de los modelos matemáticos estándar, como la programación lineal, se suele obtener una solución utilizando los algoritmos disponibles. Por otra parte, si las relaciones matemáticas son demasiado complejas como para permitir la determinación de una solución analítica, el equipo de IO puede optar por simplificar el modelo y utilizar un método heurístico, o bien considerar la simulación, si es lo apropiado. En algunos casos, una simulación matemática puede combinarse con modelos heurísticos para resolver el problema de decisión, como lo demuestran los análisis de casos del capítulo 26, que se encuentra en el sitio web.

La **solución del modelo** es por mucho la más sencilla de todas las fases de IO porque implica el uso de algoritmos de optimización bien definidos. Un aspecto importante de la fase de solución del modelo es el *análisis de sensibilidad*. Tiene que ver con la obtención de información adicional sobre el comportamiento de la solución óptima cuando el modelo experimenta algunos cambios de parámetros. El análisis de sensibilidad es particularmente necesario cuando no se pueden estimar con precisión los parámetros del modelo. En estos casos es importante estudiar el comportamiento de la solución óptima en el entorno de los parámetros estimados.

La **validez del modelo** comprueba si el modelo propuesto hace en realidad lo que dice que hace, es decir, ¿predice adecuadamente el comportamiento del sistema que se estudia? Al principio, el equipo de IO debe estar convencido de que el resultado del modelo no contenga “sorpresas”. En otras palabras, ¿tiene sentido la solución? ¿Los resultados sin intuitivamente aceptables? Del lado formal, un método común de comprobar la validez de un modelo es comparar su resultado con resultados históricos. El modelo es válido si, en condiciones de datos de entrada iguales, reproduce de forma razonable el desempeño pasado. Sin embargo, no suele haber seguridad de que el desempeño futuro continuará copiando el comportamiento pasado. Además, como el modelo se basa en el examen cuidadoso de datos pasados, la comparación propuesta casi siempre es favorable. Si el modelo propuesto representara un sistema nuevo (inexistente), no habría datos históricos disponibles. En esos casos podemos utilizar la simulación como una herramienta independiente para comprobar el resultado del modelo matemático.

La **implementación** de la solución de un modelo validado implica la transformación de los resultados en instrucciones de operación comprensibles que se emitirán a las personas que administrarán el sistema recomendado. La responsabilidad de esta tarea recae principalmente en el equipo de IO.

1.8 ACERCA DE ESTE LIBRO

Morris (1967) afirma que “la enseñanza de los modelos no es lo mismo que la enseñanza del modelado”. Tuve en cuenta esta importante aseveración durante la prepa-

ración de la novena edición, e hice todo el esfuerzo posible por presentar el arte del modelado en la IO con la inclusión de modelos realistas en el libro. Dada la importancia de los cálculos en la IO, el libro analiza la forma en que los algoritmos teóricos se acomodan en los códigos de computadoras comerciales (vea la sección 3.7). También presenta herramientas extensivas para realizar los cálculos, que van desde TORA orientado al aspecto tutorial, hasta los paquetes comerciales Excel, Excel Solver y AMPL.

La investigación de operaciones es tanto un arte como una ciencia; el arte de describir y modelar el problema, y la ciencia de resolver el modelo utilizando algoritmos matemáticos precisos. Un primer curso en la materia debe permitir al estudiante apreciar la importancia de ambas áreas. Esto proporcionará a los usuarios de IO la clase de confianza que normalmente no se obtendría si la capacitación se enfocara sólo en el aspecto artístico de la IO, con el pretexto que las computadoras pueden liberar al usuario de la necesidad de *entender* por qué funcionan los algoritmos de solución.

Las habilidades de modelado y cálculo pueden mejorarse por el estudio de los casos prácticos editados. Para ayudarle en este sentido, el capítulo 26 en el sitio web incluye 15 casos totalmente desarrollados y analizados que comprenden la mayor parte de los modelos de IO que se presentan en este libro. También se incluyen 50 casos basados en aplicaciones de la vida real en el apéndice E en el sitio web. Se dispone de más estudios de casos en periódicos y publicaciones. En particular, *Interfaces* (publicado por INFORMS) es una rica fuente de diversas aplicaciones de IO.

BIBLIOGRAFÍA

Altier, W., *The Thinking Manager's Toolbox: Effective Processes for Problem Solving and Decision Making*, Oxford University Press, Nueva York, 1999.

Checkland, P., *Systems Thinking, System Practice*, Wiley, Nueva York, 1999.

Evans, J., *Creative Thinking in the Decision and Management Sciences*, South-Western Publishing, Cincinnati, 1991.

Gass, S., "Model World: Danger, Beware the User as a Modeler," *Interfaces*, vol. 20, núm. 3, págs. 60-64, 1990.

Morris, W., "On the Art of Modeling", *Management Science*, vol. 13, págs. B707-B717, 1967.

Paulos, J., *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences*, Hill and Wang, Nueva York, 1988.

Singh, S., *Fermat's Enigma*, Walker, Nueva York, 1997.

Willemain, T., "Insights on Modeling from a Dozen Experts", *Operations Research*, vol. 42, núm. 2, págs. 213-222, 1994.

CAPÍTULO 2

Modelado con programación lineal

Aplicación de la vida real. Frontier Airlines adquiere combustible de una manera económica

La carga de combustible de un avión puede hacerse en cualquiera de las escalas a lo largo de una ruta de vuelo. El precio del combustible varía entre escalas y se pueden obtener ahorros potenciales cargando más combustible en un lugar más económico para usarlo en tramos de vuelo subsecuentes. La desventaja es que el peso adicional del combustible cargado hará que se consuma más gasolina. La programación lineal (PL) y la heurística se utilizan para determinar la cantidad óptima de carga de combustible que equilibre el costo del consumo excesivo frente a los ahorros en el costo del combustible. El estudio, realizado en 1981, arrojó ahorros netos de aproximadamente $350,000 al año. El caso 1 en el capítulo 26 en el sitio web, proporciona los detalles del estudio. Es interesante que ahora, con el reciente aumento del costo del combustible, muchas aerolíneas estén utilizando software para adquirir combustible con base en la PL.

2.1 MODELO DE PL CON DOS VARIABLES

En esta sección analizaremos la solución gráfica de una programación lineal (PL) con dos variables. Aun cuando en la práctica difícilmente ocurren problemas de dos variables, el tratamiento proporciona fundamentos concretos para el desarrollo del algoritmo simplex general que se presenta en el capítulo 3.

Ejemplo 2.1-1 (La compañía Reddy Mikks)

Reddy Mikks produce pinturas para interiores y exteriores con dos materias primas, $M1$ y $M2$. La tabla siguiente proporciona los datos básicos del problema.

	Toneladas de materia prima por tonelada de		Disponibilidad diaria máxima (toneladas)
	Pintura para exteriores	*Pintura para interiores*	
Materia prima, $M1$	6	4	24
Materia prima, $M2$	1	2	6
Utilidad por tonelada ($1000)	5	4	

Una encuesta de mercado indica que la demanda diaria de pintura para interiores no puede exceder la de pintura para exteriores en más de una tonelada. Asimismo, que la demanda diaria máxima de pintura para interiores es de dos toneladas.

Reddy Mikks se propone determinar la (mejor) combinación óptima de pinturas para interiores y exteriores que maximice la utilidad diaria total.

Todos los modelos de IO, incluido el de PL, constan de tres componentes básicos.

1. Las **variables** de decisión que pretendemos determinar.
2. El **objetivo** (la meta) que necesitamos optimizar (maximizar o minimizar).
3. Las **restricciones** que la solución debe satisfacer.

La definición correcta de las variables de decisión es un primer paso esencial en el desarrollo del modelo. Una vez hecha, la tarea de construir la función objetivo y las restricciones es más directa.

Para el problema de Reddy Mikks necesitamos determinar las cantidades diarias que se deben producir de pinturas para exteriores e interiores. Así, las variables del modelo se definen como sigue:

$$x_1 = \text{Toneladas producidas diariamente de pintura para exteriores}$$

$$x_2 = \text{Toneladas producidas diariamente de pintura para interiores}$$

La meta de Reddy Mikks es *maximizar* (es decir, incrementar lo más posible) la utilidad diaria de ambas pinturas. Los dos componentes de la utilidad diaria total se expresan en función de las variables x_1 y x_2 como sigue:

$$\text{Utilidad de la pintura para exteriores} = 5x_1 \text{ (en miles de dólares)}$$

$$\text{Utilidad de la pintura para interiores} = 4x_2 \text{ (en miles de dólares)}$$

Si z representa la utilidad diaria total (en miles de dólares), el objetivo (o meta) de Reddy Mikks se expresa como sigue

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

A continuación definimos las restricciones que limitan el consumo de las materias primas y la demanda del producto. Las restricciones en las materias primas se expresan verbalmente como

$$\begin{pmatrix}\text{Consumo de una materia}\\ \text{prima por ambas pinturas}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Disponibilidad máxima}\\ \text{de materia prima}\end{pmatrix}$$

El consumo diario de la materia prima $M1$ es de 6 toneladas por tonelada de pintura para exteriores, y de 4 toneladas por tonelada de pintura para interiores. Por lo tanto

$$\text{Consumo de materia prima } M1 \text{ por ambas pinturas} = 6x_1 + 4x_2 \text{ toneladas/día}$$

Asimismo,

$$\text{Consumo de materia prima } M2 \text{ por ambas pinturas} = 1x_1 + 2x_2 \text{ toneladas/día}$$

Las disponibilidades diarias de las materias primas $M1$ y $M2$ son de 24 y 6 toneladas, respectivamente. Así pues, las restricciones en las materias primas son

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \text{ (Materia prima } M1\text{)}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \text{ (Materia prima } M2\text{)}$$

La primera restricción en la demanda del producto estipula que la producción diaria de pintura para interiores no debe exceder a la de pintura para exteriores en más de 1 tonelada, lo cual se traduce en

$$x_2 - x_1 \leq 1 \quad \text{(Límite del mercado)}$$

La segunda restricción limita la demanda diaria de pintura para interiores a 2 toneladas, es decir,

$$x_2 \leq 2 \quad \text{(Límite de la demanda)}$$

Una restricción implícita (o "sobreentendida") requiere que todas las variables, x_1 y x_2, asuman sólo valores positivos o cero. Las restricciones, expresadas como $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ se conocen como **restricciones de no negatividad**.

El modelo completo de Reddy Mikks es

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 && (1)\\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 && (2)\\ -x_1 + x_2 &\leq 1 && (3)\\ x_2 &\leq 2 && (4)\\ x_1, x_2 &\geq 0 && (5) \end{aligned}$$

Todos los valores de x_1 y x_2 que satisfacen las cinco restricciones constituyen una **solución factible**. De lo contrario la solución es **no factible**. Por ejemplo, la solución $x_1 = 3$ toneladas por día y $x_2 = 1$ tonelada por día es una solución factible porque no viola *ninguna* de las cinco restricciones. Este resultado se confirma sustituyendo ($x_1 = 3, x_2 = 1$) en el lado izquierdo de cada restricción. En la restricción (1) tenemos $6x_1 + 4x_2 = 6 \times 3 + 4 \times 1 = 22$, la cual es menor que el lado derecho de la restricción (= 24). Las restricciones 2 a 5 se comprueban de la misma manera (¡hágalo!). Por otra parte, la solución $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$, es no factible porque no satisface por lo menos una restricción, por ejemplo la restricción (1): $6 \times 4 + 4 \times 1 = 28$, la cual es mayor que el lado derecho (= 24).

La meta del problema es determinar la solución **óptima**, es decir la mejor solución *factible* que maximice la utilidad total z. Primero utilizamos el método gráfico (sección 2.2) para demostrar que el problema de Reddy Mikks tiene una cantidad *infinita* de soluciones factibles, una propiedad compartida por todas las PL no triviales. Esto significa que el problema no puede ser resuelto por enumeración. En vez de eso, necesitamos un algoritmo que determine la solución óptima en una cantidad finita de pasos. El método gráfico en la sección 2.2, y su generalización algebraica en el capítulo 3, explican los detalles del algoritmo deseado.

Comentarios. El objetivo y la función de restricción en todas las PL deben ser lineales. Adicionalmente, todos los parámetros (coeficientes de las funciones objetivo y de restricción) del modelo se conocen con certeza.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.1A

1. Para el modelo de Reddy Mikks, defina las siguientes restricciones y exprésela con un lado izquierdo lineal y un lado derecho constante:

*__(a)__ La demanda diaria de pintura para interiores supera la de pintura para exteriores por *al menos* una tonelada.

(b) El consumo diario de materia prima $M2$ en toneladas es *cuando mucho* de 6 y *por lo menos* de 3.

*(c) La demanda de pintura para interiores no puede ser menor que la demanda de pintura para exteriores.

(d) La cantidad mínima de pintura que debe producirse tanto para interiores como para exteriores es de 3 toneladas.

*(e) La proporción de pintura para interiores respecto de la producción total de pintura para interiores y exteriores no debe exceder de 5.

2. Determine la mejor solución *factible* entre las siguientes soluciones (factibles y no factibles) del modelo de Reddy Mikks:

(a) $x_1 = 1, x_2 = 4$.

(b) $x_1 = 2, x_2 = 2$.

(c) $x_1 = 3, x_2 = 1.5$.

(d) $x_1 = 2, x_2 = 1$.

(e) $x_1 = 2, x_2 = -1$.

***3.** Para la solución factible $x_1 = 2, x_2 = 2$ del modelo de Reddy Mikks, determine las cantidades no usadas de las materias primas $M1$ y $M2$.

4. Suponga que Reddy Mikks vende su pintura para exteriores a un solo mayorista con un descuento. La utilidad por tonelada es de $5000 si el contratista compra no más de 2 toneladas diarias, y de $4500 en los demás casos. Exprese matemáticamente la función objetivo. ¿Es lineal la función resultante?

2.2 SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA PL[1]

La solución gráfica incluye dos pasos:

1. Determinar el espacio de soluciones factibles.
2. Determinar la solución óptima de entre todos los puntos localizados en el espacio de soluciones.

A continuación se muestran dos ejemplos para mostrar cómo se manejan las funciones objetivo de maximización y minimización.

2.2.1 Solución de un modelo de maximización

Ejemplo 2.2-1

Este ejemplo resuelve el modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.1-1.

Paso 1. *Determinación del espacio de soluciones factibles*.
Antes que nada, considere las restricciones de no negatividad $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. En la figura 2.1, el eje horizontal x_1 y el eje vertical x_2 representan las variables de pintura para exteriores e interiores, respectivamente. Así pues, las restricciones de no negatividad limitan las variables al primer cuadrante (sobre el eje x_1 y a la derecha del eje x_2).

---

[1] La solución gráfica de una PL con dos variables, aunque difícilmente es útil en la práctica, proporciona ideas que son cruciales para entender el método simplex algebraico general que se presenta en el capítulo 3. El módulo gráfico interactivo TORA es en especial útil para experimentar con el método gráfico. La sección 2.3 presenta los paquetes comerciales Excel Solver y AMPL. Su uso se demuestra mediante diversas aplicaciones de PL prácticas en la sección 2.4.

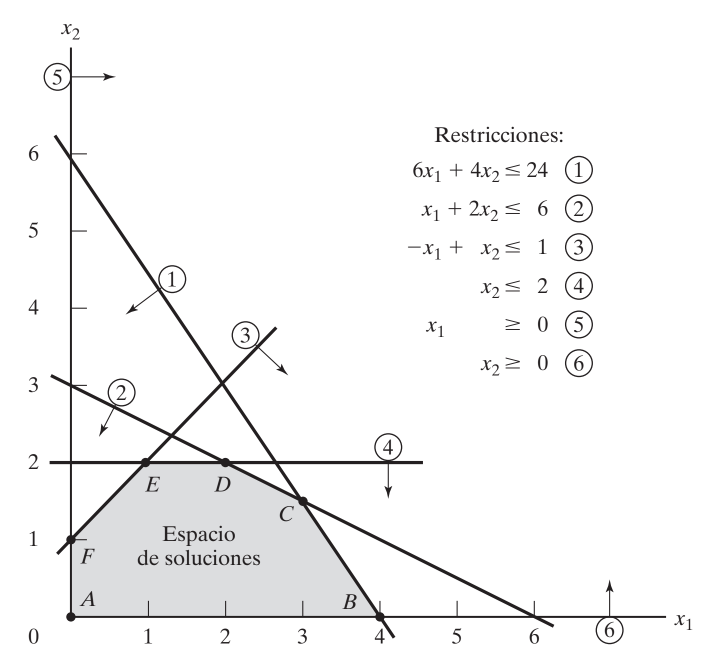


FIGURA 2.1

Espacio factible del modelo de Reddy Mikks

Para tener en cuenta las otras cuatro restricciones, primero sustituya cada desigualdad con una ecuación, y luego trace la línea recta resultante localizando dos puntos diferentes. Por ejemplo, después de sustituir $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ con la línea recta $6x_1 + 4x_2 = 24$, se determinan dos puntos distintos haciendo $x_1 = 0$ para obtener $x_2 = \frac{24}{4} = 6$ y luego que $x_2 = 0$ para obtener $x_1 = \frac{24}{6} = 4$. De este modo, la línea $6x_1 + 4x_2 = 24$ que pasa por los puntos (0,6) y (4,0) es la línea (1) que se muestra en la figura 2.1.

A continuación consideramos el efecto de la desigualdad que divide el plano (x_1, x_2) en dos semiplanos, uno a cada lado de la línea trazada. Sólo una de estas dos mitades satisface la desigualdad. Para determinar el lado correcto seleccionamos (0,0) como *punto de referencia*. Si (0,0) satisface la desigualdad, entonces el lado en que está es el semiplano factible; de lo contrario, es el otro lado. El uso del punto de referencia (0,0) se ilustra con la restricción $6x_1 + 4x_2 \leq 24$. Como $6 \times 0 + 4 \times 0 = 0$ es menor que 24, el semiplano que representa la desigualdad (1) incluye el origen (lo que se indica con la dirección de la flecha en la figura 2.1).

Conviene seleccionar (0,0) por computadora como punto de referencia porque siempre da un valor de cero al lado izquierdo de la restricción. Sin embargo, si la línea pasa por el origen, en ese caso debe usarse como punto de referencia cualquier otro punto que no esté sobre la línea.

La aplicación del procedimiento de punto de referencia a todas las restricciones del modelo produce las restricciones que se muestran en la figura 2.1 (¡compruébelo!). El **espacio de soluciones factibles** es el área en el primer cuadrante que satisface todas las restricciones al mismo tiempo. En la figura 2.1 todos los puntos en o sobre el límite del área *ABCDEF* definen el espacio de soluciones factibles. Todos los puntos fuera de esta área son no factibles.

Momento de TORA.

El módulo de PL gráfico TORA controlado por menú es útil para reforzar su comprensión de cómo se grafican las restricciones de PL. Seleccione Linear Programming en el MAIN menu. Después de ingresar el modelo, en el menú SOLVE/MODIFY seleccione Solve ⇒ Graphical. En la pantalla de resultados podrá interactuar con el trazo de las restricciones, una a la vez, para ver cómo afecta cada restricción el espacio de soluciones.

Paso 2. *Determinación de la solución óptima:*
La cantidad de puntos de solución en el espacio factible $ABCDEF$ de la figura 2.1 es *infinita*. En consecuencia, se requiere un procedimiento sistemático para determinar la solución óptima.

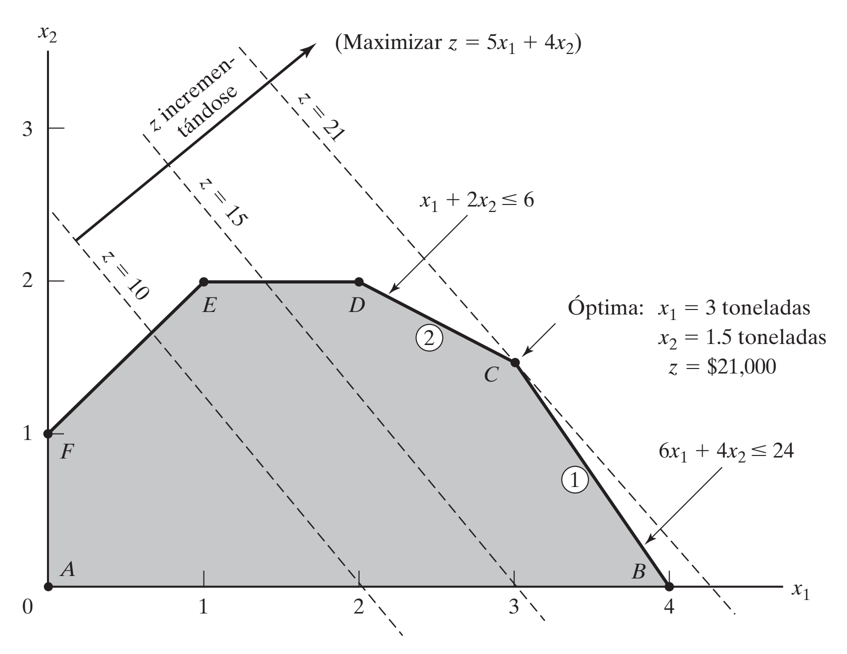
En primer lugar, la dirección en la cual se incrementa la función de utilidad $z = 5x_1 + 4x_2$ (recordemos que estamos *maximizando* z) se determina asignando valores *crecientes* arbitrarios a z. Por ejemplo, la utilización de $z = 10$ y $z = 15$ (arbitrarios) equivaldría a trazar las dos líneas $5x_1 + 4x_2 = 10$ y $5x_1 + 4x_2 = 15$, que identifican la dirección en la cual se incrementa z, como se muestra en la figura 2.2. La solución óptima ocurre en C, el punto en el espacio de soluciones más allá del cual cualquier incremento adicional producirá la solución no factible.

Los valores de x_1 y x_2 asociados con el punto óptimo C se determinan resolviendo las ecuaciones asociadas con las líneas (1) y (2):

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 = 6$$

FIGURA 2.2

Solución óptima del modelo de Reddy Mikks



La solución es $x_1 = 3$ y $x_2 = 1.5$ con $z = 5 \times 3 + 4 \times 1.5 = 21$, que demanda una combinación de producto diaria de 3 toneladas de pintura para exteriores, y 1.5 toneladas de pintura para interiores. La utilidad diaria asociada es de $21,000.

Una característica importante de la solución de PL óptima es que *siempre* está asociada con un **punto de esquina** del espacio de soluciones (donde, en dos dimensiones, se intersecan dos líneas). Esto es cierto incluso si la función objetivo es paralela a una restricción. Por ejemplo, si la función objetivo es $z = 6x_1 + 4x_2$, la cual es paralela a la restricción 1, siempre podemos decir que la solución óptima ocurre en el punto de esquina B o C. En realidad, cualquier punto sobre el segmento de línea BC será una solución óptima *alternativa* (vea también el ejemplo 3.5-2); sin embargo, la observación importante en este caso es que los *puntos de esquina* B y C definen totalmente el segmento de línea BC.

Momento TORA.

Puede interactuar con TORA para ver que la solución óptima siempre está asociada con un punto de esquina. En la pantalla de resultados puede hacer clic en View/Modify Input Data para modificar los coeficientes de la función objetivo y resolver de nuevo gráficamente el problema. Puede utilizar las siguientes funciones objetivo para comprobar la idea propuesta.

(a) $z = 5x_1 + x_2$

(b) $z = 5x_1 + 4x_2$

(c) $z = x_1 + 3x_2$

(d) $z = -x_1 + 2x_2$

(e) $z = -2x_1 + x_2$

(f) $z = -x_1 - x_2$

La notable observación de que la solución óptima de PL siempre está asociada con un punto de esquina indica que su búsqueda puede limitarse a una cantidad finita de puntos (y no a una infinita). De hecho, en este pequeño ejemplo la solución óptima se determina tan sólo con enumerar todos los puntos de esquina, como se muestra en la tabla siguiente:

Punto de esquina	(x_1, x_2)	z
A	(0, 0)	0
B	(4, 0)	20
$\boldsymbol{C}$	**(3, 1.5)**	**21 (ÓPTIMA)**
D	(2, 2)	18
E	(1, 2)	13
F	(0, 1)	4

A medida que aumenta la cantidad de restricciones y variables, los puntos de esquina también lo hacen, y el procedimiento de enumeración propuesto se hace computacionalmente impráctico. No obstante, la observación con respecto al rol de los puntos de esquina al identificar la solución óptima es clave para el desarrollo del algoritmo algebraico general, llamado *método simplex*, que se estudiará en el capítulo 3.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.2A

1. Determine el espacio factible para cada una de las siguientes restricciones independientes, dado que $x_1, x_2 \geq 0$.

*(a) $-3x_1 + x_2 \geq 6$

(b) $x_1 - 2x_2 \geq 5$

(c) $2x_1 - 3x_2 \leq 12$

(d) $x_1 - x_2 \leq 0$

*(e) $-x_1 + x_2 \geq 0$

2. Identifique la dirección de incremento de z en cada uno de los casos siguientes:

*(a) Maximizar $z = x_1 - x_2$

(b) Maximizar $z = -5x_1 - 6x_2$

(c) Maximizar $z = -x_1 + 2x_2$

*(d) Maximizar $z = -3x_1 + x_2$

3. Determine el espacio de soluciones y la solución óptima del modelo de Reddy Mikks para cada uno de los siguientes cambios independientes:

(a) La demanda diaria máxima de pintura para exteriores es de 2.5 toneladas.

(b) La demanda diaria de pintura para interiores es por lo menos de 2 toneladas.

(c) La demanda diaria de pintura para interiores es exactamente 1 tonelada mayor que la de pintura para exteriores.

(d) La disponibilidad diaria de la materia prima $M1$ es por lo menos de 24 toneladas.

(e) La disponibilidad diaria de la materia prima $M1$ es por lo menos de 24 toneladas, y la demanda diaria de pintura para interiores es mayor que la de pintura para exteriores en por lo menos 1 tonelada.

4. Una compañía que funciona 10 horas al día fabrica dos productos en tres procesos secuenciales. La siguiente tabla resume los datos del problema:

	Minutos por unidad			Utilidad
Producto	*Proceso 1*	*Proceso 2*	*Proceso 3*	unitaria
1	10	6	8	\$2
2	5	20	10	\$3

Determine la combinación óptima de los dos productos.

***5.** Una compañía fabrica dos productos, A y B. El volumen de ventas de A es por lo menos 80% de las ventas totales de A y B. Sin embargo, la compañía no puede vender más de 100 unidades de A por día. Ambos productos utilizan una materia prima, cuya disponibilidad diaria máxima es de 240 lb. Las tasas de consumo de la materia prima son de 2 lb por unidad de A y de 4 lb por unidad de B. Las utilidades de A y B son de \$20 y \$50, respectivamente. Determine la combinación óptima de productos para la compañía.

6. Alumco fabrica láminas y varillas de aluminio. La capacidad de producción máxima se estima en 800 láminas o 600 varillas por día. La demanda diaria es de 550 láminas y 580 varillas. La utilidad por tonelada es de \$40 por lámina y de \$35 por varilla. Determine la combinación de producción diaria óptima.

***7.** Una persona desea invertir \$5000 durante el próximo año en dos tipos de inversión. La inversión A reditúa 5% y la inversión B 8%. La investigación de mercado recomienda una asignación de por lo menos 25% en A y cuando mucho 50% en B. Además, la inver-

sión A debe ser por lo menos de la mitad de la inversión B. ¿Cómo deben asignarse los fondos a las dos inversiones?

8. La división de educación continua del Colegio Comunitario Ozark ofrece un total de 30 cursos cada semestre. Los cursos ofrecidos suelen ser de dos tipos: prácticos y de humanidades. Para satisfacer las demandas de la comunidad, se deben ofrecer por lo menos 10 cursos de cada tipo cada semestre. La división estima que los ingresos por el ofrecimiento de cursos prácticos y humanistas son aproximadamente de $1500 y $1000 por curso, respectivamente.

(a) Idee una oferta de cursos óptima para el colegio.

(b) Demuestre que el costo por curso adicional es de $1500, el cual es igual al ingreso por curso práctico. ¿Qué significa este resultado en función de la oferta de cursos adicionales?

9. ChemLabs utiliza las materias primas I y II para producir dos soluciones de limpieza doméstica, A y B. Las disponibilidades diarias de las materias primas I y II son de 150 y 145 unidades, respectivamente. Una unidad de solución A consume .5 unidades de la materia prima I, y 0.6 unidades de la materia prima II, en tanto que una unidad de la solución B consume 0.5 unidades de la materia prima I, y .4 unidades de la materia prima II. Las utilidades por unidad de las soluciones A y B son de $8 y $10, respectivamente. La demanda diaria de la solución A es de entre 30 y 150 unidades, y la de la solución B va de 40 a 200 unidades. Determine las cantidades de producción óptimas de A y B.

10. La tienda de abarrotes Ma-and-Pa tiene un espacio de anaqueles limitado y debe utilizarlo con eficacia para incrementar las utilidades. Dos marcas de cereal, *Grano* y *Wheatie*, compiten por un total de espacio de 60 pies^{2}en anaqueles. Una caja de *Grano* ocupa .2 pies^2, y una caja de *Wheatie* requiere .4 pies^2. Las demandas diarias máximas de *Grano* y *Wheatie* son de 200 y 120 cajas, respectivamente. Una caja de *Grano* reditúa una utilidad neta de $1.00 y la de una de *Wheatie* es de $1.35. Ma-and-Pa considera que como la utilidad neta de *Wheatie* es 35% mayor que la de *Grano*, a *Wheatie* se le debe asignar 35% más espacio que a *Grano*, lo que equivale a asignar aproximadamente 57% a *Wheatie* y 43% a *Grano*. ¿Usted qué piensa?

11. Jack es un estudiante novato en la Universidad de Ulern. Se da cuenta de que "sólo trabajo y nada de diversión me hacen ser un chico aburrido". Jack desea distribuir su tiempo disponible de aproximadamente 10 horas al día entre las tareas y la diversión. Estima que divertirse es dos veces más entretenido que hacer tareas. Pero también desea estudiar por lo menos el mismo tiempo que le quiere dedicar a la diversión. Sin embargo, Jack comprende que para cumplir con sus tareas no puede divertirse más de 4 horas al día. ¿Cómo debe distribuir su tiempo para maximizar su placer tanto de trabajar como de divertirse?

12. Wild West produce dos tipos de sombreros tejanos. El sombrero tipo 1 requiere el doble de mano de obra que el tipo 2. Si toda la mano de obra disponible se dedica sólo al tipo 2, la compañía puede producir un total de 400 sombreros tipo 2 al día. Los límites de mercado respectivos para el tipo 1 y el tipo 2 son de 150 y 200 sombreros por día, respectivamente. La utilidad es de $8 por sombrero tipo 1, y de $5 por sombrero tipo 2. Determine la cantidad de sombreros de cada tipo que maximice la utilidad.

13. Show & Sell puede publicitar sus productos en la radio y la televisión locales. El presupuesto para publicidad se limita a $10,000 al mes. Cada minuto de publicidad en radio cuesta $15 y cada minuto de comerciales en televisión $300. Show & Sell quiere anunciarse en radio por lo menos dos veces más que en televisión. Por el momento, no es práctico utilizar más de 400 minutos de publicidad por radio al mes. Por experiencias pasadas, se estima que la publicidad por televisión es 25 veces más efectiva que la de la radio. Determine la asignación óptima del presupuesto a publicidad por radio y televisión.

***14.** Wyoming Electric Coop posee una planta generadora de energía de turbina de vapor. Como en Wyoming abundan los depósitos de carbón, la planta genera su vapor con carbón. Esto, sin embargo, puede conducir a emisiones que no satisfagan las normas de la Agencia de Protección Ambiental (EPA, por sus siglas en inglés). Las normas de la

Agencia de Protección Ambiental limitan la descarga de bióxido de azufre a 2000 partes por millón por tonelada de carbón quemado, y la descarga de humo por las chimeneas de la planta a 20 lb por hora. La Coop recibe dos tipos de carbón pulverizado, *C*1 y *C*2, para usarlos en la planta de vapor. Los dos tipos se suelen mezclar antes de la combustión. Por simplicidad, se supone que la cantidad de azufre contaminante descargado (en partes por millón) es un promedio ponderado de la proporción de cada tipo utilizado en la mezcla. Los siguientes datos se basan en el consumo de 1 tonelada por hora de cada uno de los dos tipos de carbón.

Tipo de carbón	Descarga de azufre en partes por millón	Descarga de humo en lb por hora	Vapor generado en lb por hora
*C*1	1800	2.1	12,000
*C*2	2100	.9	9000

(a) Determine la proporción óptima para mezclar los dos tipos de carbón.

(b) Determine el efecto de rebajar el límite de descarga de humo en una libra sobre la cantidad de vapor generado por hora.

15. Top Toys planea una nueva campaña de publicidad por radio y TV. Un comercial de radio cuesta $300 y uno de TV $2000. Se asigna un presupuesto total de $20,000 a la campaña. Sin embargo, para asegurarse de que cada medio tendrá por lo menos un comercial de radio y uno de TV, lo máximo que puede asignarse a uno u otro medio no puede ser mayor que el 80% del presupuesto total. Se estima que el primer comercial de radio llegará a 5000 personas, y que cada comercial adicional llegará sólo a 2000 personas nuevas. En el caso de la televisión, el primer anuncio llegará a 4500 personas y cada anuncio adicional a 3000. ¿Cómo debe distribuirse la suma presupuestada entre la radio y la TV?

16. Burroughs Garment Company fabrica camisas para caballero y blusas de dama para las tiendas de descuento Wallmart, corporación que aceptará toda la producción surtida por Burroughs. El proceso de producción incluye el corte, la costura y el empaque. Burroughs emplea 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el de costura, y 5 en empaque. La fábrica trabaja un turno de 8 horas, 5 días a la semana. La siguiente tabla muestra los requerimientos de tiempo y utilidades por unidad para las dos prendas:

	Minutos por unidad			
Prenda	*Corte*	*Costura*	*Empaque*	Utilidad unitaria ($)
Camisas	20	70	12	8
Blusas	60	60	4	12

Determine el programa de producción semanal óptimo para Burroughs.

17. Una compañía mueblera fabrica escritorios y sillas. El departamento de aserrado corta la madera para ambos productos, la que luego se envía a los distintos departamentos de ensamble. Los muebles ensamblados se envían para su acabado al departamento de pintura. La capacidad diaria del departamento de aserrado es de 200 sillas o de 80 escritorios. El departamento de ensamble de sillas puede producir 120 sillas diarias, y el de ensamble de escritorios produce 60 escritorios. La capacidad del departamento de pintura es de 150 sillas, o 110 escritorios. Dado que la utilidad por sillas es de $50 y la de un escritorio es de $100, determine la combinación de producción óptima para la compañía.

***18.** Una línea de ensamble compuesta de tres estaciones consecutivas produce dos modelos de radio: HiFi-1 y HiFi-2. La siguiente tabla muestra los tiempos de ensamble de las tres estaciones de trabajo.

	Minutos por unidad	
Estación de trabajo	*HiFi-1*	*HiFi-2*
1	6	4
2	5	5
3	4	6

El mantenimiento diario de las estaciones 1, 2 y 3 consume 10, 14 y 12%, respectivamente, de los 480 minutos máximos disponibles por cada estación por día. Determine la combinación de productos óptima que minimizará el tiempo ocioso (o no utilizado) en las tres estaciones de trabajo.

19. *Experimento con TORA.* Ingrese la siguiente PL en TORA, y seleccione el modo de solución gráfica para que aparezca la pantalla gráfica de PL.

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 8x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 8 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ 3x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\leq 10 \\ x_2 &\geq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

A continuación, en una hoja de papel trace a escala los ejes x_1 y x_2 para el problema (también puede hacer clic en la opción Print Graph, en la parte superior derecha de la ventana para obtener una hoja a escala lista para usarse). Ahora, trace a mano una restricción en la hoja preparada y luego haga clic en la ventana izquierda de la pantalla para verificar su respuesta. Repita la misma operación para cada restricción, y termine el procedimiento con una gráfica de la función objetivo. El proceso sugerido se diseñó para que usted ponga a prueba y refuerce su entendimiento de la solución gráfica de la PL mediante una retroalimentación inmediata de TORA.

20. *Experimento con TORA.* Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ 6x_1 + 3x_2 &\leq 22.5 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

En PL se dice que una restricción es *redundante* si su eliminación del modelo no modifica el espacio de soluciones factibles. Use el medio gráfico de TORA para identificar las res-

tricciones redundantes, luego demuestre que su eliminación (basta con no graficarlas) no afecta al espacio de soluciones ni a la solución óptima

21. *Experimento con TORA*. En el modelo de Reddy Mikks, utilice TORA para demostrar que la eliminación de las restricciones de la materia prima (restricciones 1 y 2) produciría un *espacio de soluciones ilimitado.* ¿Qué se puede decir en este caso acerca de la solución óptima del modelo?

22. *Experimento con TORA*. En el modelo de Reddy Mikks, suponga que se agrega la siguiente restricción al problema.

$$x_2 \geq 3$$

Utilice TORA para demostrar que el modelo resultante tiene restricciones conflictivas que no se pueden satisfacer al mismo tiempo, y que por consiguiente no tiene una *solución factible*.

2.2.2 Solución de un modelo de minimización

Ejemplo 2.2-2 (Problema de la dieta)

Ozark Farms consume diariamente un mínimo de 800 lb de un alimento especial, el cual es una mezcla de maíz y soya con las siguientes composiciones:

	lb por lb de forraje		
Forraje	*Proteína*	*Fibra*	Costo ($/lb)
Maíz	.09	02	.30
Soya	.60	06	.90

Las necesidades dietéticas del alimento especial son un mínimo de 30% de proteína y un máximo de 5% de fibra. El objetivo es determinar la mezcla diaria de alimento a un costo mínimo.

Las variables de decisión del modelo son

$$x_1 = \text{libras de maíz en la mezcla diaria}$$
$$x_2 = \text{libras de soya en la mezcla diaria}$$

El objetivo es minimizar el costo diario total (en dólares) de la mezcla de alimento, es decir,

$$\text{Minimizar } z = .3x_1 + .9x_2$$

Las restricciones representan la cantidad diaria de la mezcla y las necesidades dietéticas. Ozark Farms requiere un mínimo de 800 lb de alimento al día, es decir,

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

La cantidad de proteína contenida en x_1 libras de maíz y en x_2 libras de soya es $(.09x_1 + .6x_2)$ lb. Esta cantidad debe ser al menos igual al 30% de la mezcla de alimentos total $(x_1 + x_2)$ lb, es decir,

$$.09x_1 + .6x_2 \geq .3(x_1 + x_2)$$

Asimismo, la necesidad de fibra de 5% máximo se representa como sigue

$$.02x_1 + .06x_2 \leq .05(x_1 + x_2)$$

Las restricciones se simplifican cambiando los términos en x_1 y x_2 al lado izquierdo de cada desigualdad, con sólo una constante del lado derecho. El modelo completo es

$$\text{Minimizar } z = .3x_1 + .9x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &\geq 800 \\ .21x_1 - .30x_2 &\leq 0 \\ .03x_1 - .01x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La figura 2.3 muestra la solución gráfica del modelo. La segunda y tercera restricciones pasan por el origen. De este modo, a diferencia del modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.2-1, la determinación de los semiplanos factibles de estas dos restricciones requiere que se utilice un punto de referencia diferente de (0,0), por ejemplo, (100,0) o (0,100).

Solución:

El modelo minimiza el valor de la función objetivo al reducir z en la dirección que se muestra en la figura 2.3. La solución óptima es la intersección de las dos líneas $x_1 + x_2 = 800$ y $.21x_1 - .3x_2 = 0$, y por consiguiente $x_1 = 470.6$ lb y $x_2 = 329.4$ lb. El costo mínimo de la mezcla de alimentos es $z = .3 \times 470.6 + .9 \times 329.4 = \$437.64$ por día.

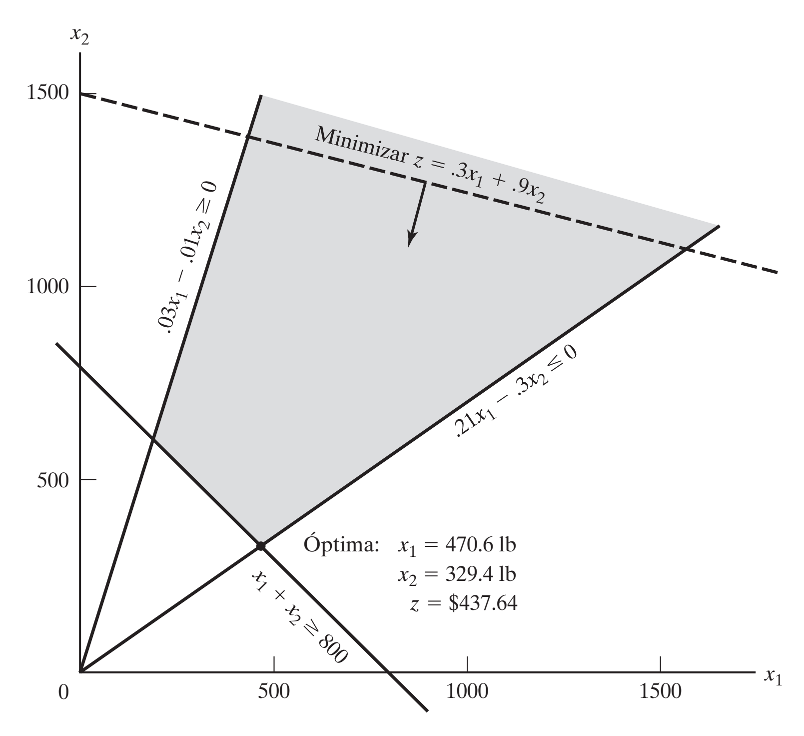


FIGURA 2.3

Solución gráfica del modelo de la dieta

Comentarios. Nos podríamos preguntar por qué la restricción $x_1 + x_2 \geq 800$ no puede ser reemplazada con $x_1 + x_2 = 800$ porque no sería óptimo producir más que la cantidad mínima. Aunque la solución del presente modelo satisfizo la ecuación, un modelo más complejo puede imponer restricciones adicionales que requerirían mezclar más que la cantidad mínima. Aún más importante, la desigualdad, por definición, es inclusiva del caso de igualdad, de modo que puede elegirse la ecuación si la optimalidad lo requiere. La conclusión es que no debemos "prejuzgar" la solución imponiendo la restricción de igualdad adicional.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.2B

1. Identifique la dirección de reducción de z en cada uno de los siguientes casos:
  *(**a**) Minimizar $z = 4x_1 - 2x_2$
  (**b**) Minimizar $z = -3x_1 + x_2$
  (**c**) Minimiza $z = -x_1 - 2x_2$

2. Para el modelo de la dieta, suponga que la disponibilidad diaria de maíz se limita a 450 lb. Identifique el nuevo espacio de soluciones, y determine la nueva solución óptima.

3. Para el modelo de la dieta, ¿qué tipo de solución óptima daría el modelo si la mezcla de alimentos no debiera exceder las 800 lb por día? ¿Tiene sentido la solución?

4. John debe trabajar cuando menos 20 horas a la semana para complementar sus ingresos al mismo tiempo que asiste a la escuela. Tiene la oportunidad de trabajar en dos tiendas de menudeo. En la tienda 1 puede trabajar entre 5 y 12 horas a la semana, y en la tienda 2 le permiten trabajar entre 6 y 10 horas. Ambas tiendas pagan el mismo salario por hora. Para decidir cuántas horas trabajar en cada tienda, John desea basar su decisión en la tensión del trabajo. Basado en entrevistas con otros empleados, John estima que, en una escala del 1 al 10, los factores de tensión son 8 y 6 en las tiendas 1 y 2, respectivamente. Como la tensión aumenta cada hora, supone que la tensión total en cada tienda al final de la semana es proporcional a las horas que trabaja en las tiendas. ¿Cuántas horas debe trabajar John en cada tienda?

*__5.__ OilCo está construyendo una refinería para producir cuatro productos: diesel, gasolina, lubricantes y combustible para avión. La demanda mínima (en barriles por día) de cada uno de esos productos es de 14,000, 30,000, 10,000 y 8000, respectivamente. Iraq y Dubai firmaron un contrato para enviar crudo a OilCo. Debido a las cuotas de producción especificadas por la OPEP (Organización de Países Exportadores de Petróleo), la nueva refinería puede recibir por lo menos 40% de su crudo de Iraq y el resto de Dubai. OilCo pronostica que la demanda y las cuotas de petróleo crudo no cambiarán durante los próximos 10 años.

Las especificaciones de los dos crudos conducen a mezclas de productos diferentes: Un barril de crudo de Iraq rinde .2 barriles de diesel, .25 barriles de gasolina, 1 barril de lubricante y .15 barriles de combustible para avión. Los rendimientos correspondientes del crudo de Dubai son: .1, .6, 1.5 y .1, respectivamente. OilCo necesita determinar la capacidad mínima de la refinería (barriles por día).

6. Day Trader desea invertir una suma de dinero que genere un rendimiento anual mínimo de $10,000. Están disponibles dos grupos de acciones: acciones de primera clase y acciones de alta tecnología, con rendimientos anuales promedio de 10 y 25%, respectivamente. Aunque las acciones de alta tecnología producen un mayor rendimiento, son más riesgosas, y Trader quiere limitar la suma invertida en estas acciones a no más de 60% de la inversión total. ¿Cuál es la suma mínima que Trader debe invertir en cada grupo de acciones para alcanzar su objetivo de inversión?

7. *Un centro de reciclaje industrial utiliza dos chatarras de aluminio, *A* y *B*, para producir una aleación especial. La chatarra *A* contiene 6% de aluminio, 3% de silicio, y 4% de carbón. La chatarra *B* contiene 3% de aluminio, 6% de silicio, y 3% de carbón. Los costos por tonelada de las chatarras *A* y *B* son de $100 y $80, respectivamente. Las especificaciones de la aleación especial requieren que (1) el contenido de aluminio debe ser mínimo

de 3% y máximo de 6%; (2) el contenido de silicio debe ser de entre 3 y 5%, y (3) el contenido de carbón debe ser de entre 3 y 7%. Determine la mezcla óptima de las chatarras que deben usarse para producir 1000 toneladas de la aleación.

8. *Experimento con TORA.* Considere el modelo de la dieta, y que la función objetivo sea como sigue

$$\text{Minimizar } z = .8x_1 + .8x_2$$

Use TORA para demostrar que la solución óptima está asociada con *dos* puntos de esquina distintos, y que ambos puntos dan por resultado el mismo valor objetivo. En este caso se dice que el problema tiene *óptimos alternativos*. Explique las condiciones que conducen a esta situación, y demuestre que, en realidad, el problema tiene una cantidad infinita de óptimos alternativos; proporcione luego una fórmula para determinar todas esas soluciones.

2.3 SOLUCIÓN CON COMPUTADORA, APLICANDO SOLVER Y AMPL

En la práctica, los modelos de PL suelen implicar miles de variables y restricciones, y la computadora es el único medio viable para resolver problemas de PL. Esta sección presenta dos sistemas de software comúnmente utilizados: Excel Solver y AMPL. Solver es en particular atractivo para los usuarios de hojas de cálculo. AMPL es un lenguaje de modelado algebraico que, como todos los lenguajes de programación de alto grado, requiere más conocimientos. No obstante, AMPL, y lenguajes similares[2], ofrece una gran flexibilidad de modelado. Aunque la presentación en esta sección se concentra en programaciones lineales, tanto AMPL como Solver pueden manejar problemas enteros y no lineales, como se demostrará en capítulos posteriores.

2.3.1 Solución de PL con Excel Solver

En Excel Solver, la hoja de cálculo es el medio de entrada y salida para la PL. La figura 2.4 muestra la distribución de los datos para el modelo de Reddy Mikks (archivo *solverRM1.xls*). La parte superior de la figura incluye cuatro tipos de información: (1) celdas para ingresar datos (B5:C9 y F6:F9); (2) celdas que representan las variables y la función objetivo (B13:D13); (3) definiciones algebraicas de la función objetivo y el lado izquierdo de las restricciones (celdas D5:D9), y (4) celdas que proporcionan nombres y símbolos explicativos. Solver solamente requiere los primeros tres tipos. El cuarto tipo mejora la legibilidad aunque no sirve para ningún otro propósito. El posicionamiento relativo de los cuatros tipos de información en la hoja de cálculo (como se sugiere en la figura 2.4) es conveniente para la referencia cruzada apropiada de las celdas en Solver, y se recomienda su uso.

¿Cómo se vincula Solver con los datos de la hoja de cálculo? En primer lugar, proporcionamos definiciones "algebraicas" de la función objetivo y el lado izquierdo de las restricciones mediante los datos de entrada (celdas B5:C9 y F6:F9), así como la función objetivo y variables (celdas B13:D13). A continuación colocamos las fórmulas resultantes de forma apropiada en las celdas D5:D9, como se muestra en la siguiente tabla:

	Expresión algebraica	Fórmula en la hoja de cálculo	Ingresada en la celda
Objetivo z	$5x_1 + 4x_2$	=B5*$B$13+C5*$C$13	D5
Restricción 1	$6x_1 + 4x_2$	=B6*$B$13+C6*$C$13	D6
Restricción 2	$x_1 + 2x_2$	=B7*$B$13+C7*$C$13	D7
Restricción 3	$-x_1 + x_2$	=B8*$B$13+C8*$C$13	D8
Restricción 4	$0x_1 + x_2$	=B9*$B$13+C9*$C$13	D9

[2] Entre otros paquetes comerciales conocidos están AIMMS, GAMS, LINGO, MPL, OPL Studio, y Xpress Mosel.

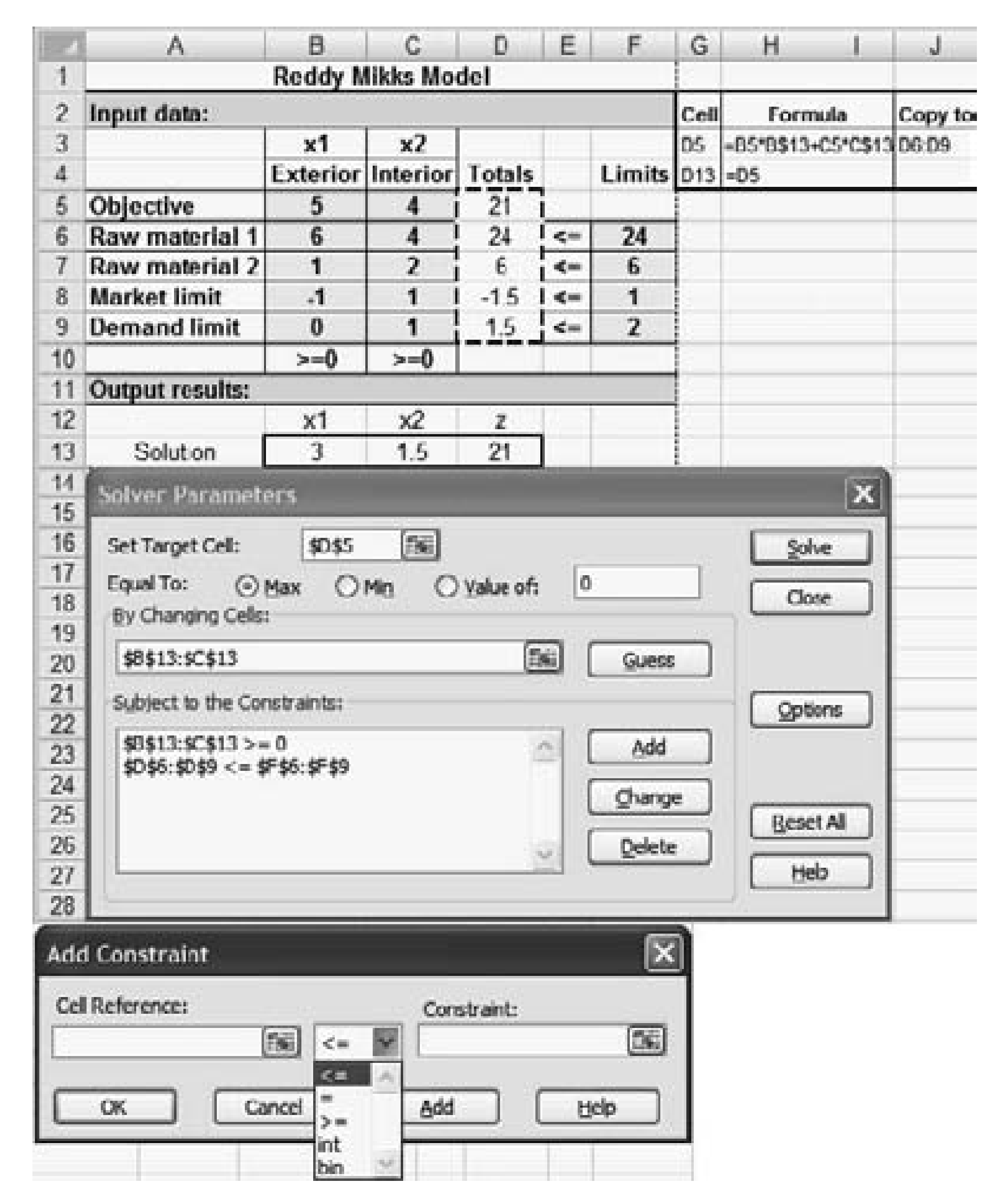


FIGURA 2.4

Definición del modelo de Reddy Mikks con Excel Solver (archivo *solverRM1.xls*)

En realidad, sólo tiene que ingresar la fórmula en la celda D5 y luego copiarla en las celdas D6:D9. Para hacerlo de manera correcta, es necesario utilizar la *referencia fija* de las celdas que representan a x_1 y x_2 (es decir, $B$13 y $C$13, respectivamente).

Las fórmulas explícitas que se acaban de describir no son prácticas para PL grandes. En su lugar, la fórmula en la celda D5 puede escribirse en forma compacta como sigue

= SUMPRODUCT(B5:C5,$B$13:$C$13)

La nueva fórmula puede copiarse entonces en las celdas D6:D9.

Ahora, todos los elementos del modelo de PL ya están listos para ejecutar el modelo. Haga clic en el menú Solver de la barra de menús de la hoja de cálculo[3] para acceder al cuadro de diálogo **Solver Parameters** (que se muestra en medio de la figura 2.4). A continuación, actualice el cuadro de diálogo como sigue:

Set Target Cell: $D$5
Equal To: ⊙ Max
By Changing Cells: $B$13:$C$13

Esta información le indica a Solver que las variables de PL (celdas $B$13 y $C$13) se determinan al maximizar la función objetivo en la celda $D$5.

Para establecer las restricciones haga clic en el botón Add en el cuadro de diálogo para desplegar el cuadro **Add Constraint** (en la parte inferior de la figura 2.4) y luego ingrese el tipo desigualdad en el lado izquierdo, y el lado derecho de las restricciones como[4]

$D$6:$D$9 <= $F$6:$F$9

Para las restricciones de no negatividad haga clic en el botón Add una vez más e ingrese

$B$13:$C$13 >= 0

Otra forma de ingresar las restricciones no negativas es hacer clic en la Options del cuadro de diálogo **Solver Parameters** para acceder a **Solver Options** (vea la figura 2.5) y luego active las casillas ☑ Assume Non-Negative y ☑ Assume Linear Model.

Por lo general no es necesario cambiar los valores predeterminados restantes en **Solver Options**. Sin embargo, la precisión predeterminada de .000001 puede ser demasiado "alta" para algunos problemas, y Solver puede devolver de forma incorrecta el

FIGURA 2.5
Cuadro de diálogo *Solver Options* (Opciones de Solver)

---

[3] Quizá sea necesario verificar antes Solver como complemento de Excel.
[4] En el cuadro de diálogo **Add Constraint** de la figura 2.4, las dos opciones adicionales **int** y **bin**, las cuales significan **int**eger y **bin**ary, se utilizan en programas enteros para limitar las variables a valores enteros y binarios (vea el capítulo 9).

mensaje “Solver could not find a feasible solution” (Solver no pudo determinar una solución factible). En esos casos se tiene que especificar una precisión menor (es decir, un valor mayor). Si el mensaje persiste, es posible que el problema sea no factible.

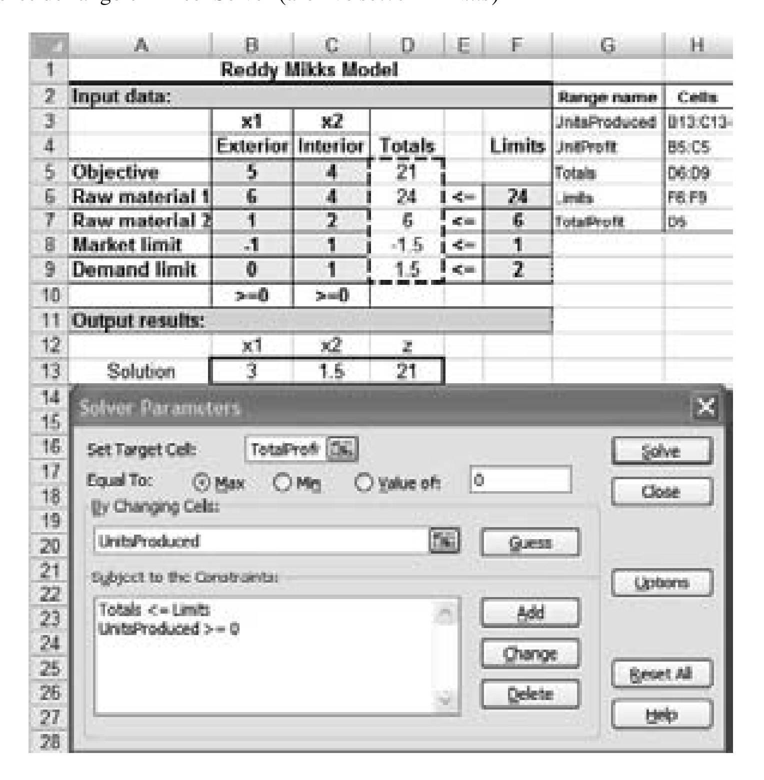
Los nombres de rango descriptivos de Excel pueden usarse para mejorar la legibilidad. Se crea un rango resaltando las celdas deseadas y escribiendo el nombre en el cuadro superior izquierdo de la hoja, pulsando luego la tecla Return. La figura 2.6 (archivo *solverRM2.xls*) proporciona los detalles con un resumen de los nombres de rango utilizados en el modelo. Hay que cotejar el modelo contra el archivo *solverRM1.xls* para ver cómo se utilizan los rangos en las fórmulas.

Para resolver el problema haga clic en el botón Solve del cuadro de diálogo **Solver Parameters**. De este modo el estado de la solución aparece en el nuevo cuadro de diálogo **Solver Results**. Si la elaboración del modelo es correcta, el valor óptimo de z aparecerá en la celda D5 y los valores de x_1 y x_2 aparecerán en las celdas B13 y C13, respectivamente. Por conveniencia, la celda D13 exhibe el valor óptimo de z al ingresar la fórmula = D5 en la celda D13, y en celdas contiguas aparece la solución óptima completa.

Si un problema no tiene una solución factible, Solver mostrará el mensaje explícito “Solver could not find a feasible solution” (Solver no pudo determinar una solución factible). Si el valor objetivo óptimo es ilimitado (no finito), Solver emitirá un mensaje un tanto ambiguo “The Set Cell values do not converge” (Los valores de la celda no convergen). En cualquier caso, el mensaje indica que hay algo erróneo en la formulación del modelo, como se verá en la sección 3.5.

FIGURA 2.6

Uso de nombres de rango en Excel Solver (archivo *solverRM2.xls*)



El cuadro de diálogo **Solver Results** brinda la oportunidad de solicitar más detalles sobre la solución, por ejemplo, los reportes de análisis de sensibilidad. En la sección 3.6.4 analizaremos estos resultados adicionales.

La solución del modelo de Reddy Mikks con Solver es directa. Otros modelos pueden requerir un "poco de inventiva" antes de poder establecerlos. Una clase de modelos de PL que caen en esta categoría tiene que ver con la optimización de redes, como se verá en el capítulo 6.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.3A

1. Modifique el modelo de Reddy Mikks de la figura 2.4 para tener en cuenta un tercer tipo de pintura denominado "marina". Los requerimientos por tonelada de las materias primas 1 y 2 son .5 y .75 toneladas, respectivamente. La demanda diaria de la nueva pintura oscila entre .5 toneladas y 1.5 toneladas. La utilidad por tonelada es de $3.5 (miles).

2. Desarrolle el modelo Excel Solver para los siguientes problemas:

- **(a)** El modelo de la dieta del ejemplo 2.2-2
- **(b)** Problema 16, conjunto 2.2a
- **(c)** Problema 5, conjunto 2.2b

2.3.2 Solución de PL con AMPL[5]

Esta sección proporciona una breve introducción a AMPL. El material en el apéndice C en el sitio web detalla la sintaxis de AMPL. Se hará referencia a la presentación en esta sección y con otras presentaciones de AMPL en el libro. Los dos ejemplos que aquí se presentan se refieren a los fundamentos de AMPL.

Problema de Reddy Mikks. Modelo rudimentario. AMPL cuenta con herramientas para modelar una PL en un formato manuscrito rudimentario. La figura 2.7 muestra un código autoexplicativo para el modelo de Reddy Mikks (archivo *amplRM1.txt*). Todas las palabras clave reservadas aparecen en negritas. Los demás nombres los genera el usuario. La función objetivo y cada una de las restricciones pueden tener nombres distintos (generados por el usuario) seguidos de punto y coma. Cada instrucción se cierra con punto y coma.

El formato manuscrito es adecuado para los problemas, en el sentido de que se requiere un nuevo código siempre que se cambian los datos de entrada. Para problemas prácticos (con estructura compleja y muchas variables y restricciones), el formato manuscrito, en el mejor de los casos, es tedioso. AMPL elimina esta dificultad aplicando un código que divide el problema en dos componentes: (1) Un modelo algebraico general para una clase específica de problemas aplicable a cualquier cantidad de variables y restricciones, y (2) datos para controlar el modelo algebraico. La implementación de estos dos puntos se aborda en la siguiente sección por medio del problema de Reddy Mikks.

---

[5] Por conveniencia, la versión de AMPL para el estudiante se encuentra en el sitio web. Las actualizaciones posteriores se pueden descargar de www.ampl.com. AMPL utiliza comandos en línea y no opera en el ambiente de Windows.

```
maximize z: 5*x1+4*x2;
subject to
  c1: 6*x1+4*x2<=24;
  c2: x1+2*x2<=6;
  c3: -x1+x2<=1;
  c4: x2<=2;
solve;
display z,x1,x2;
```

FIGURA 2.7
Modelo AMPL rudimentario para el problema de Reddy Mikks (archivo *amplRM1.txt*)

Problema de Reddy Mikks. Modelo algebraico. La figura 2.8 muestra las instrucciones del modelo (archivo *ampl1RM2.txt*). El archivo debe ser estrictamente texto (ASCII). El símbolo # designa el inicio de los comentarios explicativos. Los comentarios pueden aparecer en renglones distintos o después del punto y coma al final de una instrucción. El lenguaje es sensible a las mayúsculas o minúsculas, y todas sus palabras clave, con algunas excepciones, se escriben en minúsculas. (La sección C.2 en el sitio web proporciona más detalles).

```
#-------------------------------------------modelo algebraico
param m;
param n;
param c{1..n};
param b{1..m};
param a{1..m,1..n};

var x{1..n}>=0;

maximize z: sum{j in 1..n}c[j]*x[j];
subject to restr{i in 1..m}:
           sum{j in 1..n}a[i,j]*x[j]<=b[i];
#---------------------------------especificar datos del modelo
data;
param n:=2;
param m:=4;
param c:=1 5 2 4;
param b:=1 24  2 6  3 1  4 2;
param a:     1    2 :=
        1    6    4
        2    1    2
        3   -1    1
        4    0    1;
#-----------------------------------------resolver el problema
solve;
display z, x;
```

FIGURA 2.8
Modelo AMPL del problema de Reddy Mikks mediante datos de entrada puestos en el código fuente (archivo *ampl1RM2.txt*)

El modelo algebraico en AMPL visualiza el problema de PL general con n variables y m restricciones en el siguiente formato genérico:

$$\textbf{Maximizar } z\text{: } \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$$

$$\textbf{sujeto a } restr_i\text{: } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Así se dan a la función objetivo y a la restricción i los nombres (especificados por usuario) z y $restr_i$.

El modelo se inicia con las instrucciones **param** que declaran a m, n, c, b y a_{ij} como parámetros (o constantes) cuyos valores específicos se dan en la sección de datos de entrada del modelo. Traduce $c_j (j = 1,2,\ldots,n)$ como `c{1..n}`; $b_i (i = 1,2,\ldots,m)$ como `b{1..m}`, y $a_{ij}(i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n)$ como `a{1..m, 1..n}`. A continuación, las variables $x_j (j = 1,2,\ldots,n)$, junto con la restricción de no negatividad, las define la instrucción **var**

```
var x{1..n}>=0;
```

Una variable se considera no restringida si elimina `>=0` de su definición. La notación en { } representa el *conjunto* de subíndices dentro del cual se definen un `param` o una `var`.

El modelo se desarrolla de la siguiente manera, en función de los parámetros y las variables. La función objetivo y las restricciones tienen nombres distintos seguidos por dos puntos (:). La instrucción objetivo es una traducción directa de maximizar $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$:

```
maximize z: sum{j in 1..n}c[j]*x[j];
```

A la restricción i se le da el nombre raíz `restr` con un índice dentro del conjunto `{1..m}`:

```
restr{i in 1..m}:sum{j in 1..n}a[i,j]*x[j]<=b[i];
```

La instrucción es una traducción directa de $restr_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$.

Ahora el modelo algebraico puede utilizarse con cualquier conjunto de datos aplicables que se puedan ingresar después de la instrucción `data`;. Para el modelo de Reddy Mikks, los datos indican a AMPL que el problema tiene 2 variables (`param n:=2`;) y 4 restricciones (`param m:=4`;). Se debe utilizar el operador compuesto :=, y la instrucción debe iniciar con la palabra clave `param`. Para los parámetros de un solo subíndice, c y b, cada elemento está representado por su índice seguido de su valor y separados al menos por un espacio en blanco. Así, $c_1 = 5$ y $c_2 = 4$ se ingresan como

```
param c:= 1 5 2 4;
```

Los datos para la instrucción `param b` se ingresan del mismo modo.

Para el parámetro con subíndice doble a_{ij}, el conjunto de datos se lee como una matriz bidimensional con sus filas que designan a i y sus columnas que designan a j. El renglón superior define al subíndice j, y el subíndice i se ingresa al inicio de cada fila como

```
param a:   1    2 :=
      1    6    4
      2    1    2
      3   −1    1
      4    0    1;
```

El conjunto de datos debe terminar con punto y coma. Observe la ubicación *obligatoria* del separador : y el operador compuesto := después de `param a`.

Ahora el modelo y sus datos ya están listos. El comando `solve`; invoca el algoritmo de solución y el comando `display z, x`; proporciona la solución.

Para ejecutar el modelo, primero invoque AMPL (haga clic en el comando ampl.exe del directorio de AMPL). En el indicador `ampl`: ingrese el siguiente comando **model**, luego pulse la tecla Return:

```
model amplRM2.txt;
```

El resultado del sistema aparecerá entonces en la pantalla como sigue:

```
MINOS 5.5: Optimal solution found.
2 iterations, objective = 21

z = 21
x[*]:=

1 = 3
2 = 1.5
```

Los cuatro renglones inferiores son el resultado de ejecutar `display z, x`;. En realidad, AMPL dispone de capacidades de formateo que mejoran la legibilidad de los resultados de salida (vea la sección C.5.2 en el sitio web).

AMPL permite separar el modelo algebraico y los datos en dos archivos independientes. Este arreglo es más conveniente porque sólo el archivo de datos se tiene que cambiar una vez que se ha desarrollado el modelo. Para los detalles, vea el final de la sección C.2.

AMPL ofrece una amplia variedad de capacidades de programación. Por ejemplo, los datos de entrada y salida pueden asegurarse para que no sean enviados a archivos, hojas de cálculo y bases de datos externos, y el modelo puede ejecutarse de forma activa para una amplia variedad de opciones. Los detalles se dan en el apéndice C, en el sitio web.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.3B

1. En el modelo de Reddy Mikks, suponga que se produce un tercer tipo de pintura, llamada “marina”. Los requerimientos por tonelada de las materias primas $M1$ y $M2$ son .5 y .75 toneladas, respectivamente. La demanda diaria de la nueva pintura oscila entre .5 toneladas y 1.5 toneladas, y la utilidad por tonelada es de \$3.5 (mil). Modifique el modelo de Excel Solver aplicando *solver RM2.xls* y el modelo AMPL *amplRM2.txt* para tener en

cuenta la nueva situación y determinar la solución óptima. Compare el esfuerzo adicional asociado con cada modificación.

2. Desarrolle modelos AMPL para los siguientes problemas:
   (a) El problema de la dieta del ejemplo 2.2-2 y determine la solución óptima.
   (b) Problema 16, conjunto 2.2a
   (c) Problema 5, conjunto 2.2b

2.4 APLICACIONES DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Esta sección presenta modelos realistas de PL en los cuales la definición de las variables y la construcción de la función objetivo, así como las restricciones, no son tan directas como en el caso del modelo de dos variables. Las áreas cubiertas por estas aplicaciones incluyen lo siguiente:

1. Inversión.
2. Planificación de la producción y control de inventarios.
3. Planificación de la mano de obra.
4. Planificación de desarrollo urbano.
5. Refinación y mezcla de petróleo.

Cada modelo se detalla, y se interpreta su solución óptima.

2.4.1 Inversión

Multitud de oportunidades de inversión están disponibles para los inversionistas de hoy. Ejemplos de problemas de inversión son la asignación de presupuestos de capital para proyectos, estrategia de inversión en bonos, selección de cartera de acciones, y establecimiento de una política de préstamos bancarios. En muchas de estas situaciones, la PL puede usarse para seleccionar la combinación óptima de oportunidades que maximizarán el rendimiento, al mismo tiempo que se satisfacen los requerimientos establecidos por el inversionista y el mercado.

Ejemplo 2.4-1 (Modelo de préstamo bancario)

Bank One está desarrollando una política de préstamos que implica un máximo de $12 millones. La tabla siguiente muestra los datos pertinentes en relación con los préstamos disponibles.

Tipo de préstamo	Tasa de interés	% de deudas impagables
Personal	.140	.10
Automóvil	.130	.07
Casa	.120	.03
Agrícola	.125	.05
Comercial	.100	.02

Las deudas impagables son irrecuperables y no producen ingresos por intereses.

La competencia con otras instituciones financieras dicta la asignación de 40% mínimo de los fondos para préstamos agrícolas y comerciales. Para ayudar a la industria de la construcción de viviendas en la región, los préstamos para casa deben ser por lo menos 50% de los préstamos personales, para automóvil, y para casa. El banco limita la proporción total de las deudas impagables en todos los préstamos a un máximo de 4%.

Modelo matemático: La situación se refiere a determinar el monto del préstamo en cada categoría, lo que conduce a las siguientes definiciones de las variables:

x_1 = préstamos personales (en millones de dólares)

x_2 = préstamos para automóvil

x_3 = préstamos para casa

x_4 = préstamos agrícolas

x_5 = préstamos comerciales

El objetivo del Bank One es maximizar el rendimiento neto, la diferencia entre el ingreso por intereses y la pérdida por deudas impagables. El ingreso por intereses se acumula sobre los préstamos al corriente. Por ejemplo, cuando se pierde 10% de préstamos personales por deuda impagable, el banco recibirá intereses sobre 90% del préstamo; es decir, recibirá un interés de 14% sobre $9x_1$ del préstamo original x_1. El razonamiento es válido para los cuatro tipos restantes de préstamos. Por lo tanto,

$$\text{Interés total} = .14(.9x_1) + .13(.93x_2) + .12(.97x_3) + .125(.95x_4) + .1(.98x_5)$$
$$= .126x_1 + .1209x_2 + .1164x_3 + .11875x_4 + .098x_5$$

También tenemos

$$\text{Deuda impagable} = .1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5$$

La función objetivo combina el ingreso por intereses y la deuda impagable como sigue

$$\text{Maximizar } z = \text{Interés total} - \text{Deuda impagable}$$
$$= (.126x_1 + .1209x_2 + .1164x_3 + .11875x_4 + .098x_5)$$
$$- (.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5)$$
$$= .026x_1 + .0509x_2 + .0864x_3 + .06875x_4 + .078x_5$$

El problema tiene cinco restricciones:

1. *Los fondos totales no deben exceder de $12 (millones):*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

2. *Los préstamos agrícolas y comerciales deben ser iguales a por lo menos el 40% de todos los préstamos:*

$$x_4 + x_5 \geq .4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

o bien

$$.4x_1 + .4x_2 + .4x_3 - .6x_4 - .6x_5 \leq 0$$

3. *Los préstamos para casa deben ser iguales a por lo menos 50% de los préstamos personales, para automóvil y para casa:*

$$x_3 \geq .5(x_1 + x_2 + x_3)$$

o bien

$$.5x_1 + .5x_2 - .5x_3 \leq 0$$

4. *Las deudas impagables no deben exceder 4% de todos los préstamos*:

$$.1x_1 + .07x_2 + .03x_3 + .05x_4 + .02x_5 \leq .04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

o bien

$$.06x_1 + .03x_2 - .01x_3 + .01x_4 - .02x_5 \leq 0$$

5. *No negatividad:*

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Una sutil suposición en la formulación precedente es que todos los préstamos se emiten aproximadamente al mismo tiempo. Nos permite pasar por alto las diferencias en el valor del tiempo de los fondos asignados a los diferentes préstamos.

Solución:

La solución óptima se calcula utilizando AMPL (archivo *amplEx2.4-1.txt*):

$$z = .99648, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 7.2, x_4 = 0, x_5 = 4.8$$

Comentarios.

1. Quizá se pregunte por qué no definimos el lado derecho de la segunda restricción como $.4 \times 12$ en lugar de $.4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$. A fin de cuentas, parece razonable que el banco quiera prestar los $12 (millones). La respuesta es que el uso dado en la formulación no desaprueba esta posibilidad, pero hay dos razones más por las que no debería utilizar $.4 \times 12$: (1) Si otras restricciones en el modelo son tales que *no puedan* usarse todos los $12 (millones) (por ejemplo, el banco puede limitar los diferentes préstamos), entonces la opción $.4 \times 12$ podría conducir a una solución incorrecta o no factible. (2) Si desea experimentar con el efecto de cambiar los fondos disponibles (por ejemplo, de $12 a $13 millones) en la solución óptima, es posible que olvide cambiar $.4 \times 12$ a $.4 \times 13$, en cuyo caso la solución no será correcta. Un razonamiento parecido aplica al lado izquierdo de la cuarta restricción.
2. La solución óptima requiere que se asignen los $12 millones: $7.2 millones a préstamos para casa, y $4.8 millones a préstamos comerciales. Las categorías restantes no reciben nada. El rendimiento de la inversión es

$$\text{Tasa de rendimiento} = \frac{z}{12} = \frac{.99648}{12} = .08034$$

Esto muestra que la tasa de rendimiento anual combinada es de 8.034%, la cual es menor que la mejor tasa de interés *neta* (de 8.64% para préstamos para casa), y nos preguntamos por qué el modelo no aprovecha esta oportunidad. La respuesta es que la estipulación de que los préstamos agrícolas y comerciales deben ser iguales a por lo menos 40% de todos los préstamos (restricción 2) hace que la solución asigne $4.8 millones a préstamos comerciales a la tasa *neta* más baja de 7.8%, de ahí la reducción de la tasa de interés total a $100\left(\frac{.0864 \times 7.2 + .078 \times 4.8}{12}\right) = 8.034\%$. De hecho, si eliminamos la restricción 2, la solución óptima asignará todos los fondos a préstamos para casa a la tasa más alta de 8.64% (¡inténtelo utilizando el modelo AMPL!).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4A

1. Fox Enterprises está considerando seis posibles proyectos de construcción durante los próximos 4 años. Fox puede emprender cualquiera de los proyectos en parte o en su totalidad. La ejecución parcial de un proyecto prorrateará proporcionalmente tanto el rendi-

miento como los desembolsos de efectivo. Los rendimientos (valor presente) y los desembolsos de efectivo para los proyectos se dan en la siguiente tabla.

	Desembolso de efectivo ($1000)				
Proyecto	*Año 1*	*Año 2*	*Año 3*	*Año 4*	Rendimiento ($1000)
1	10.5	14.4	2.2	2.4	32.40
2	8.3	12.6	9.5	3.1	35.80
3	10.2	14.2	5.6	4.2	17.75
4	7.2	10.5	7.5	5.0	14.80
5	12.3	10.1	8.3	6.3	18.20
6	9.2	7.8	6.9	5.1	12.35
Fondos disponibles ($1000)	60.0	70.0	35.0	20.0	

(a) Formule el problema como un programa lineal, y determine la combinación óptima de proyectos que maximice el rendimiento total utilizando AMPL, Solver o TORA. Pase por alto el valor en el tiempo del dinero.

(b) Suponga que si se emprende una parte del proyecto 2, entonces debe emprenderse por lo menos una parte igual del proyecto 6. Modifique la formulación del modelo y determine la nueva solución óptima.

(c) En el modelo original, suponga que los fondos no utilizados al final de un año se utilizan en el año siguiente. Halle la nueva solución óptima, y determine qué tanto cada año "le pide prestado" al año anterior. Por sencillez, pase por alto el valor del dinero en el tiempo.

(d) Suponga en el modelo original que los fondos anuales disponibles para cualquier año se pueden exceder, si fuera necesario, pidiendo prestado a otras actividades financieras dentro de la compañía. Ignorando el valor del dinero en el tiempo, reformule el modelo de PL y determine la solución óptima. ¿Requeriría la nueva solución que se pida prestado en cualquier año? De ser así, ¿cuál es la tasa de rendimiento sobre el dinero pedido en préstamo?

*__2.__ El inversionista Doe dispone de $10,000 para invertirlos en cuatro proyectos. La tabla siguiente presenta el flujo de efectivo para las cuatro inversiones.

	Flujo de efectivo ($1000) al inicio del				
Proyecto	*Año 1*	*Año 2*	*Año 3*	*Año 4*	*Año 5*
1	−1.00	0.50	0.30	1.80	1.20
2	−1.00	0.60	0.20	1.50	1.30
3	0.00	−1.00	0.80	1.90	0.80
4	−1.00	0.40	0.60	1.80	0.95

La información que aparece en la tabla puede interpretarse como sigue: Para el proyecto 1, $1.00 invertido al inicio del año 1 redituará $.50 al inicio del año 2; $.30 al inicio del año 3; $1.80 al inicio del año 4, y $1.20 al inicio de año 5. Las entradas restantes pueden interpretarse de la misma manera. La entrada 0.00 indica que no se están realizando transacciones. Doe tiene opción adicional de invertir en una cuenta bancaria que gana 6.5% anual. Todos los fondos acumulados al final del año 1 pueden volverse a invertir en el año siguiente. Formule el problema como un programa lineal para determinar la asignación óptima de fondos a oportunidades de inversión. Resuelva el modelo con Solver de AMPL.

3. HiRise Construction puede licitar por la adjudicación de dos proyectos de 1 año. La siguiente tabla da el flujo de efectivo trimestral (en millones de dólares) para los dos proyectos.

	Flujo de efectivo (en millones de dólares) el				
Proyecto	*1 de enero*	*1 de abril*	*1 de julio*	*1 de octubre*	*31 de diciembre*
I	−1.0	−3.1	−1.5	1.8	5.0
II	−3.0	−2.5	1.5	1.8	2.8

HiRise dispone de fondos en efectivo que ascienden a $1 millón a principios de cada trimestre, y puede pedir prestado un máximo de $1 millón a una tasa de interés anual nominal de 10%. Cualquier dinero pedido a préstamo debe ser devuelto al final de cada trimestre. El efecto excedente puede ganar un interés trimestral a una tasa anual nominal de 8%. La acumulación neta al final de cada trimestre se invierte en el siguiente.

(a) Suponga que a HiRise se le permite una participación parcial o completa en los dos proyectos. Determine el nivel de participación que maximizará el efectivo neto acumulado el 31 de diciembre. Resuelva el modelo con Solver de AMPL.

(b) ¿Es posible pedir prestado dinero en cualquier trimestre y al mismo tiempo terminar con fondos excedentes? Explique.

4. En anticipación a los fuertes gastos académicos, Joe y Jill iniciaron un programa de inversión anual en el octavo cumpleaños de su hijo, el cual terminará hasta que cumpla dieciocho años. Planean invertir las siguientes cantidades al principio de cada año:

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad ($)	2000	2000	2500	2500	3000	3500	3500	4000	4000	5000

Para evitar sorpresas desagradables, quieren invertir el dinero sin riesgo en las siguientes opciones: Ahorros asegurados con rendimiento anual de 7.5%, bonos del gobierno a seis años que rinden 7.9% y cuyo precio de mercado actual es de 98% de su valor nominal, además de bonos municipales a 9 años que rinden 8.5% y cuyo precio de mercado actual es de 1.02 de su valor nominal. ¿Cómo deberá invertirse el dinero?

***5.** Un ejecutivo empresarial tiene la opción de invertir en dos planes. El plan A garantiza que cada dólar invertido ganará $.70 al año, y el plan B garantiza que cada dólar invertido ganará $2 después de 2 años. En el plan A, las inversiones pueden hacerse anualmente, y en el plan B sólo se permiten durante periodos que sean múltiplos de 2 años. ¿Cómo debe invertir el ejecutivo $100,000 para maximizar las ganancias al final de 3 años? Resuelva el modelo utilizando Solver de AMPL.

6. Un apostador participa en un juego que requiere dividir entre cuatro opciones el dinero apostado. El juego tiene tres resultados. La tabla siguiente presenta la ganancia o pérdida correspondiente por dólar para las diferentes opciones del juego.

	Rendimiento por dólar depositado en la opción			
Resultado	*1*	*2*	*3*	*4*
1	−3	4	−7	15
2	5	−3	9	4
3	3	−9	10	−8

El apostador tiene un total de $500, los cuales puede apostar sólo una vez. El resultado exacto del juego no se conoce *a priori*. Debido a esta incertidumbre, la estrategia del apostador es maximizar la *ganancia* mínima producida por los tres resultados. ¿Cómo deberá el apostador asignar los $500 entre las cuatro opciones? Resuelva el modelo con Solver de AMPL. (*Sugerencia*: La ganancia neta del apostador puede ser positiva, cero o negativa).

7. *Lewis (1996)*. Las facturas en una casa se reciben mensualmente (por ejemplo, servicios e hipoteca de la casa), trimestralmente (pagos de impuestos estimados), semestralmente (como los seguros), o anualmente (renovaciones y pagos vencidos de suscripciones). La siguiente tabla da las facturas mensuales durante el próximo año.

Mes	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Total
$	800	1200	400	700	600	900	1500	1000	900	1100	1300	1600	12000

Para solventar estos gastos, la familia aparta $1000 cada mes, cantidad que es el promedio del total dividido entre 12 meses. Si el dinero se deposita en una cuenta de ahorros convencional, puede ganar un interés anual de 4%, siempre que permanezca en la cuenta por lo menos 1 mes. El banco también ofrece certificados de depósito a 3 y 6 meses que pueden ganar el 5.5% y 7% de interés anual, respectivamente. Desarrolle un programa de inversión de 12 meses que maximizará la ganancia total de la familia durante el año. Establezca cualesquier suposiciones o requerimientos necesarios para llegar a una solución factible. Resuelva el modelo con Solver de AMPL.

2.4.2 Planificación de la producción y control de inventario

Abundan las aplicaciones de PL para planificar la producción y para controlar inventarios. Esta sección presenta tres ejemplos. El primero tiene que ver con la programación de la producción para satisfacer una demanda de un periodo único. El segundo se refiere al uso del inventario en un sistema de producción de múltiples periodos para satisfacer la demanda futura, y el tercero tiene que ver con el uso del inventario, y la contratación y despido de personal para "nivelar" la producción durante un horizonte de planificación de múltiples periodos.

Ejemplo 2.4-2 (Modelo de producción de un periodo único)

En preparación para la temporada invernal, una compañía fabricante de ropa está manufacturando abrigos de piel con capucha y chamarras con relleno de plumas de ganso, pantalones con aislamiento y guantes. Todos los productos se elaboran en cuatro departamentos diferentes: corte, aislamiento, costura y empaque. La compañía recibió pedidos en firme de sus productos. El contrato estipula una penalización por los artículos no surtidos. Elabore un plan de producción óptimo para la compañía, con base en los siguientes datos:

	Tiempo por unidades (h)				
Departamento	*Chamarras*	*Relleno de plumas*	*Pantalones*	*Guantes*	Capacidad (h)
Corte	.30	.30	.25	.15	1000
Aislamiento	.25	.35	.30	.10	1000
Costura	.45	.50	.40	.22	1000
Empaque	.15	.15	.1	.05	1000
Demanda	800	750	600	500	
Utilidad unitaria	$30	$40	$20	$10	
Penalización por unidad	$15	$20	$10	$8	

Modelo matemático: Las variables del problema son

x_1 = cantidad de chamarras con capucha

x_2 = cantidad de chamarras con relleno de plumas

x_3 = cantidad de pantalones

x_4 = cantidad de pares de guantes

Se penaliza a la compañía si no cumple la demanda. El objetivo es entonces maximizar la utilidad neta, definida como

$$\text{Utilidad neta} = \text{Utilidad total} - \text{Penalización total}$$

La utilidad total es $30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4$. Para calcular la penalización total, las restricciones de la demanda pueden escribirse como sigue

$$x_1 + s_1 = 800,\ x_2 + s_2 = 750,\ x_3 + s_3 = 600,\ x_4 + s_4 = 500,$$
$$x_j \geq 0, s_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

La nueva variable s_j representa la escasez en la demanda del producto j, y la penalización total se calcula como $15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4$. El modelo completo se escribe entonces como sigue

$$\text{Maximizar } z = 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 - (15s_1 + 20s_2 + 10s_3 + 8s_4)$$

sujeto a

$$.30x_1 + .30x_2 + .25x_3 + .15x_4 \leq 1000$$
$$.25x_1 + .35x_2 + .30x_3 + .10x_4 \leq 1000$$
$$.45x_1 + .50x_2 + .40x_3 + .22x_4 \leq 1000$$
$$.15x_1 + .15x_2 + .10x_3 + .05x_4 \leq 1000$$
$$x_1 + s_1 = 800, x_2 + s_2 = 750, x_3 + s_3 = 600, x_4 + s_4 = 500$$
$$x_j \geq 0, s_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

Solución:

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *amplEx2.4.txt)* es $z = \$64{,}625, x_1 = 800, x_2 = 750; x_3 = 387.5, x_4 = 500, s_1 = s_2 = s_4 = 0, s_3 = 212.5$. La solución satisface toda la demanda de ambos tipos de chamarra y los guantes. Una merma de 213 (redondeada desde 212.5) pantalones representará un costo de penalización de $213 \times \$10 = \$2130$.

Ejemplo 2.4-3 (Modelo de producción en inventario durante periodos múltiples)

Acme Manufacturing Company firmó un contrato para entregar 100, 250, 190, 140, 220 y 110 ventanas para casa durante los siguientes seis meses. El costo de producción (mano de obra, material y servicios) por ventana varía por periodo y se estima que será de \$50, \$45, \$55, \$52 y \$50 durante los próximos seis meses. Para aprovechar las fluctuaciones del costo de fabricación, Acme puede producir más ventanas de las necesarias en un mes dado y conservar las unidades adicionales para entregarlas en meses posteriores. Esto supondrá un costo de almacenamiento a

razón de $8 por ventana por mes, estimado en el inventario de fin de mes. Desarrolle un programa lineal para determinar el programa de producción óptimo.

Modelo matemático: Las variables del problema incluyen la cantidad de producción mensual y el inventario de fin de mes. Para que $i = 1, 2, \ldots, 6$, sean

$$x_i = \text{Cantidad de unidades producidas en el mes } i$$

$$I_i = \text{Unidades que quedan en el inventario de fin de mes } i$$

Las relaciones entre estas variables y la demanda mensual durante el horizonte de 6 meses aparecen representadas esquemáticamente en la figura 2.9. El sistema se inicia vacío ($I_0 = 0$).

El objetivo es minimizar el costo total de producción y del inventario de fin de mes.

$$\text{Costo de producción total} = 50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6$$

$$\text{Costo total del inventario (almacenamiento)} = 8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$$

Por consiguiente, la función objetivo es

$$\text{Minimizar } z = 50x_1 + 45x_2 + 55x_3 + 48x_4 + 52x_5 + 50x_6$$
$$+ 8(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$$

Las restricciones del problema se determinan directamente a partir de la representación que aparece en la figura 2.9. Para cada periodo tenemos la siguiente ecuación de balance:

$$\text{Inventario inicial} + \text{Cantidad de producción} - \text{Inventario final} = \text{Demanda}$$

La cual se traduce matemáticamente para los meses individuales como

$$\begin{aligned}
x_1 - I_1 &= 100 \quad \text{(Mes 1)}\\
I_1 + x_2 - I_2 &= 250 \quad \text{(Mes 2)}\\
I_2 + x_3 - I_3 &= 190 \quad \text{(Mes 3)}\\
I_3 + x_4 - I_4 &= 140 \quad \text{(Mes 4)}\\
I_4 + x_5 - I_5 &= 220 \quad \text{(Mes 5)}\\
I_5 + x_6 &= 110 \quad \text{(Mes 6)}
\end{aligned}$$

$$x_i, i = 1, 2, \ldots, 6, I_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 5$$

Observe que el inventario inicial, I_0, es cero. Además, en cualquier solución óptima, el inventario final I_6 será cero porque no es costeable incurrir en costos de almacenamiento adicionales innecesarios.

FIGURA 2.9

Representación esquemática del sistema de producción e inventario

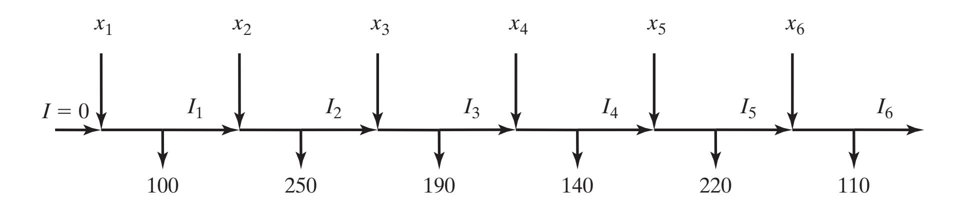
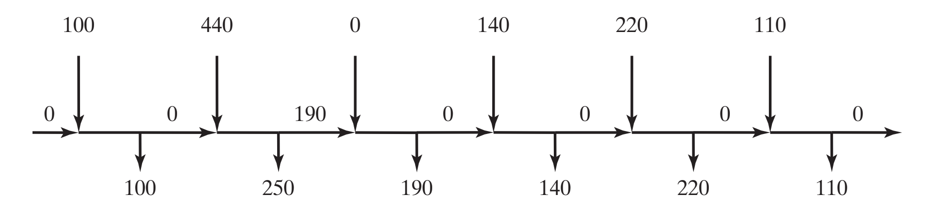


FIGURA 2.10
Solución óptima del problema de producción e inventario



Solución:

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *amplEx2.4-3.txt)* se resume en la figura 2.10. Muestra que la demanda de cada mes se satisface desde la misma producción del mes excepto en el mes 2 donde la cantidad producida (= 440 unidades) cubre la demanda de los meses 2 y 3. El costo total asociado es $z = \$49{,}980$.

Ejemplo 2.4-4 (Modelo de nivelación de la producción para múltiples periodos)

Una compañía está planeando fabricar un producto para marzo, abril, mayo y junio del próximo año. Las cantidades demandadas son 520, 720, 520 y 620 unidades, respectivamente. La compañía tiene una fuerza de trabajo permanente de 10 empleados pero puede satisfacer las necesidades de producción fluctuantes contratando y despidiendo trabajadores temporales. Los costos adicionales de contratar y despedir un trabajador temporal en cualquier mes son de \$200 y \$400, respectivamente. Un trabajador de planta produce 12 unidades por mes; y uno temporal, que no tiene la misma experiencia, produce 10. La compañía puede producir más de lo necesario en cualquier mes y guardar el excedente para el mes subsiguiente a un costo de retención de \$50 por unidad por mes. Desarrolle una política óptima de contratación y despido durante el horizonte de planificación de 4 meses.

Modelo matemático: Este modelo es semejante al del ejemplo 2.4-3 en el sentido de que cada mes tiene su producción, demanda e inventario final. La única excepción es el manejo de una fuerza de trabajo permanente comparada con una fuerza de trabajo temporal.

El trabajo realizado por los trabajadores permanentes se toma en cuenta restando las unidades que producen de la demanda mensual respectiva. La demanda restante se satisface entonces contratando y despidiendo trabajadores temporales. Por lo tanto

$$\text{Demanda restante para marzo} = 520 - 12 \times 10 = 400 \text{ unidades}$$
$$\text{Demanda restante para abril} = 720 - 12 \times 10 = 600 \text{ unidades}$$
$$\text{Demanda restante para mayo} = 520 - 12 \times 10 = 400 \text{ unidades}$$
$$\text{Demanda restante para junio} = 620 - 12 \times 10 = 500 \text{ unidades}$$

Las variables del modelo para el mes i se definen como sigue

x_i = Cantidad neta de trabajadores temporales al inicio del mes i *después* de cualquier contratación o despido

S_i = Cantidad de trabajadores temporales contratados o despedidos al inicio del mes i

I_i = Unidades del inventario final para el mes i

Por definición, x_i e I_i son no negativas, en tanto que S_i es *irrestricta en cuanto a signo* porque es igual a la cantidad de trabajadores contratados o despedidos en el mes *i*. Éste es el primer caso en este capítulo del uso de una variable irrestricta. Como se verá en breve, se requiere una sustitución especial para permitir la contratación y despido en el modelo.

En este modelo, el desarrollo de la función objetivo requiere construir primero las restricciones. La cantidad de unidades producidas en el mes i por x_i trabajadores temporales es $10x_i$. Así pues, tenemos las siguientes restricciones del inventario:

$$
\begin{aligned}
10x_1 &= 400 + I_1 \quad \text{(Marzo)} \\
I_1 + 10x_2 &= 600 + I_2 \quad \text{(Abril)} \\
I_2 + 10x_3 &= 400 + I_3 \quad \text{(Mayo)} \\
I_3 + 10x_4 &= 500 \qquad\quad\ \ \text{(Junio)} \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0, I_1, I_2, I_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Para contratación y despido, la fuerza de trabajo temporal se inicia con x_1 trabajadores a principios de marzo. A principios de abril x_1 se ajustará (hacia arriba o hacia abajo) con S_2 trabajadores temporales para generar x_2. La misma idea se aplica a x_3 y x_4, lo que conduce a las siguientes ecuaciones de restricciones

$$
\begin{aligned}
&x_1 = S_1 \\
&x_2 = x_1 + S_2 \\
&x_3 = x_2 + S_3 \\
&x_4 = x_3 + S_4 \\
&S_1, S_2, S_3, S_4 \text{ Irrestrictas en cuanto a signo} \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

A continuación desarrollamos la función objetivo. La meta es minimizar el costo del inventario más el costo de contratación y despido. Como en el ejemplo 2.4-3.

$$\text{Costo de retención de inventario} = 50(I_1 + I_2 + I_3)$$

El modelado del costo de contratación y despido es un poco complicado. Dado que los costos de contratar y despedir a un trabajador temporal son de \$200 y \$400, respectivamente, tenemos

$$
\begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{contratación}\\ \text{y despido}\end{pmatrix} = 200 \begin{pmatrix}\text{Cantidad de trabajadores}\\ \text{temporales } \textit{contratados} \text{ al}\\ \text{principio de cada mes}\end{pmatrix} + 400 \begin{pmatrix}\text{Cantidad de trabajadores}\\ \text{temporales } \textit{despedidos} \text{ al}\\ \text{principio de cada mes}\end{pmatrix}
$$

Si la variable S_i es positiva, la contratación ocurre en el mes *i*. Si es negativa, entonces ocurre el despido. Esta valoración "cualitativa" se traduce matemáticamente aplicando la sustitución

$$S_i = S_i^- - S_i^+, \text{ donde } S_i^-, S_i^+ \geq 0$$

Ahora la variable irrestricta S_i es la diferencia entre las dos variables no negativas S_i^- y S_i^+. Podemos pensar en S_i^- como la cantidad de trabajadores temporales contratados, y en S_i^+ como la de despedidos. Por ejemplo, si $S_i^- = 5$ y $S_i^+ = 0$, entonces $S_i = 5 - 0 = +5$, lo que representa contratación. Si $S_i^- = 0$ y ${}_i^+ = 7$, entonces $S_i = 0 - 7 = -7$, lo que representa despido. En el primer caso, el costo de contratación correspondiente es $200S_i^- = 200 \times 5 = \$1000$, y en el segundo caso el costo de despido correspondiente es $400S_i^+ = 400 \times 7 = \$2800$.

La sustitución $S_i = S_i^- - S_i^+$ es la base para el desarrollo del costo de contratación y despido. Primero tenemos que responder una posible pregunta: ¿Qué pasa si tanto S_i^- y como S_i^+ son positivos? La respuesta es que esto no puede suceder porque implica tanto contratación como despido en el mismo mes. De manera interesante, la teoría de la PL (capítulo 7) nos dice que S_i^- y S_i^+ no pueden ser positivos al mismo tiempo, un resultado matemático confirmado por intuición.

Ahora podemos escribir el costo total de contratación y despido como

$$\text{Costo de contratación} = 200(S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^-)$$
$$\text{Costo de despido} = 400(S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+)$$

El modelo completo es

$$\text{Minimizar } z = 50(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) + 200(S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^-) + 400(S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+)$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 10x_1 &= 400 + I_1 \\ I_1 + 10x_2 &= 600 + I_2 \\ I_2 + 10x_3 &= 400 + I_3 \\ I_3 + 10x_4 &= 500 \\ x_1 &= S_1^- - S_1^+ \\ x_2 &= x_1 + S_2^- - S_2^+ \\ x_3 &= x_2 + S_3^- - S_3^+ \\ x_4 &= x_3 + S_4^- - S_4^+ \\ S_1^-, S_1^+, S_2^-, S_2^+, S_3^-, S_3^+, S_4^-, S_4^+ &\geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ I_1, I_2, I_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *amplEx2.4-4.txt)* es $z = \$19{,}500$, $x_1 = 50$, $x_2 = 50$, $x_3 = 45$, $x_4 = 45$, $S_1^- = 50$, $S_3^+ = 5$, $I_1 = 100$, $I_3 = 50$. Todas las demás variables son cero. La solución requiere contratar 50 trabajadores temporales en marzo ($S_1^- = 50$), y conservar la fuerza de trabajo permanente hasta mayo, cuando se despida a 5 trabajadores temporales ($S_3^+ = 5$). No se recomienda ninguna otra contratación o despido hasta finales de junio cuando, presuntamente, todos los trabajadores temporales serán despedidos. Esta solución requiere que se conserven 100 unidades de inventario hasta mayo, y 50 unidades hasta junio.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4B

1. AutoMate contrató a ToolCo para que abastezca sus tiendas de descuento automotrices con llaves inglesas y cinceles. La demanda semanal de AutoMate consiste en por lo menos 1500 llaves inglesas y 1200 cinceles. ToolCo no puede fabricar todas las unidades solicitadas con su capacidad actual de un turno y debe utilizar tiempo extra y posiblemente subcontratar a otras fábricas de herramientas. El resultado es un incremento del

costo de producción por unidad, como se muestra en la siguiente tabla. La demanda del mercado limita la proporción entre cinceles y llaves inglesas a por lo menos 2:1.

Herramienta	Tipo de producción	Intervalo de producción semanal (unidades)	Costo unitario ($)
Llaves inglesas	Regular	0–550	2.00
	Tiempo extra	551–800	2.80
	Subcontratación	801– ∞	3.00
Cinceles	Regular	0–620	2.10
	Tiempo extra	621–900	3.20
	Subcontratación	901– ∞	4.20

(a) Formule el problema como un programa lineal, y determine el programa de producción óptimo para cada herramienta.

(b) Explique por qué la validez del modelo depende del hecho de que el costo de producción unitario sea una función creciente de la cantidad producida.

(c) Resuelva el modelo aplicando AMPL, Solver o TORA.

2. En tres máquinas se procesan cuatro productos en secuencia. La siguiente tabla proporciona los datos pertinentes del problema:

		Tiempo de fabricación por unidad (h)				
Máquina	Costo por h ($)	*Producto 1*	*Producto 2*	*Producto 3*	*Producto 4*	Capacidad (h)
1	10	2	3	4	2	500
2	5	3	2	1	2	380
3	4	7	3	2	1	450
Precio de venta unitario ($)		75	70	55	45	

Formule el problema como un modelo de PL, y determine la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

*__3.__ Un fabricante produce tres modelos, I, II y III, de un producto determinado con las materias primas A y B. La siguiente tabla proporciona los datos del problema:

	Requerimientos por unidad			
Materia prima	*I*	*II*	*III*	Disponibilidad
A	2	3	5	4000
B	4	2	7	6000
Demanda mínima	200	200	150	
Precio por unidad ($)	30	20	50	

Las horas de trabajo por unidad del modelo I son dos veces las del II y tres veces las del III. Toda la fuerza de trabajo de la fábrica puede producir el equivalente a 1500 unidades del modelo 1. Los requerimientos del mercado especifican las proporciones 3:2:5 para la

producción de los tres modelos respectivos. Formule el problema como un programa lineal, y halle la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

4. La demanda de helado durante los tres meses de verano (junio, julio y agosto) en All-Flavor Parlor se estima en 500, 600 y 400 cartones de 20 galones, respectivamente. Dos mayoristas, 1 y 2, le surten helado a All-Flavors. Aunque los sabores de los dos proveedores son diferentes, son intercambiables. El máximo de cartones que cada proveedor puede surtir es de 400 por mes. Además, el precio de los dos proveedores cambia de un mes al siguiente, según la tabla:

	Precio por cartón en el mes de		
	Junio	*Julio*	*Agosto*
Proveedor 1	\$100	\$110	\$120
Proveedor 2	\$115	\$108	\$125

Para aprovechar la fluctuación del precio, All-Flavor puede comprar más de lo que necesita en un mes y guardar el excedente para satisfacer la demanda en un mes posterior. El costo de refrigerar un cartón de helado es de \$5 por mes. En la presente situación es realista suponer que el costo de refrigeración está en función de la cantidad de cartones promedio disponibles durante el mes. Desarrolle un modelo para determinar el programa óptimo de compra de helado a los dos proveedores, y determine la solución óptima con TORA, Solver o AMPL.

5. La demanda de un artículo durante los siguientes cuatro trimestres es de 300, 400 y 250 unidades, respectivamente. El precio por unidad es de \$20 en el primer trimestre y se incrementa \$2 cada trimestre en lo sucesivo. El proveedor no puede surtir más de 400 unidades en cualquier trimestre. Aunque podemos aprovechar los bajos precios en los primeros trimestres, se incurre en un costo de almacenamiento de \$3.50 por unidad de trimestre. Además, el máximo de unidades que puede conservar de un trimestre al siguiente no puede exceder de 100. Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de compra óptimo del artículo para satisfacer la demanda y determine la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

6. Se contrató a una compañía para que manufacturara dos productos, A y B, durante los meses de junio, julio y agosto. La capacidad de producción total (expresada en horas) varía mensualmente. La siguiente tabla proporciona los datos básicos de la situación:

	Junio	Julio	Agosto
Demanda de A (unidades)	500	5000	750
Demanda de B (unidades)	1000	1200	1200
Capacidad (h)	3000	3500	3000

Las tasas de producción por hora son .75 y 1 para los productos A y B, respectivamente. Se debe satisfacer toda la demanda; sin embargo, la de un mes posterior se puede satisfacer con la producción de uno anterior. Para cualquiera de los productos A y B guardados de un mes al siguiente, los costos de retención son de \$.90 y \$.75 por unidad, respectivamente. Los costos de producción unitarios de los dos productos, A y B, son de \$30 y \$28, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de producción óptimo para los dos productos y determine la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

*7. El proceso de fabricación de un producto consta de dos operaciones sucesivas, I y II. La siguiente tabla proporciona los datos pertinentes durante los meses de junio, julio y agosto.

	Junio	Julio	Agosto
Demanda del producto terminado (unidades)	500	450	600
Capacidad de la operación I (h)	800	700	550
Capacidad de la operación II (h)	1000	850	700

Producir una unidad del producto implica .6 horas en la operación I, más .8 horas en la operación II. Se permite la sobreproducción o el producto terminado en parte (en la operación I), o el producto terminado (en la operación II) en cualquier mes para su uso en un mes posterior. Los siguientes costos de retención correspondientes son de $.20 y $.40 por unidad por mes. El costo de producción varía por operación y por mes. Para la operación 1, el costo de producción unitario es de $10, $12 y $11 en junio, julio y agosto, respectivamente. Para la operación 2, el costo correspondiente de producción unitario es de $15, $18 y $16. Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de producción óptimo para las dos operaciones en el horizonte de 3 meses, y determine la solución óptima con AMPL, Solver o TORA.

8. En dos máquinas se fabrican dos productos en secuencia. El tiempo disponible en cada máquina es de 8 horas por día y puede incrementarse hasta 4 horas de tiempo extra, si es necesario, a un costo adicional de $100 por hora. La siguiente tabla proporciona la tasa de producción en las dos máquinas, así como el precio por unidad de los dos productos.

	Tasa de producción (unidades/h)	
	Producto 1	*Producto 2*
Máquina 1	5	5
Máquina 2	8	4
Precio por unidad ($)	110	118

Desarrolle un modelo de PL para determinar el programa de producción óptimo y el uso recomendado de tiempo extra, si lo hay. Resuelva el problema con AMPL, Solver o TORA.

2.4.3 Planificación de la mano de obra

Las fluctuaciones de la fuerza de trabajo para satisfacer la demanda variable con el tiempo pueden lograrse mediante el proceso de contratación y despido, como se demostró en el ejemplo 2.4-4. Hay situaciones en las que el efecto de las fluctuaciones de la demanda puede ser "absorbido" ajustando las horas de inicio y terminación de un turno de trabajo. Por ejemplo, en lugar de seguir las horas de inicio de los tres turnos de 8 horas tradicionales a las 8:00 A.M., 3:00 P.M. y 11:00 P.M., podemos utilizar turnos de 8 horas con traslapes en los que la hora de inicio de cada uno se establece en respuesta al aumento o reducción de la demanda.

La idea de redefinir el inicio de un turno para absorber la fluctuación de la demanda también puede extenderse a otros ambientes de operación. El ejemplo 2.4-5 hace referencia a la determinación de la cantidad mínima de autobuses que se requieren para satisfacer las necesidades de transporte durante las horas pico y normales.

Aplicación de la vida real. Planificación del personal de ventas por teléfono en Qantas Airways

La línea aérea australiana Qantas opera sus oficinas de reservaciones principales de 7:00 a 22:00, con turnos de 6 horas que comienzan a diferentes horas del día. Qantas utilizó la PL (con el análisis de colas integrado) para proveer de personal a su oficina principal de ventas por teléfono de manera eficiente y proporcionar al mismo tiempo un servicio conveniente a sus clientes. El estudio, realizado a finales de la década de 1970, permitió ahorros anuales de más de 200,000 dólares australianos por año. El estudio se detalla en el caso 15, capítulo 26, en el sitio Web.

Ejemplo 2.4-5 (Modelo de horarios de autobuses)

La ciudad de Progreso estudia la factibilidad de utilizar un sistema de autobuses de transportación masiva para reducir el tráfico urbano. El estudio busca la cantidad mínima de autobuses que satisfaga las necesidades de transporte. Después de reunir la información necesaria, el ingeniero de tránsito observó que la cantidad mínima de autobuses que se requería fluctuaba según la hora del día, y dicha cantidad se podía representar de forma aproximada por valores constantes durante intervalos de 4 horas sucesivos. La figura 2.11 resume los hallazgos del ingeniero. Para realizar el mantenimiento diario requerido, cada autobús puede operar sólo 8 horas continuas al día.

Modelo matemático: Las variables del modelo son la cantidad de autobuses necesarios en cada turno, y las restricciones tienen que ver con la satisfacción de la demanda. El objetivo es minimizar la cantidad de autobuses en operación.

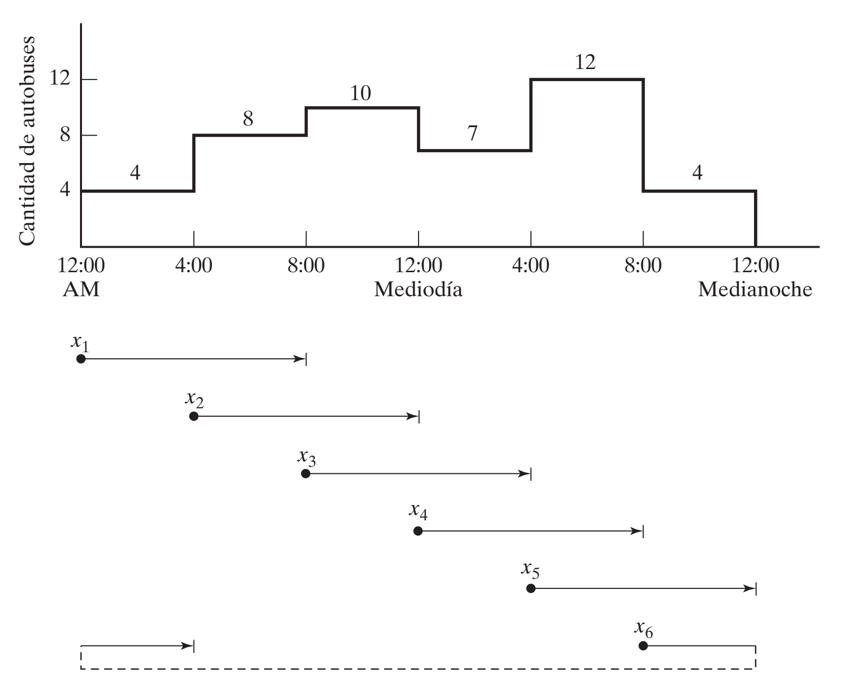


FIGURA 2.11

Cantidad de autobuses en función de la hora del día

La definición expresada de las variables es un tanto “imprecisa”. Sabemos que cada autobús circulará durante 8 horas consecutivas, pero no sabemos cuándo debe iniciar un turno. Si seguimos un horario normal de tres turnos (8:01 A.M. a 4:00 P.M, 4:01 P.M. a 12:00 medianoche, y 12:01 A.M. a 8:00 A.M.) y suponemos que x_1, x_2 y x_3 son las cantidades de autobuses que inician en el primero, segundo y tercer turnos, en la figura 2.11 podemos ver que $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 12$ y $x_3 \geq 8$. La cantidad mínima correspondiente de autobuses diarios es $x_1 + x_2 + x_3 = 10 + 12 + 8 = 30$.

La solución dada es aceptable sólo si los turnos *deben* coincidir con el horario de tres turnos normal. Sin embargo, una ventaja podría ser que el proceso de optimización eligiera la “mejor” hora de inicio de un turno. Una forma razonable de hacerlo es permitir que se inicie un turno cada 4 horas. La parte inferior de la figura ilustra esta idea con turnos de 8 horas traslapados que se inician a las 12:01 A.M., 4:00 A.M, 8:01 A.M., 12:01 P.M. y 8:01 P.M. Así pues, las variables se definen como

x_1 = cantidad de autobuses que comienzan a las 12:01 A.M.

x_2 = cantidad de autobuses que comienzan a las 4:01 A.M.

x_3 = cantidad de autobuses que comienzan a las 8:01 A.M.

x_4 = cantidad de autobuses que comienzan a las 12:01 P.M.

x_5 = cantidad de autobuses que comienzan a las 4:01 P.M.

x_6 = cantidad de autobuses que comienzan a las 8:01 P.M.

En la figura 2.11 podemos ver que debido al traslape de los turnos, la cantidad de autobuses durante los periodos sucesivos de 4 horas se calcula como sigue:

Espacios de tiempo	Cantidad de autobuses en operación
12:01 A.M. a 4:00 A.M.	$x_1 + x_6$
4:01 A.M. a 8:00 A.M.	$x_1 + x_2$
8:01 A.M. a 12:00 del día	$x_2 + x_3$
12:01 P.M. a 4:00 P.M.	$x_3 + x_4$
4:01 P.M. a 8:00 P.M.	$x_4 + x_5$
8:01 A.M. a 12:00 A.M.	$x_5 + x_6$

El modelo completo se escribe entonces como sigue

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad + x_6 &\geq 4 \quad (\text{12:01 A.M.-4:00 A.M.})\\
x_1 + x_2 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad &\geq 8 \quad (\text{4:01 A.M.-8:00 A.M.})\\
x_2 + x_3 + \quad\quad\quad\quad\quad &\geq 10 \quad (\text{8:01 A.M.-12:00 del día})\\
x_3 + x_4 + \quad\quad\quad &\geq 7 \quad (\text{12:01 P.M.-4:00 P.M.})\\
x_4 + x_5 \quad\quad &\geq 12 \quad (\text{4:01 P.M.-8:00 P.M.})\\
x_5 + x_6 &\geq 4 \quad (\text{8:01 P.M.-12:00 P.M.})\\
x_j \geq 0,\ j &= 1, 2, \ldots, 6
\end{aligned}$$

Solución:

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *amplEx2.4-5.xls*, *solverEx2.4-5.xls*, o *toraEx2.4-5.txt*) requiere programar 26 autobuses (comparados con 30 cuando se utilizan los tres turnos tradicionales). El horario requiere $x_1 = 4$ autobuses que empiecen a las 12:01 A.M., $x_2 = 10$ a las 4:01 A.M., $x_4 = 8$ a las 12:01 P.M. y $x_5 = 4$ a las 4:01 P.M. (*Nota:* El archivo *solverEx2.4-5.xls* da la solución óptima alternativa $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 6$, y $x_6 = 2$, con $z = 26$.)

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4C

*__1.__ En el ejemplo de los horarios de autobuses suponga que éstos pueden operar turnos de 8 o de 12 horas. Si un autobús opera durante 12 horas, al conductor se le pagan horas extra a 150% del salario por hora regular. ¿Recomienda utilizar turnos de 12 horas? Resuelva el nuevo modelo utilizando AMPL, Solver o TORA.

2. Un hospital emplea voluntarios para atender la recepción entre las 8:00 A.M. y las 10:00 P.M. Cada voluntario trabaja tres horas consecutivas, excepto los que entran a las 8:00 P.M., que sólo trabajan 2 horas. Una aproximación a la necesidad mínima de voluntarios es por medio de una función escalonada en intervalos de dos horas, los cuales se inician a las 8:00 A.M. como 4, 6, 8, 6, 4, 6 y 8. Como la mayoría de los voluntarios son pensionados, están dispuestos a ofrecer sus servicios a cualquier hora del día (8:00 A.M. a 10:00 P.M.). Sin embargo, como la mayoría de las instituciones caritativas compiten por sus servicios, la cantidad requerida debe mantenerse lo más baja posible. Determine un programa óptimo (utilice AMPL, Solver o TORA) de la hora de inicio de los voluntarios.

3. En el problema 2, suponga que ningún voluntario iniciará al mediodía o a una hora en que se impliquen el almuerzo y la comida. Desarrolle la PL, y determine el horario óptimo utilizando AMPL, Solver o TORA.

4. En una compañía camionera de cargas pequeñas, los andenes de la terminal incluyen trabajadores *eventuales* contratados temporalmente para que se encarguen de las cargas pico. En el andén de Omaha, Nebraska, la demanda mínima de trabajadores eventuales durante los 7 días de la semana (a partir del lunes) es de 20, 14, 10, 15, 18, 10 y 12 trabajadores. Cada trabajador es contratado para que labore 5 días consecutivos. Desarrolle el modelo de PL y determine una práctica de contratación semanal óptima de trabajadores eventuales para la compañía utilizando AMPL, Solver o TORA.

*__5.__ La mayoría de los departamentos académicos de las universidades contratan estudiantes para que realicen encargos de oficina. La necesidad de ese servicio fluctúa durante las horas hábiles (8:00 A.M. a 5:00 P.M.). En un departamento, la cantidad mínima de estudiantes requeridos es de 2 entre las 8:00 A.M. y las 10:00 A.M.; 3 entre las 10:01 A.M. y las 11:00 A.M.; 4 entre las 11:01 A.M. y la 1:00 P.M., y 3 entre la 1:01 P.M. y las 5:00 P.M. A cada estudiante se le asignan 3 horas consecutivas (excepto a los que inician a las 3:01 P.M. que trabajan 2 horas, y a los que inician a las 4:01 que trabajan 1 hora). Debido al horario flexible de los estudiantes, por lo común pueden iniciar a cualquier hora durante el día de trabajo, excepto a la hora del almuerzo (12:00 del día). Desarrolle el modelo de PL y determine un horario que especifique la hora del día y la cantidad de estudiantes que se reportan al trabajo. Use AMPL, Solver o TORA para determinar la solución.

6. Una gran tienda de departamentos opera 7 días a la semana. El gerente estima que la cantidad mínima de vendedores requeridos para proporcionar un servicio ágil es de 12 el lunes, 18 el martes, 20 el miércoles, 28 el jueves, 32 el viernes, y 40 para el sábado y el domingo. Cada vendedor trabaja 5 días a la semana, con los dos días de descanso escalonados a lo largo de la semana. Por ejemplo, si 10 personas inician el lunes, 2 pueden tomar su día de descanso el martes o el miércoles; 5 el miércoles y jueves, y 3 el sábado y domingo. ¿Cuántos vendedores se deben contratar, y cómo se distribuirán sus días de descanso? Use AMPL, Solver o TORA para determinar la solución.

2.4.4 Planificación de desarrollo urbano[6]

La planificación urbana implica atender tres áreas generales: (1) construcción de nuevos desarrollos de vivienda; (2) remodelación de viviendas deterioradas y áreas recreativas, y (3) planificación de edificios públicos (escuelas y aeropuertos). Las restricciones asociadas con estos proyectos son tanto económicas (terreno, construcción y financiamiento) como sociales (escuelas, parques y nivel de ingreso). Los objetivos en la planificación urbana varían. En los nuevos desarrollos de vivienda, la utilidad suele ser el motivo para emprender el proyecto. En las dos categorías restantes los objetivos implican consideraciones sociales, políticas, económicas y culturales. De hecho, en un caso divulgado en 2004, el alcalde de una ciudad en Ohio deseaba demoler un área vieja de la ciudad para construir departamentos de lujo. El motivo era incrementar la recaudación de impuestos para aliviar la escasez de presupuesto. El ejemplo de esta sección se diseñó con base en el caso de Ohio.

Ejemplo 2.4-6 (Modelo de renovación urbana)

La ciudad de Erstville enfrenta un grave recorte de presupuesto. Buscando una solución a largo plazo para mejorar la base tributaria, el consejo de la ciudad propone la demolición de un área de viviendas dentro de la ciudad, y su reemplazo con un moderno desarrollo.

El proyecto implica dos fases: (1) demolición de casas populares para obtener el terreno para el nuevo desarrollo, y (2) construcción del nuevo desarrollo. A continuación, un resumen de la situación.

1. Se pueden demoler 300 casas populares. Cada casa ocupa un lote de .25 acres. El costo de demoler una casa es de $2000.
2. Los tamaños de los lotes para construir casas unifamiliares, dobles, triples y cuádruples, son de .18, .28, .4 y .5 acres, respectivamente. Las calles, los espacios abiertos y el área para la instalación de servicios, ocupan 15% del área disponible.
3. En el nuevo desarrollo, las unidades triples y cuádruples ocupan por lo menos 25% del total. Las unidades sencillas deben ser al menos 20% de todas las unidades, y las unidades dobles deben ocupar un mínimo de 10%.
4. El impuesto por unidad aplicado a las unidades sencillas, dobles, triples y cuádruples es de $1000, $1900, $2700 y $3400, respectivamente.
5. El costo de construcción por unidad de las casas sencillas, dobles, triples y cuádruples es de $50,000, $70,000, $130,000 y $160,000, respectivamente. El financiamiento a través de un banco local está limitado a $15 millones.

¿Cuántas unidades de cada tipo se deben construir para maximizar la recaudación de impuestos?

Modelo matemático: Además de determinar cuántas unidades se construirán de cada tipo de vivienda, también necesitamos decidir cuántas casas se deben demoler para crear el espacio para el nuevo desarrollo. Por lo tanto, las variables del problema se definen como sigue:

$$x_1 = \text{Cantidad de casas unifamiliares}$$

$$x_2 = \text{Cantidad de casas dobles}$$

[6]Esta sección está basada en Laidlaw (1972)

x_3 = Cantidad de casas triples

x_4 = Cantidad de casas cuádruples

x_5 = Cantidad de casas viejas a demoler

El objetivo es maximizar la recaudación total de impuestos de los cuatro tipos de casas, es decir,

$$\text{Maximizar } z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$$

La primera restricción del problema es la disponibilidad del terreno.

$$\begin{pmatrix}\text{Acres utilizados para la} \\ \text{construcción de casas nuevas}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Área en acres} \\ \text{neta disponible}\end{pmatrix}$$

A partir de los datos del problema, tenemos

$$\text{Acres necesarios para casas nuevas} = .18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4$$

Para determinar la cantidad de acres disponibles, cada casa demolida ocupa un lote de .25 acres, es decir $.25x_5$ acres. Considerando 15% para espacios abiertos, calles y áreas para servicios, la cantidad neta de acres disponibles es de $.85(.25x_5) = .2125x_5$. La restricción resultante es

$$.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 \leq .2125x_5$$

o bien

$$.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 - .2125x_5 \leq 0$$

La cantidad de casas demolidas no puede ser superior a 300, lo cual se expresa como

$$x_5 \leq 300$$

A continuación agregamos las restricciones que limitan la cantidad de casas de cada tipo

$$(\text{Cantidad de casas unifamiliares}) \geq (20\% \text{ de todas las casas})$$
$$(\text{Cantidad de casas dobles}) \geq (10\% \text{ de todas las casas})$$
$$(\text{Cantidad de casas triples y cuádruples}) \geq (25\% \text{ de todas las casas})$$

Estas restricciones se expresan matemáticamente como sigue

$$x_1 \geq .2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$
$$x_2 \geq .1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$
$$x_3 + x_4 \geq .25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

La única restricción restante se refiere a que el costo de demolición y construcción se mantenga dentro del presupuesto permisible, es decir,

$$(\text{Costo de construcción y demolición}) \leq (\text{Presupuesto disponible})$$

Expresando todos los costos en miles de dólares, tenemos

$$(50x_1 + 70x_2 + 130x_3 + 160x_4) + 2x_5 \leq 15000$$

El modelo completo se escribe entonces como sigue

$$\text{Maximizar } z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
.18x_1 + .28x_2 + .4x_3 + .5x_4 - .2125x_5 &\leq 0 \\
x_5 &\leq 300 \\
-.8x_1 + .2x_2 + .2x_3 + .2x_4 \qquad &\leq 0 \\
.1x_1 - .9x_2 + .1x_3 + .1x_4 \qquad &\leq 0 \\
.25x_1 + .25x_2 - .75x_3 - .75x_4 \qquad &\leq 0 \\
50x_1 + 70x_2 + 130x_3 + 160x_4 + 2x_5 &\leq 15000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

Solución:

La solución óptima (obtenida utilizando el archivo *amplEX2.4-6.txt* o *solverEx2.4-6.xls*) es:

Recaudación total de impuestos = \$343,965
Cantidad de casas unifamiliares = x_1 = 35.83 ≃ 36 casas
Cantidad de casas dobles = x_2 = 98.53 ≃ 99 casas
Cantidad de casas triples = x_3 = 44.79 ≃ 45 casas
Cantidad de casas cuádruples = x_4 = 0 unidades
Cantidad de casas demolidas = x_5 = 244.49 ≃ 245 casas

Comentarios. La programación lineal no garantiza una solución entera de manera automática, y ésta es la razón de redondear los valores continuos al entero más próximo. La solución redondeada requiere que se construyan 180 (= 36 + 99 + 45) casas y que se demuelan 245 casas viejas, lo cual representa \$345,600 en impuestos. Tenga en cuenta, sin embargo, que quizá la solución redondeada no sea factible. De hecho, la solución redondeada actual viola la restricción del presupuesto por \$70,000 (¡compruébelo!). No obstante, la solución entera óptima verdadera (con los algoritmos que se presentan en el capítulo 9) es $x_1 = 36, x_2 = 98, x_3 = 45, x_4 = 0$, y $x_5 = 245$ con z = \$343.700. Observe con cuidado que la solución redondeada produce un mejor valor objetivo, lo que parece contradictorio. La razón es que la solución redondeada requiere que se produzca una casa doble adicional, lo cual es factible sólo si al presupuesto se le aumentan \$70,000.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4D

1. Una inmobiliaria está desarrollando un área para renta de viviendas y locales comerciales. El área de viviendas se compone de departamentos-estudio, casas dúplex y unifamiliares. Se estima que la demanda máxima por parte de los arrendatarios potenciales es de 500 departamentos-estudio, 300 casas dúplex y 250 casas unifamiliares, pero la cantidad de casas dúplex debe ser igual como mínimo al 50% de la cantidad de departamentos-estudio y casas unifamiliares. El espacio para locales comerciales es proporcional a la cantidad de casas en una relación de por lo menos 10 pies^2, 15 pies^2 y 18 pies^2 para departamentos-estudio, casas dúplex y casas unifamiliares, respectivamente. Sin embargo, la disponibilidad del terreno limita el espacio para locales comerciales a no más de 10,000 pies^2. La renta mensual se estima en \$600, \$750 y \$1200 para departamentos-estudio, casas dúplex y casas unifamiliares, en ese orden. La renta de los locales comerciales es de \$100/pie^2. Desarrolle un modelo de PL para determinar el área óptima para locales comerciales y la cantidad de casas, y determine la solución con AMPL, Solver o TORA.
2. El concejo de la ciudad de Fayetteville está en el proceso de aprobar la construcción de un nuevo centro de convenciones de 200,000 pies^2. Se han propuesto dos sitios, y ambos

requieren ejercer la ley de "dominio inminente", o de expropiación, para adquirir la propiedad. La siguiente tabla presenta los datos de las propiedades propuestas (contiguas) en ambos sitios, junto con el costo de adquisición.

	Sitio 1		Sitio 2	
Propiedad	*Área* (1000 pies^2)	*Costo* ($1000)	*Área* (1000 pies^2)	*Costo* ($1000)
1	20	1000	80	2800
2	50	2100	60	1900
3	50	2350	50	2800
4	30	1850	70	2500
5	60	2950		

Se permite la adquisición parcial de la propiedad. Se debe adquirir 75% como mínimo de la propiedad 4 si se selecciona el sitio 1, y por lo menos 50% de la propiedad 3 si se selecciona el sitio 2. Aunque la propiedad del sitio 1 es más cara (por pie^2), el costo de construcción es menor que en el sitio 2 porque la infraestructura está en mejores condiciones. El costo de construcción es de $25 millones en el sitio 1, y de $27 millones en el sitio 2. ¿Cuál sitio debe seleccionarse y qué propiedades deben adquirirse? Halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

***3.** Una ciudad emprenderá cuatro proyectos de renovación de vivienda urbana durante los próximos 5 años. Cada proyecto tiene distinto año de inicio y duración diferente. La siguiente tabla muestra los datos básicos de la situación:

	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Costo (millones de $)	Ingreso anual (millones $)
Proyecto 1	Inicio		Terminación			5.0	.05
Proyecto 2		Inicio			Terminación	8.0	.07
Proyecto 3	Inicio				Terminación	15.0	.15
Proyecto 4			Inicio	Terminación		1.2	.02
Presupuesto (millones $)	3.0	6.0	7.0	7.0	7.0		

Los proyectos 1 y 4 deben terminarse del todo dentro de su tiempo estipulado. Los otros dos proyectos pueden terminarse parcialmente de ser necesario, siempre y cuando no excedan su presupuesto. Sin embargo, cada proyecto debe quedar por lo menos con un avance de 25%. Al final de cada año, los inquilinos ocupan de inmediato la sección terminada de un proyecto, y así se obtiene una cantidad proporcional de ingreso. Por ejemplo, si en el año 1 se completa 40% del proyecto y 60% en el año 3, el ingreso asociado para el horizonte de planeación a 5 años es de $.4 \times \$50{,}000$ (en el año 2) $+ .4 \times \$50{,}000$ (en el año 3) $+ (.4 + .6) \times \$50{,}000$ (en el año 4) $+ (.4 + .6) \times \$50{,}000$ (en el año 5) $= (4 \times .4 + 2 \times .6) \times \$50{,}000$. Desarrolle un modelo de PL para determinar el desarrollo de los proyectos que maximice el ingreso total durante la planeación a 5 años, y determine la solución con AMPL, Solver o TORA. Por sencillez, omita el valor del dinero en el tiempo.

4. La ciudad de Fayetteville va a iniciar un proyecto de renovación urbano que incluirá casas para personas de bajos y medianos ingresos, departamentos de lujo y viviendas populares. El proyecto también incluye una escuela primaria pública y locales comerciales. El tamaño de la escuela primaria (cantidad de salones de clase) es proporcional a la cantidad de alumnos, y el espacio para locales comerciales es proporcional a la cantidad de viviendas. La tabla siguiente proporciona los datos pertinentes de la situación:

	Bajos ingresos	Medianos ingresos	Altos ingresos	Viviendas populares	Salones de clase	Locales comerciales
Cantidad mínima de unidades	100	125	75	300		0
Cantidad máxima de unidades	200	190	260	600		25
Tamaño de lote por unidad (acres)	.05	.07	.03	.025	.045	.1
Cantidad promedio de alumnos por unidad	1.3	1.2	.5	1.4		
Demanda de espacio para locales comerciales por unidad (acres)	.023	.034	.046	.023	.034	
Ingreso anual por unidad ($)	7000	12,000	20,000	5000	—	15,000

La nueva escuela puede ocupar un espacio máximo de 2 acres con salones para un máximo de 25 alumnos por salón. El costo anual de operación por salón de clase es de $10,000. El proyecto se ubicará en un lote baldío de 50 acres propiedad de la ciudad. Adicionalmente, el proyecto puede utilizar una propiedad adyacente ocupada por 200 casas en ruinas que se demolerán, cada una de las cuales ocupa .25 acres. El costo de comprar y demoler una de estas casas es de $7000. El espacio abierto, las calles y lotes de estacionamiento consumen 15% del terreno total disponible.

Desarrolle un programa lineal para determinar el plan óptimo para el proyecto, y encuentre la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

5. Realco posee 800 acres de terreno rústico en un lago escénico en el corazón de las Montañas Ozark. Anteriormente, a los desarrollos nuevos alrededor del lago se les imponían pocas regulaciones, o ninguna. Ahora en las orillas del lago hay muchas casas de descanso, y fosas sépticas de las que la mayoría están instaladas de manera inadecuada. Al paso de los años, el escurrimiento de las fosas sépticas contaminó gravemente el agua. Para detener la degradación del lago, las autoridades del condado aprobaron reglamentos estrictos aplicables a todos los futuros desarrollos. (1) Sólo se pueden construir casas unifamiliares, dobles y triples, donde un mínimo de 50% del total de casas deben ser casas unifamiliares. (2) Para limitar la cantidad de fosas sépticas, se requieren tamaños de lotes mínimos de 2, 3 y 4 acres para las casas unifamiliares, dobles y triples, respectivamente. (3) Deben establecerse áreas recreativas de 1 acre a razón de una por cada 200 familias. (4) Para preservar la ecología del lago, no se puede extraer agua subterránea para las casas o jardines. El presidente de Realco está estudiando la posibilidad de desarrollar una propiedad de 800 acres. El nuevo desarrollo incluirá casas unifamiliares, dobles y triples. Se estima que 15% del área en acres se asignará a calles y áreas para servicios. Realco estima las ganancias producidas por las diferentes unidades de vivienda como sigue:

Unidad de viviendas	Unifamiliares	Dobles	Triples
Ganancia neta por unidad ($)	10,000	12,000	15,000

El costo de conectar el servicio del agua es proporcional a la cantidad de unidades construidas. Sin embargo, el condado cobra un mínimo de $100,000 para el proyecto. Adicionalmente, la expansión del sistema de agua por encima de su capacidad actual está limitada a 200,000 galones por día durante los periodos pico. Los siguientes datos resumen el costo de conexión del agua y el consumo, considerando una familia de tamaño

Unidad de viviendas	Unifamiliares	Dobles	Triples	De recreación
Costo de conexión del agua por unidad ($)	1000	1200	1400	800
Consumo de agua por unidad (gal./día)	400	600	840	450

promedio: Desarrolle un modelo de PL para determinar el plan óptimo para Realco y determine la solución con AMPL, Solver o TORA.

6. Considere el modelo de Realco del problema 5. Suponga que se pueden adquirir 100 acres más por $450,000, los cuales incrementarán el área total a 900 acres. ¿Es rentable para Realco este negocio?

2.4.5 Mezcla y refinación

Varias aplicaciones de PL tienen que ver con la mezcla de diferentes materiales para fabricar productos que satisfagan ciertas especificaciones, al mismo tiempo que se minimiza el costo y se maximiza la utilidad. Los materiales pueden ser minerales metálicos, chatarras, productos químicos o petróleos crudos, y los productos pueden ser lingotes de metal, pinturas o gasolina de varios grados. Esta sección presenta un modelo (simplificado) de refinación de petróleo. El proceso se inicia con la refinación de petróleo crudo para crear reservas y luego mezclarlas para producir gasolina. La gasolina debe satisfacer ciertas especificaciones de calidad (como el octanaje). Además, los límites de las capacidades de refinación y la demanda afectan directamente el nivel de producción de los diferentes grados de gasolina. Un objetivo del modelo es determinar la mezcla óptima de producción de gasolina que maximice una función de utilidad adecuada. En algunos casos la meta es minimizar una función de costo.

Ejemplo 2.4-7 (Refinación de petróleo crudo y mezcla de gasolinas)

La compañía Shale Oil, localizada en la isla de Aruba, produce diariamente 1,500,000 barriles de petróleo crudo. Los productos finales de la refinería incluyen tres tipos de gasolina sin plomo con diferentes octanajes (ON, por sus siglas en inglés): gasolina regular con ON = 87; premium con ON = 89, y súper con ON = 92. El proceso de refinación comprende tres etapas: (1) una torre de destilación que produce una carga de alimentación (ON = 82) a razón de .2 barriles por barril de petróleo crudo; (2) una unidad de desintegración que produce gasolina cruda (ON = 98) utilizando una parte de la carga de alimentación producida por la torre de destilación a razón de 5 barriles por barril por carga de alimentación, y (3) una unidad mezcladora que mezcla la gasolina cruda proveniente de la unidad de desintegración y la carga de destilación proveniente de la torre de destilación. La compañía estima que la utilidad neta por barril de los tres tipos de gasolina deberá ser de $6.70, $7.20 y $8.10, respectivamente. La capacidad de la unidad de desintegración es de 200,000 barriles de carga al día. La demanda de gasolinas regular, premium y súper es de 50,000, 30,000 y 40,000 barriles, respectivamente, por día. Desarrolle un modelo para determinar el programa de producción óptimo para la refinería.

Modelo matemático: La figura 2.12 resume los elementos del modelo. Las variables pueden definirse en función de dos corrientes de entrada a la unidad de desintegración (carga de alimentación y gasolina desintegrada) y los tres productos finales. Sea

x_{ij} = cantidad de barriles al día a producir con materia prima obtenida del proceso i utilizada para mezclar el producto final j, $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$

Aplicando esta definición, tenemos

$$\text{Producción diaria de gasolina regular} = x_{11} + x_{21} \text{ barriles/día}$$

$$\text{Producción diaria de gasolina premium} = x_{12} + x_{22} \text{ barriles/día}$$

$$\text{Producción diaria de gasolina súper} = x_{13} + x_{23} \text{ barriles/día}$$

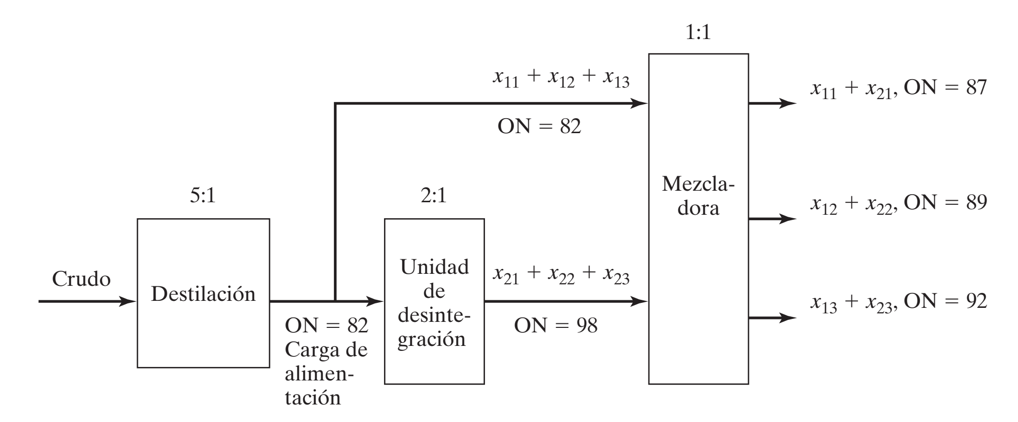


FIGURA 2.12

Flujo del producto en el problema de la refinería

$$\begin{pmatrix}\text{Producción diaria de}\\ \text{la unidad mezcladora}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Producción diaria de}\\ \text{gasolina regular}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Producción diaria de}\\ \text{gasolina premium}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Producción diaria}\\ \text{de gasolina súper}\end{pmatrix}$$

$$= (x_{11} + x_{21}) + (x_{12} + x_{22}) + (x_{13} + x_{23})\text{ barriles/día}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Carga de alimentación}\\ \text{diaria a la mezcladora}\end{pmatrix} = x_{11} + x_{12} + x_{13}\text{ barriles/día}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Alimentación diaria de la unidad}\\ \text{de desintegración a la mezcladora}\end{pmatrix} = x_{21} + x_{22} + x_{23}\text{ barriles/día}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Carga de alimentación diaria}\\ \text{a la unidad de desintegración}\end{pmatrix} = 2(x_{21} + x_{22} + x_{23})\text{ barriles/día}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Petróleo crudo diario}\\ \text{procesado en la refinería}\end{pmatrix} = 5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 10(x_{21} + x_{22} + x_{23})\text{ barriles/día}$$

El objetivo del modelo es maximizar la utilidad total producida por la venta de los tres grados de gasolina. De acuerdo con las definiciones dadas antes, obtenemos

$$\text{Maximizar } z = 6.70(x_{11} + x_{21}) + 7.20(x_{12} + x_{22}) + 8.10(x_{13} + x_{23})$$

Las restricciones del problema se desarrollan como sigue:

1. *El suministro diario de petróleo crudo no debe exceder de 1,500,000 barriles/día:*

$$5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 10(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 1{,}500{,}000$$

2. *La capacidad de entrada a la unidad de desintegración no debe exceder 200,000 barriles/día:*

$$2(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 200{,}000$$

3. *La demanda diaria de gasolina regular no debe exceder de 50,000 barriles:*

$$x_{11} + x_{21} \leq 50{,}000$$

4. *La demanda diaria de gasolina premium no debe exceder de 30,000 barriles:*

$$x_{12} + x_{22} \leq 30{,}000$$

5. *La demanda diaria de gasolina súper no debe exceder de 40,000 barriles:*

$$x_{13} + x_{23} \leq 40{,}000$$

6. *El octanaje (ON) de la gasolina regular debe ser por lo menos de 87.*

La cantidad de octanos de una gasolina es el promedio ponderado del número de octanos de las corrientes de entrada utilizadas en el proceso de mezcla, y se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Octanaje}\\ \text{promedio}\\ \text{de la}\\ \text{gasolina regular}\end{pmatrix} = \frac{\begin{matrix}\text{Octanaje}\\ \text{de la carga}\\ \text{de alimentación}\end{matrix} \times \begin{matrix}\text{Carga de}\\ \text{alimentación}\\ \text{barriles/día}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Octanaje en la}\\ \text{unidad de}\\ \text{desintegración}\end{matrix} \times \begin{matrix}\text{Unidad de}\\ \text{desintegración}\\ \text{barriles/día}\end{matrix}}{\text{Total de barriles por día de gasolina regular}}$$

$$= \frac{82x_{11} + 98x_{21}}{x_{11} + x_{21}}$$

Por lo tanto, la restricción del octanaje para la gasolina regular es

$$\frac{82x_{11} + 98x_{21}}{x_{11} + x_{21}} \geq 87$$

La restricción se expresa linealmente como

$$82x_{11} + 98x_{21} \geq 87(x_{11} + x_{21})$$

7. *El octanaje de la gasolina premium es mínimo de 89:*

$$\frac{82x_{12} + 98x_{22}}{x_{12} + x_{22}} \geq 89$$

el cual se expresa linealmente como

$$82x_{12} + 98x_{22} \geq 89(x_{12} + x_{22})$$

8. *El octanaje de la gasolina súper es mínimo de 92:*

$$\frac{82x_{13} + 98x_{23}}{x_{13} + x_{23}} \geq 92$$

o bien

$$82x_{13} + 98x_{23} \geq 92(x_{13} + x_{23})$$

De este modo, el modelo completo se resume como

$$\text{Maximizar } z = 6.70(x_{11} + x_{21}) + 7.20(x_{12} + x_{22}) + 8.10(x_{13} + x_{23})$$

sujeto a

$$5(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 10(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 1{,}500{,}000$$

$$2(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \leq 200{,}000$$

$$x_{11} + x_{21} \leq 50{,}000$$
$$x_{12} + x_{22} \leq 30{,}000$$
$$x_{13} + x_{23} \leq 40{,}000$$
$$82x_{11} + 98x_{21} \geq 87(x_{11} + x_{21})$$
$$82x_{12} + 98x_{22} \geq 89(x_{12} + x_{22})$$
$$82x_{13} + 98x_{23} \geq 92(x_{13} + x_{23})$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$

Las tres últimas restricciones pueden simplificarse para producir un lado derecho constante.

Solución:

La solución óptima (obtenida utilizando los archivos *toraEx2.4-7.txt* o *amplEx2.4.7.txt*) es $z = 875{,}000$, $x_{11} = 34{,}375, x_{21} = 15{,}625, x_{12} = 16{,}875, x_{22} = 13{,}125, x_{13} = 15{,}000, x_{23} = 25{,}000$. Esto se traduce a

Utilidad diaria = $875,000
Cantidad diaria de gasolina regular = $x_{11} + x_{21} = 34{,}375 + 13{,}125 = 30{,}000$ barriles/día
Cantidad diaria de gasolina premium = $x_{12} + x_{22} = 16{,}875 + 13{,}125 = 30{,}000$ barriles/día
Cantidad diaria de gasolina súper = $x_{13} + x_{23} = 15{,}000 + 25{,}000 = 40{,}000$ barriles/día

La solución muestra que la producción de gasolina regular está 20,000 barriles/día lejos de satisfacer la demanda máxima. La demanda de los productos restantes sí se satisface.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4E

1. Hi-V produce tres tipos de jugos enlatados, *A, B* y *C,* utilizando fresas, uvas y manzanas frescas. El abasto diario se limita a 200 toneladas de fresas, 100 toneladas de uvas y 150 toneladas de manzanas. El costo por tonelada de fresas, uvas y manzanas es de $200, $100 y $90, respectivamente. Cada tonelada rinde 1500 lb de jugo de fresa, 1200 lb de jugo de uva, y 1000 lb de jugo de manzana. La bebida *A* es una mezcla de 1:1 de jugo de fresa y jugo de manzana. La bebida *B* es una mezcla de 1:1:2 de jugo de fresa, jugo de uva y jugo de manzana. La bebida *C* es una mezcla de 2:3 de jugo de uva y jugo de manzana. Todas las bebidas se envasan en latas de 16 oz. (1 lb). El precio por lata es de $1.15, $1.25 y $1.20 de las bebidas *A*, *B* y *C*. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima de las tres bebidas, y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

*__2.__ Una ferretería vende bolsas de tornillos, pernos, tuercas y rondanas. Los tornillos vienen en cajas de 100 lb y cuestan $110 cada caja; los pernos vienen en cajas de 100 lb y cuestan $150 cada una; las tuercas vienen en cajas de 80 lb y cada una cuesta $70, y las rondanas vienen en cajas de 30 lb y su costo es de $20 cada caja. La bolsa debe pesar por lo menos 1 lb e incluir, en peso, por lo menos 10% de tornillos y 25% de pernos; no más de 15% de tuercas y cuando mucho 10% de rondanas. Para balancear la bolsa, la cantidad de pernos no puede exceder a la de tuercas o la de rondanas. El peso de un perno es 10 veces el de una tuerca, y 50 veces el de una rondana. Desarrolle un modelo de PL para determinar la combinación óptima de la bolsa, y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

3. All-Natural Coop fabrica tres cereales, *A*, *B* y *C,* a partir de cuatro ingredientes: copos de avena, pasas, coco rayado y almendras fileteadas. Las disponibilidades diarias de los ingredientes son 5 toneladas, 2 toneladas, 1 tonelada y 1 tonelada, respectivamente. Los costos correspondientes por tonelada son $100, $120, $110 y $200. El cereal *A* es una mezcla de 50:5:2 de avena, pasas y almendras. El cereal *B* es una mezcla de 60:2:3 de avena, coco y almendras. El cereal C es una mezcla de 60:3:4:2 de avena, pasas, coco y almendras. Los cereales se producen en tamaños jumbo de 5 lb. All-Natural vende los ce-

reales A, B y C a \$2, \$2.50 y \$3.00 por caja, respectivamente. La demanda diaria mínima de los cereales A, B y C es de 500, 600 y 500 cajas, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima de los cereales, así como las cantidades asociadas de ingredientes, y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

4. Una refinería fabrica dos tipos de combustible para avión, F_1 y $F2$, mezclando cuatro tipos de gasolina, A, B, C y D. El combustible $F1$ incluye las gasolinas A, B, C y D en la proporción 1:1:2:4, y el combustible $F2$ incluye la proporción 2:2:1:3. Los límites de abasto de A, B, C y D son 1000, 1200, 900 y 1500 barriles/día, respectivamente. Los costos por barril de las gasolinas A, B, C y D son \$120, \$90, \$100 y \$150, respectivamente. Las combustibles $F1$ y $F2$ se venden a \$200 y \$250 por barril, respectivamente. La demanda mínima de F_1 y $F2$ es de 200 y 400 barriles/día, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima de $F1$ y F_2, y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

*__5.__ Una compañía petrolera destila dos tipos de petróleo crudo, A y B, para producir gasolina regular y premium, y combustible para gasavión. La disponibilidad diaria de petróleo crudo y la demanda mínima de los productos finales están limitadas. Si la producción no es suficiente para satisfacer la demanda, proveedores externos surten la cantidad faltante con una penalización. La producción excedente no se vende de inmediato y se incurre en un costo de almacenamiento. La siguiente tabla proporciona los datos de la situación:

Crudo	Fracción de rendimiento por barril			Precio/barril (\$))	Barriles/día
	Regular	*Premium*	*Gasavión*		
Crudo A	.20	.1	.25	30	2500
Crudo B	.25	.3	.10	40	3000
Demanda (barriles/día)	500	700	400		
Ingresos (\$/barril)	50	70	120		
Costo de almacenamiento de la producción excedente (\$/barril)	2	3	4		
Penalización por la demanda no satisfecha (\$/barril)	10	15	20		

Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de productos óptima para la refinería, y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

6. En la situación de la refinería del problema 5, suponga que de la unidad de destilación resultan los productos intermedios nafta y aceite ligero. Un barril de crudo A produce .35 barriles de nafta y .6 barriles de aceite ligero, y un barril de crudo B produce .45 barriles de nafta y .5 barriles de aceite ligero. La nafta y el aceite ligero se mezclan para producir los tres productos de gasolina finales: Un barril de gasolina regular tiene una proporción de mezcla de 2:1 (nafta a aceite ligero); un barril de gasolina premium tiene una relación de mezcla de 1:1, y un barril de combustible para avión tiene una proporción de mezcla de 1:2. Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla de producción óptima y halle la solución utilizando AMPL, Solver o TORA.

7. Hawaii Sugar Company produce azúcar morena, azúcar procesada (blanca), azúcar glas, y melazas a partir del jarabe de caña de azúcar. La compañía compra 4000 toneladas de jarabe semanalmente y la contratan para que suministre cada semana un mínimo de 25 toneladas de cada tipo de azúcar. El proceso de producción se inicia con la fabricación de azúcar morena y melaza a partir del jarabe. Una tonelada de jarabe produce .3 toneladas de azúcar morena y .1 tonelada de melaza. El azúcar blanca resulta de procesar el azúcar morena. Se requiere una tonelada de azúcar morena para producir .8 toneladas de azúcar blanca. El azúcar glas se produce a partir del azúcar blanca mediante un proceso de molienda especial cuya eficiencia de conversión es de 95% (una tonelada de azúcar blanca produce .95 toneladas de azúcar glas). Las utilidades por tonelada de azúcar morena,

azúcar blanca y melaza son \$150, \$200, \$230 y \$35, respectivamente. Formule el problema como un programa lineal, y determine el programa de producción semanal utilizando AMPL, Solver o TORA.

8. La refinería Shale Oil mezcla dos tipos de petróleo, *A* y *B,* para producir dos gasolinas de alto octanaje, I y II. Los petróleos *A* y *B* se producen a las razones máximas de 450 y 700 barriles/hora, respectivamente. Los octanajes correspondientes son 98 y 89, y las presiones de vapor son de 10 y 8 lb/pulg^2. La gasolina I y la gasolina II deben tener octanajes de por lo menos 91 y 93, respectivamente. La presión de vapor asociada con ambos productos no deberá exceder las 12 lb/pulg^2. Las utilidades por barril de las gasolinas I y II son de \$7 y \$10, respectivamente. Desarrolle un modelo de PL para determinar la tasa de producción óptima de las gasolinas I y II y sus proporciones de mezcla de los petróleos *A* y *B*. Determine la solución con AMPL, Solver o TORA (*Sugerencia:* La presión de vapor, al igual que el octanaje, es el promedio ponderado de las presiones de vapor de los petróleos mezclados.)

9. Una fundidora de acero, aluminio y hierro colado produce dos tipos de lingotes de metal, I y II, con límites específicos en el contenido de aluminio, grafito y silicio. En el proceso de fundición pueden usarse briquetas de aluminio y silicio para satisfacer las especificaciones deseadas. Las siguientes tablas establecen las especificaciones del problema:

	Contenido (%)				
Elemento de entrada	*Aluminio*	*Grafito*	*Silicio*	Costo/tonelada (\$)	Disponibles (toneladas/día)
Chatarra de acero	10	5	4	100	1000
Chatarra de alumnio	95	1	2	150	500
Chatarra de hierro colado	0	15	8	75	2500
Briqueta de aluminio	100	0	0	900	Cualquier cantidad
Briqueta de silicio	0	0	100	380	Cualquier cantidad

	Lingote I		Lingote II	
Ingrediente	*Mínimo* (%)	*Máximo* (%)	*Mínimo* (%)	*Máximo* (%)
Aluminio	8.1	10.8	6.2	8.9
Grafito	1.5	3.0	4.1	∞
Silicio	2.5	∞	2.8	4.1
Demanda (toneladas/día)		130	250	

Desarrolle un modelo de PL para determinar la mezcla óptima que la fundidora debe fundir, y determine la solución con AMPL, Solver o TORA.

10. Se fabrican dos aleaciones, *A* y *B*, con cuatro metales I, II, III y IV de acuerdo con las siguientes especificaciones:

Aleación	Especificaciones	Precio de venta (\$)
A	Máximo 80% de I Máximo 30% de II Mínimo 50% de IV	200
B	Entre 40 y 60% de II Mínimo 30% de III Máximo 70% de IV	300

Los cuatro metales se extraen de tres minerales de acuerdo con los siguientes datos:

		Constituyentes (%)					
Mineral	Cantidad máxima (toneladas)	*I*	*II*	*III*	*IV*	*Otros*	Precio/tonelada ($)
1	1000	20	10	30	30	10	30
2	2000	10	20	30	30	10	40
3	3000	5	5	70	20	0	50

Desarrolle un modelo de PL para determinar cuánto debe producirse de cada tipo, y determine la solución utilizando AMPL, Solver o TORA. (*Sugerencia:* Sean x_{kj} las toneladas de mineral i asignadas a la aleación k, y defina w_k como las toneladas de aleación k producidas).

2.4.6 Aplicaciones de PL adicionales

Las secciones anteriores demostraron aplicaciones de PL representativas en cinco áreas. El conjunto de problemas 2.4F en esta sección proporciona áreas de aplicación adicionales, que van desde agrícolas hasta militares.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 2.4F

1. *Asignación de espacios de anaquel.* Una tienda de abarrotes debe decidir el espacio de anaquel que se asignará a cada uno de los cinco tipos de cereales para el desayuno. La demanda diaria máxima es de 100, 85, 140, 80 y 90 cajas, respectivamente. El espacio de anaquel en pulgadas cuadradas para las cajas es de 16, 24, 18, 22 y 20. El espacio de anaquel total disponible es de 5000 pulg^2. La utilidad por unidad es de $1.10, $1.30, $1.08, $1.25 y $1.20. Determine la asignación de espacio óptimo para los cinco cereales.
2. *Votación.* En cierto condado del estado de Arkansas, en la boleta se presentan cuatro opciones a elegir: Construir nuevas carreteras, incrementar el control de armas, aumentar subsidios a granjas y elevar el impuesto a la gasolina. El condado comprende 100,000 votantes urbanos, 250,000 votantes suburbanos, y 50,000 votantes rurales, todos con variables de apoyo y oposición a los temas de elección. Por ejemplo, los votantes rurales se oponen al control de armas y al impuesto a la gasolina, sin embargo están a favor de la construcción de carreteras y de los subsidios a granjas. El condado está planeando una campaña publicitaria de TV con un presupuesto de $100,000 a un costo de $1500 por anuncio. La siguiente tabla resume el impacto de un solo anuncio en función de la cantidad de votos a favor y en contra de las diferentes opciones en la boleta.

	Cantidad esperada de votos a favor (+) y votos en contra (−) por anuncio		
Tema	*Urbanos*	*Suburbanos*	*Rurales*
Nuevas carreteras	−30,000	+60,000	+30,000
Control de armas	+80,000	+30,000	−45,000
Control de smog	+40,000	+10,000	0
Impuesto a la gasolina	+90,000	0	−25,000

Una opción será ganadora si acumula el 51% de los votos. ¿Qué opción será aprobada por los votantes, y cuántos anuncios deben asignarse?

3. *Balanceo de una línea de ensamble*. Un producto se ensambla a partir de tres piezas diferentes. Dos departamentos fabrican las piezas a diferentes ritmos de producción, como se indica en la siguiente tabla:

Departamento	Capacidad (h/sem)	Ritmo de producción (unidades/h)		
		Pieza 1	*Pieza 2*	*Pieza 3*
1	100	8	5	10
2	80	6	12	4

Determine la cantidad máxima de unidades de ensamble final que pueden producirse a la semana. (*Sugerencia*: Unidades mínimas de ensamble {unidades de la pieza 1, unidades de la pieza 2, y unidades de la pieza 3}. Maximizar $z = \text{mín}\{x_1, x_2\}$ es equivalente a máx z sujeta a $z \leq x_1$ y $z \leq x_2$.)

4. *Control de contaminación*. Se pulverizan y mezclan tres tipos de carbón, C1, C2 y C3 para producir 50 toneladas por hora necesarias para accionar una planta generadora de electricidad. La combustión del carbón emite óxido de azufre (en partes por millón) la cual debe satisfacer las especificaciones de EPA (por sus siglas en inglés) de un máximo de 2000 partes por millón. La siguiente tabla resume los datos de la situación.

	C1	C2	C3
Azufre (partes por millón)	2500	1500	1600
Capacidad del pulverizador (ton/h)	30	30	30
Costo por tonelada	$30	$35	$33

Determine la mezcla óptima de los carbones.

***5.** *Control de semáforos*, *Stark y Nichols (1972)*. El tránsito automotriz de tres carreteras, H1, H2 y H3, debe detenerse y esperar una luz verde antes de salir de una carretera de cuota. Las cuotas son de $3, $4 y $5 para los autos que salen de H1, H2 y H3, respectivamente. Las proporciones de flujo de H1, H2 y H3 son de 500, 600 y 400 autos por hora. El ciclo de los semáforos no debe exceder de 2.2 minutos, y la luz verde en cualquier carretera debe permanecer encendida por lo menos durante 25 segundos. La luz amarilla permanece encendida durante 10 segundos. La caseta de cobro puede atender un máximo de 510 automóviles por hora. Suponiendo que los automóviles no se mueven con la luz amarilla, determine el intervalo óptimo para la luz verde en las tres carreteras que maximizará el ingreso de la caseta de cobro por ciclo de tránsito.

6. *Ajuste de una línea recta a datos empíricos (Regresión)*. En una clase de mecanografía de 10 semanas para principiantes, la velocidad promedio por estudiante (en palabras por minuto) en función de la cantidad de semanas de clase se da en la siguiente tabla:

Semana, x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Palabras por minuto, y	5	9	15	19	21	24	26	30	31	35

Determine los coeficientes a y b en la relación de línea recta, $\hat{y} = ax + b$, que mejor se ajuste a los datos proporcionados. (*Sugerencia:* Minimice la suma del *valor absoluto* de las desviaciones entre la $\hat{y}$ teórica y la y empírica. Min$|w|$ equivale a min z sujeta a $z \geq w$ y $z \geq -w$, $z \geq 0$. Por otra parte, min $|w|$ equivale a min $(z^+ + z^-)$ sujeta a $w = z^+ - z^-$ con $z^+, z^- \geq 0$.)

7. *Nivelación del terreno para una carretera nueva*, *Stark y Nichols (1972)*. El Departamento de Carreteras de Arkansas está planeando una nueva carretera de 10 millas por un terreno accidentado como se muestra en el perfil que se muestra en la figura 2.13. El ancho

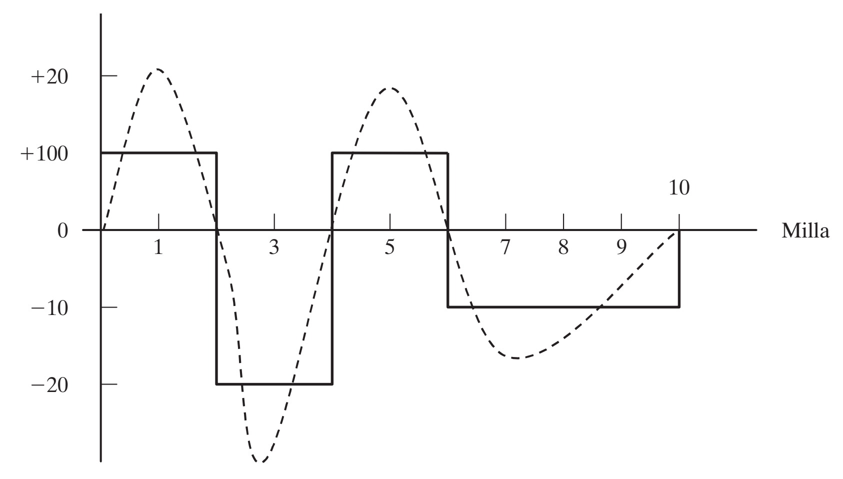


FIGURA 2.13

Perfil del terreno para el problema 7

del terreno de construcción es aproximadamente de 50 yardas. Para simplificar la situación, el perfil del terreno se puede reemplazar por una función escalonada, como se muestra en la figura. Utilizando maquinaria pesada, la tierra removida del terreno alto se transporta para rellenar áreas bajas. También hay dos fosos de mina, I y II, ubicados en los extremos del tramo de 10 millas, de donde se puede extraer más tierra si es necesario. El foso I tiene una capacidad de 20,000 yardas cúbicas, y la del foso II es de 15,000 yardas cúbicas. Los costos de extracción de tierra de los fosos I y II, respectivamente, son de \$1.50 y \$1.90 por yarda cúbica. El costo de transportación por yarda cúbica por milla es de \$.15, y el costo de utilizar la maquinaria pesada para cargar los camiones es de \$.20 por yarda cúbica. Esto significa que transportar una yarda cúbica 1 milla desde el foso I costará un total de $(1.5 + .20) + 1 \times .15 = \$1.85$ y transportar una yarda cúbica 1 milla desde una colina hasta el área de relleno costará $.20 + 1 \times .15 = \$.35$. Desarrolle un plan de costo mínimo para nivelar el tramo de 10 millas.

8. *Planificación militar, Shepard and Associates (1988)*. El ejército rojo (R) está tratando de invadir el territorio defendido por el ejército azul (B), el cual tiene tres líneas de defensa y 200 unidades de combate regulares, y además puede echar mano de una reserva de 200 unidades. El ejército rojo planea atacar en dos frentes, el norte y el sur, y el ejército azul estableció tres líneas de defensa este-oeste, I, II y III. El propósito de las líneas de defensa 1 y 2 es demorar el ataque del ejército rojo por lo menos 4 días en cada línea para maximizar la duración total de la batalla. El tiempo de avance del ejército rojo se calcula mediante la siguiente fórmula empírica:

$$\text{Duración de la batalla en días} = a + b\left(\frac{\text{Unidades azules}}{\text{Unidades rojas}}\right)$$

Las constantes a y b son una función de la línea de defensa y el frente norte/sur, como lo muestra la siguiente tabla:

	a			*b*		
	I	*II*	*III*	*I*	*II*	*III*
Frente norte	.5	.75	.55	8.8	7.9	10.2
Frente sur	1.1	1.3	1.5	10.5	8.1	9.2

Las unidades de reserva del ejército azul pueden usarse sólo en las líneas de defensa II y III. La asignación de unidades por parte del ejército rojo a las tres líneas de defensa se da en la siguiente tabla:

	Cantidad de unidades de ataque del ejército rojo		
	Línea de defensa 1	*Línea de defensa 2*	*Línea de defensa 3*
Frente norte	30	60	20
Frente sur	30	40	20

¿Cómo deberá asignar sus recursos el ejército azul entre las tres líneas de defensa y los frentes norte y sur?

9. *Gestión de calidad del agua, Stark and Nicholes (1972).* Cuatro ciudades descargan aguas residuales en la misma corriente de agua. La ciudad 1 está corriente arriba, la ciudad 2 corriente abajo; luego la ciudad 3, y finalmente la ciudad 4. Medidas a lo largo de la corriente de agua, las ciudades están aproximadamente a 15 millas una de otra. Una medida de la cantidad de contaminantes en las aguas residuales es la demanda de oxígeno bioquímico (BOD, por sus siglas en inglés), lo cual es el peso del oxígeno requerido para estabilizar los constituyentes de desecho en el agua. Una BOD más alta indica una peor calidad del agua. La Agencia de Protección Ambiental (EPA, por sus siglas en inglés) establece una carga de BOD permisible máxima, expresada en lb de BOD por galón. La eliminación de contaminantes del agua residual se realiza en dos formas: (1) actividad de descomposición natural estimulada por el oxígeno en el aire, y (2) plantas de tratamiento en los puntos de descarga antes de que los desechos lleguen a la corriente de agua. El objetivo es determinar la eficiencia más económica de cada una de las cuatro plantas que reducirán la BOD a niveles aceptables. La eficiencia máxima posible de la planta es de 99%.

Para demostrar los cálculos implicados en el proceso, considere las siguientes definiciones para la planta 1:

Q_1 = Velocidad de flujo de la corriente (gal/h) en el tramo de 15 millas que conduce a la ciudad 2

p_1 = Tasa de descarga de BOD (en lb/h)

x_1 = eficiencia de la planta 1 ($\leq .99$)

b_1 = carga de BOD máxima permisible en el tramo 1-2 (en lb de BOD/gal)

Para satisfacer el requerimiento de carga de BOD en el tramo 1-2, debemos tener

$$p_1(1 - x_1) \leq b_1Q_1$$

Del mismo modo, la restricción de carga de BOD en el tramo 2-3 se escribe como

$$(1 - r_{12})\begin{pmatrix}\text{Tasa de descarga de BOD} \\ \text{en el tramo 1-2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Tasa de descarga de BOD} \\ \text{en el tramo 2-3}\end{pmatrix} \leq b_2Q_2$$

o bien

$$(1 - r_{12})p_1(1 - x_1) + p_2(1 - x_2) \leq b_2Q_2$$

El coeficiente r_{12} (<1) representa la fracción de desechos eliminada en el tramo 1-2 por descomposición. Para el tramo 2-3, la restricción es

$$(1 - r_{23})[(1 - r_{12})p_1(1 - x_1) + p_2(1 - x_2)] + p_3(1 - x_3) \leq b_3Q_3$$

Determine la eficiencia más económica para las cuatro plantas aplicando los siguientes datos (la fracción de BOD eliminada por descomposición es de 6% en los cuatro tramos):

	Tramo 1–2 ($i = 1$)	Tramo 2–3 ($i = 2$)	Tramo 2–3 ($i = 3$)	Tramo 3–4 ($i = 4$)
Q_i (gal/h)	215,000	220,000	200,000	210,000
p_i (lb/h)	500	3000	6000	1000
b_i (lb de BOD/gal)	.00085	.0009	.0008	.0008
Costo del tratamiento ($/lb de BOD eliminada)	.20	.25	.15	.18

10. *Estructura de carga, Stark and Nicholes (1972)*. La grúa elevada que se muestra en la figura 2.14 con dos yugos elevadores, se utiliza para transportar concreto mezclado a un terreno para colar barreras de concreto. La cubeta de concreto cuelga a la mitad del yugo. Los rieles que sostienen los extremos de la grúa pueden soportar un máximo de 25 kips cada uno, y cada cable del yugo tienen una capacidad de 20 kips. Determine la capacidad de carga máxima, W_1 y W_2. (*Sugerencia:* En equilibrio, la suma de los momentos con respecto a cualquier punto de la viga o el yugo es cero.)

11. *Asignación de aviones a rutas*. Considere el problema de asignar aviones a cuatro rutas, de acuerdo con los siguientes datos:

Tipo de avión	Capacidad (pasajeros)	Capacidad de aviones	Cantidad de viajes diarios en la ruta *1*	*2*	*3*	*4*
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
Cantidad diaria de clientes			1000	2000	900	1200

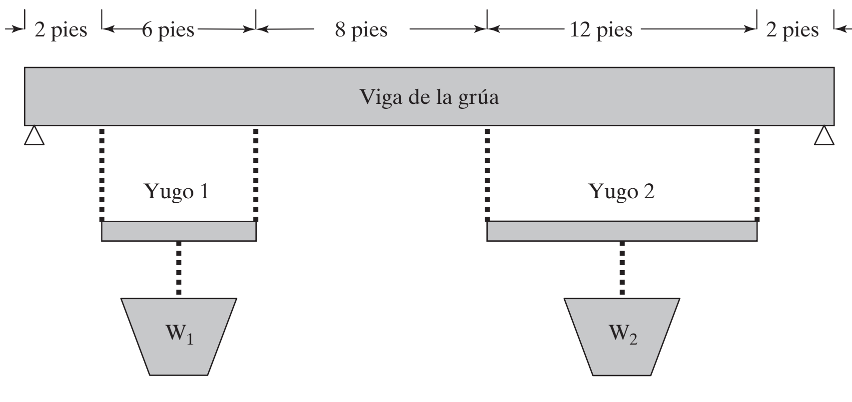


FIGURA 2.14

Grúa elevada con dos yugos (problema 11)

Los costos asociados, incluidas las penalizaciones por la pérdida de clientes debido a la no disponibilidad de espacio, son

	Costo de operación ($) por viaje en la ruta			
Tipo de avión	*1*	*2*	*3*	*4*
1	1000	1100	1200	1500
2	800	900	1000	1000
3	600	800	800	900
Penalización ($) por pasajero perdido	40	50	45	70

Determine la asignación óptima de aviones a las rutas, así como la cantidad asociada de viajes.

BIBLIOGRAFÍA

Dantzig, G., y M. Thapa, *Linear Programming 1: Introduction,* Springer, Nueva York, 1997.

Fourer, R., D. Gay, y B. Kernighan, *AMPL, A Modeling Language for Mathematical Programming,* 2a. ed., Brooks/Cole-Thomson, Pacific Grove, CA, 2003.

Laidlaw, C. *Linear Programming for Urban Development Plan Evaluation,* Praegers, Londres, 1972.

Lewis, T., “Personal Operations Research: Practicing OR on Ourselves”, *Interfaces,* vol. 26, Núm. 5, págs. 34-41, 1996.

Shepard, R., D. Hartley, E Hasman, L. Thorpe, y M. Bathe, *Applied Operations Research,* Plenum Press, Nueva York, 1988.

Stark, R., y R. Nicholes, *Mathematical Programming Foundations for Design: Civil Engineering Systems*, McGraw-Hill, Nueva York, 1972.

CAPÍTULO 3

Método simplex y análisis de sensibilidad

Aplicación de la vida real-Optimización de la producción de válvulas cardiacas

Las válvulas cardiacas biológicas de diferentes tamaños son bioprótesis fabricadas a partir de corazones porcinos para implantación en humanos. Por el lado del suministro, los corazones porcinos no pueden "producirse" en tamaños específicos. Por otra parte, el tamaño exacto de una válvula fabricada no puede determinarse hasta que se procesa el componente biológico del corazón del cerdo. En consecuencia, puede haber más existencias de algunos tamaños y menos de otros. Se desarrolló un modelo de PL para reducir la cantidad de los tamaños de los que hay más existencias e incrementar la cantidad de los tamaños cuyas existencias son menores. (Los detalles de este estudio se presentan en el caso 2 del capítulo 26, en inglés, del sitio web).

3.1 MODELO DE PL EN FORMA DE ECUACIÓN

El desarrollo de los cálculos con el método simplex se facilita si se imponen dos requerimientos a las restricciones de programación lineal.

1. Todas las restricciones son ecuaciones con lado derecho no negativo.
2. Todas las variabzzles son no negativas[1]

Conversión de las desigualdades en ecuaciones con lado derecho no negativo. En un modelo de PL económico, el lado derecho representa la disponibilidad de un recurso, y el izquierdo el uso del recurso por todas las actividades del modelo (variables). La cantidad excedente del lado derecho respecto de izquierdo da entonces la cantidad *no utilizada* del recurso.

[1] Todos los paquetes comerciales (y TORA) aceptan directamente las restricciones de desigualdad, el lado derecho no negativo y las variables irrestrictas. Cualquier condición previa de las restricciones y las variables se realiza internamente en el software antes de que el método simplex resuelva el problema.

Para convertir una desigualdad (≤) en ecuación se agrega una **variable de holgura** al lado izquierdo de la restricción. Por ejemplo, la restricción $M1$ del modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) se convierte en ecuación como sigue

$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24, s_1 \geq 0$$

La variable no negativa s_1 es la holgura (o cantidad no utilizada) del recurso $M1$.

A continuación, una restricción (≥) establece un límite inferior en las actividades económicas de la programación lineal, así que la cantidad en la cual el lado izquierdo excede el límite mínimo representa un *superávit*. Así pues, la conversión de (≥) a (=) se logra restando una **variable de superávit** no negativa del lado izquierdo de la desigualdad. Por ejemplo, en el modelo de la dieta (ejemplo 2.2-2), la variable de exceso S_1 (≥ 0) convierte la restricción de la mezcla de alimentos (≥) en la ecuación.

$$x_1 + x_2 - S_1 = 800, S_1 \geq 0$$

El único requerimiento que falta es que el lado derecho de la ecuación resultante sea no negativo. Si el lado derecho resulta negativo, el requerimiento se satisface multiplicando ambos lados de la ecuación por −1.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.1A

*1. En el modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.2-1), considere la solución factible $x_1 = 3$ toneladas y $x_2 = 1$ tonelada. Determine el valor de las holguras asociadas para las materias primas $M1$ y $M2$.

2. En el modelo de la dieta (ejemplo 2.2-2), determine el superávit de alimento compuesto de 500 lb de maíz y 600 lb de soya.

3. Considere la siguiente desigualdad

$$10x_1 - 3x_2 \geq -5$$

Demuestre que multiplicar ambos lados de la desigualdad por −1 y luego convertir la desigualdad resultante en ecuación es lo mismo que convertirla primero en ecuación y luego multiplicar ambos lados por −1.

*4. Dos productos diferentes, $P1$ y $P2$ pueden ser fabricados por una o dos máquinas diferentes, $M1$ y $M2$. El tiempo de procesamiento de cualquier producto en cualquier máquina es el mismo. La capacidad diaria de la máquina $M1$ es de 200 unidades (de $P1$ o de $P2$, o una combinación de ambos), y la capacidad diaria de la máquina $M2$ es de 250 unidades. El supervisor del taller desea balancear el programa de producción de las dos máquinas de modo que la cantidad de unidades producidas en una máquina no sea mayor a 5 unidades de la cantidad producida en la otra. La utilidad por unidad de $P1$ es de \$10 y la de $P2$ es de \$15. Plantee el problema como una PL en forma de ecuación.

5. Muestre cómo puede presentarse la siguiente función objetivo en forma de ecuación:

$$\text{Minimizar } z = \max\left\{|x_1 - x_2 + 3x_3|, |-x_1 + 3x_2 - x_3|\right\}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(*Sugerencia:* $|a| \leq b$ equivale a $a \leq b$ y $a \geq -b$.)

6. Demuestre que las m ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

equivalen a las siguientes $m + 1$ desigualdades:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right)x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i$$

Manejo de variables irrestrictas. El uso de una variable irrestricta en un modelo de PL se demuestra en el modelo de nivelación de producción durante múltiples periodos del ejemplo 2.4-4, donde la variable irrestricta S_i representa la cantidad de trabajadores contratados o despedidos en el periodo i. En el mismo ejemplo, explicamos que la variable irrestricta puede ser reemplazada por dos variables no negativas mediante la sustitución

$$S_i = S_i^- - S_i^+, S_i^- \geq 0, S_i^+ \geq 0$$

En este caso, S_i^- representa la cantidad de trabajadores contratados y S_i^+ la de trabajadores despedidos. Como se explicó en el ejemplo 2.4-4, es imposible (tanto intuitiva como matemáticamente) que S_i^- y S_i^+ asuman valores positivos al mismo tiempo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.1B

1. El restaurante de comida rápida McBurger vende hamburguesas cuarto de libra y hamburguesas con queso. Una hamburguesa cuatro de libra se prepara con un cuatro de libra de carne y una hamburguesa con queso se prepara con sólo .2 lb de carne. El restaurante inicia el día con 200 lb de carne pero puede pedir más a un costo adicional de 25 centavos por libra para cubrir el costo de entrega. Toda la carne que sobra al final del día se dona a instituciones de caridad. Las utilidades de McBurger son de 20 centavos por hamburguesa cuarto de libra y de 15 centavos por hamburguesa con queso. McBurger no espera vender más de 900 hamburguesa en cualquier día. ¿Cuántas hamburguesas de cada tipo debe planear McBurger para el día? Resuelva el problema utilizando TORA, Solver o AMPL.

2. En un centro de maquinado se fabrican dos productos. Los tiempos de producción por unidad de los productos 1 y 2 son de 10 y 12 minutos, respectivamente, El tiempo de máquina regular total es de 2500 minutos por día. En cualquier día, el fabricante puede producir entre 150 y 200 unidades del producto 1, pero no más de 45 unidades del producto 2. Se puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda a un costo adicional de $.50 por minuto. Suponiendo que las utilidades unitarias de los productos 1 y 2 son de $6.00 y $7.50, respectivamente, formule el problema como un modelo de PL, luego resuélvalo con TORA, Solver o AMPLS para determinar el nivel de producción óptimo de cada producto así como también cualquier tiempo extra necesario en el centro.

***3.** JoShop fabrica tres productos cuyas utilidades unitarias son de $2, $5 y $3, respectivamente. La compañía presupuestó 80 horas de mano de obra y 65 horas de tiempo de máquina para la producción de los tres productos. Los requerimientos de mano de obra por unidad de los productos 1, 2 y 3 son de 2, 1 y 2 horas, respectivamente. Los requerimientos de tiempo de máquina por unidad son 1, 1 y 2 horas. JoShop considera las horas de mano de obra y máquina presupuestadas como metas que pueden ser sobrepasadas, si es necesario, pero a un costo adicional de $15 por hora de mano de obra y $10 por hora de máquina. Formule el problema como una PL y determine su solución óptima aplicando TORA, Solver o AMPL.

4. En una PL en la cual hay algunas variables irrestrictas, una transformación del tipo $x_j = x_j^- - x_j^+, x_j^-, x_j^+ \geq 0$ duplicará la cantidad correspondiente de variables no negativas.

En su lugar, podemos reemplazar k variables irrestrictas con exactamente $k + 1$ variables no negativas por medio de la sustitución $x_j = x'_j - w$, x'_j, $w \geq 0$. Use TORA, Solver o AMPL para demostrar que los dos métodos dan la misma solución de la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = -2x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

sujeto a

$$4x_1 - x_2 - 5x_3 = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$$

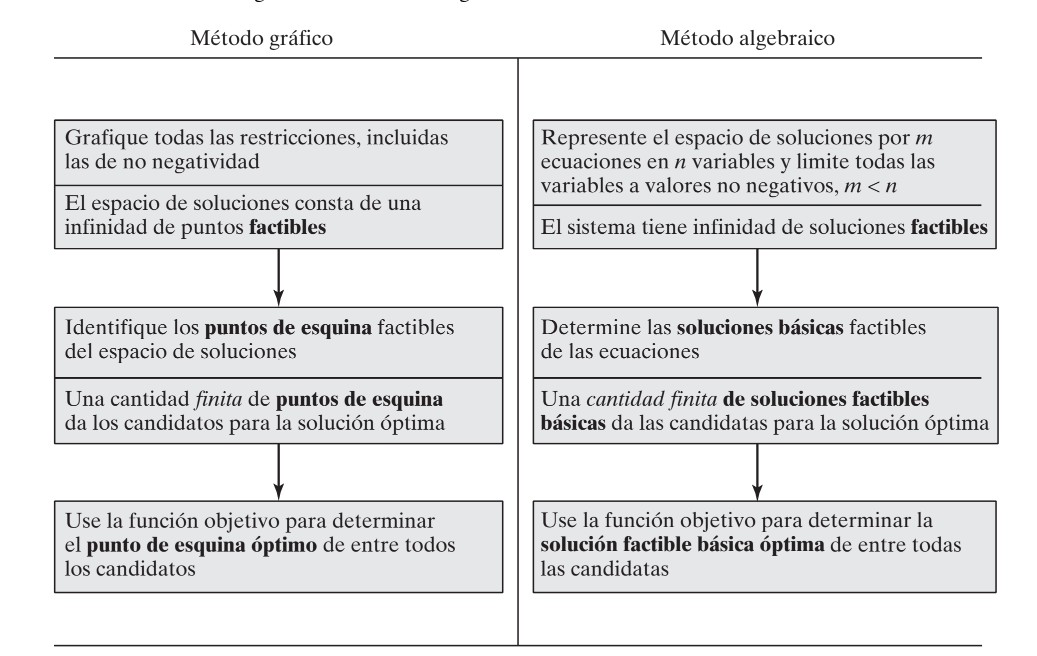
$$x_1 \geq 0,\ x_2,\ x_3 \text{ irrestricta}$$

3.2 TRANSICIÓN DE LA SOLUCIÓN GRÁFICA A LA ALGEBRAICA

El desarrollo del método simplex algebraico está basado en ideas transmitidas por la solución gráfica que se muestra en la sección 2.2. La figura 3.1 compara los dos métodos. En el método gráfico el espacio de soluciones es la intersección de los semiplanos que representan las restricciones, y en el método simplex, el espacio de soluciones está representado por m ecuaciones lineales simultáneas y n variables no negativas. Podemos visualizar que el espacio de soluciones gráficas tiene una infinidad de puntos de solución, pero ¿cómo sacar una conclusión parecida a partir de la representación algebraica del espacio de soluciones? La respuesta es que, en todas las PL no triviales, la cantidad de ecuaciones m siempre es *menor* que la de variables n, por lo que se obtiene una cantidad infinita de soluciones (siempre que las ecuaciones sean consisten-

FIGURA 3.1

Transición de la solución gráfica a la solución algebraica



tes).[2] Por ejemplo, la ecuación $x + y = 1$ tiene $m = 1$ y $n = 2$ y produce una infinitud de soluciones porque cualquier punto sobre la línea recta $x + y = 1$ es una solución.

En el espacio de soluciones algebraicas (definido por $m \times n$ ecuaciones, $m < n$), las **soluciones básicas** corresponden a los *puntos de esquina* en el espacio de soluciones gráficas. Se determinan igualando $n - m$ variables a cero y resolviendo las m ecuaciones para las m variables restantes, *siempre que la solución resultante es única.* Esto significa que la cantidad máxima de puntos de esquina es

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Como con los puntos de esquina, las soluciones factibles básicas definen por completo a las candidatas para la solución óptima en el espacio de soluciones algebraicas.

Ejemplo 3.2-1

Considere la siguiente PL con dos variables

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La figura 3.2 proporciona el espacio de soluciones gráficas para el problema.

Algebraicamente, el espacio de soluciones de la PL está representado por las siguientes $m = 2$ ecuaciones y $n = 4$ variables:

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 5$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Las soluciones básicas se determinan estableciendo las $n - m = 4 - 2 = 2$ variables iguales a cero y resolviendo las $m = 2$ variables restantes. Por ejemplo, si establecemos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, las ecuaciones proporcionan la solución básica única

$$s_1 = 4, s_2 = 5$$

Esta solución corresponde al punto A en la figura 3.2 (convénzase de que $s_1 = 4$ y $s_2 = 5$ en el punto A). Puede determinarse otro punto con $s_1 = 0$ y $s_2 = 0$ y resolviendo luego las dos ecuaciones resultantes

$$2x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

La solución básica asociada es $(x_1 = 1, x_2 = 2)$, o el punto C en la figura 3.2.

---

[2] Si la cantidad de ecuaciones m es igual a la de variables n (y las ecuaciones son consistentes), el sistema tiene exactamente una solución. Si m es mayor que n, entonces al menos las ecuaciones $m - n$ deben ser redundantes.

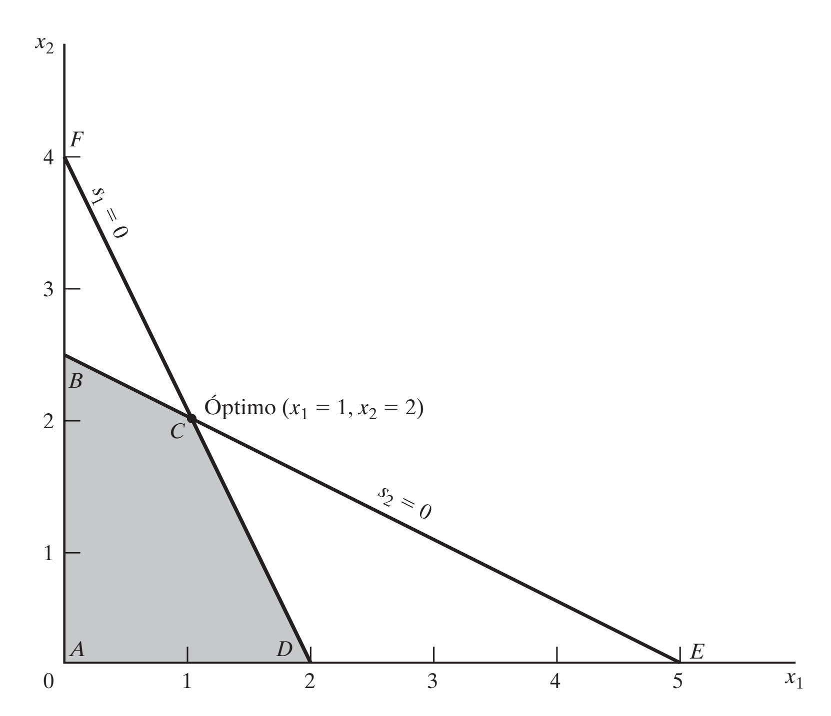


FIGURA 3.2

Espacio de soluciones de PL del ejemplo 3.2-1

Probablemente se pregunte cuáles variables $n - m$ deben igualarse a cero en busca de un punto de esquina específico. Sin el beneficio del espacio de soluciones gráficas (el cual está disponible a lo sumo sólo con tres variables), no podemos especificar las $(n - m)$ variables cero asociadas con un punto de esquina dado. Pero eso no nos impide enumerar *todos* los puntos de esquina del espacio de soluciones. Simplemente considere *todas* las combinaciones en las que $n - m$ variables son iguales a cero y resuelva las ecuaciones resultantes. Una vez hecho, la solución óptima es la solución básica *factible* (punto de esquina) con el mejor valor objetivo.

En el ejemplo presente tenemos $C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$ puntos de esquina. Si examinamos la figura 3.2, podemos ver los cuatro puntos de esquina A, B, C y D. Así que, ¿dónde están los dos restantes? De hecho, los puntos E y F también son puntos de esquina; pero son *no factibles*, y, por consiguiente, no son candidatos para la solución óptima.

Para completar la transición de la solución gráfica a la algebraica, las $n - m$ variables cero se conocen como **variables no básicas**. Las m variables restantes se llaman **variables básicas**, y su solución (obtenida resolviendo las m ecuaciones) se conoce como **solución básica**. La siguiente tabla muestra todas las soluciones básicas y no básicas de este ejemplo.

Variables no básicas (cero)	Variables básicas	Solución básica	Punto de esquina asociado	¿Factible?	Valor objetivo, z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4, 5)	A	Sí	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4, − 3)	F	No	—
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2.5, 1.5)	B	Sí	7.5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2, 3)	D	Sí	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5, − 6)	E	No	—
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	**(1, 2)**	***C***	**Sí**	**8 (óptimo)**

Comentarios. En la ilustración anterior podemos ver que a medida que el tamaño del problema se incrementa, enumerar todos los puntos de esquina se vuelve una tarea prohibitiva. Por ejemplo, para que $m = 10$ y $n = 20$, es necesario resolver $C_{10}^{20} = 184{,}756$ conjuntos de 10×10 ecuaciones, una tarea abrumadora, sobre todo cuando nos damos cuenta de que una PL de (10×20) es muy pequeña (las PL reales pueden incluir miles de variables y restricciones). El método simplex atenúa esta carga computacional en forma dramática al investigar sólo un subconjunto de todas las posibles soluciones factibles básicas (puntos de esquina). Esto es lo que hace el algoritmo simplex.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.2A

1. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) Exprese el problema en forma de ecuación.

(b) Determine todas las funciones básicas del problema, y clasifíquelas como factibles y no factibles.

***(c)** Use la sustitución directa en la función objetivo para determinar la solución factible básica óptima.

(d) Compruebe gráficamente que la solución obtenida en (c) es la solución de PL óptima, y de ese modo se concluye que la solución óptima puede determinarse algebraicamente considerando sólo las soluciones factibles básicas.

***(e)** Demuestre cómo se representan las soluciones básicas *no factibles* en el espacio de soluciones gráficas.

2. Determine la solución óptima de cada una de las siguientes PL enumerando todas las soluciones básicas.

(a) Maximizar $z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4$
sujeto a

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \leq 2$$
$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(b) Minimizar $z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4$
sujeto a

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

***3.** Demuestre algebraicamente que todas las soluciones básicas de la siguiente PL son no factibles.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

4. Considere la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$-6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \geq 4$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 10$$
$$x_1, x_3 \geq 0$$
$$x_2 \text{ irrestricta}$$

La conversión a la forma de ecuación implica utilizar la sustitución $x_2 = x_2^- - x_2^+$. Demuestre que una solución básica no puede incluir a x_2^- ni a x_2^+ al mismo tiempo.

5. Considere la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_2 \text{ no acotada}$$
$$x_2 \geq 0$$

(a) Determine todas las soluciones factibles básicas del problema.
(b) Use la sustitución directa en la función objetivo para determinar la mejor solución básica.
(c) Resuelva el problema gráficamente, y verifique si la solución obtenida en (c) es la óptima.

3.3 MÉTODO SIMPLEX

En lugar de enumerar *todas* las soluciones básicas (puntos de esquina) del problema de PL (como se hizo en la sección 3.2), el método simplex investiga sólo "algunas" de estas soluciones. La sección 3.3.1 describe la naturaleza *iterativa* del método, y la sección 3.3.2 proporciona los detalles computacionales del algoritmo simplex.

3.3.1 Naturaleza iterativa del método simplex

La figura 3.3 muestra el espacio de soluciones de la programación lineal del ejemplo 3.2-1. Por lo común, el método simplex se inicia en el origen (punto A), donde $x_1 = 0, x_2 = 0$, y el valor objetivo, z, es cero. La pregunta lógica es si un incremento en x_1 y/o x_2 (o ambas) no básicas por encima de sus valores actuales de cero puede mejorar (incrementar) el valor de z. Podemos responder esta pregunta investigando la función objetivo:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$

Un incremento de x_1 o x_2 (o ambas) sobre sus valores actuales de cero *mejorará* el valor de z. El diseño del método simplex no permite el incremento simultáneo de las variables. En cambio, incrementa *una a la vez*. La variable que va a aumentar es la que tenga mayor grado de *mejora* en z. En el ejemplo presente, el *grado* de mejora del valor de z es de 2 unidades para x_1 y de 3 para x_2. Por lo tanto elegimos x_2 para que crezca (la variable con el mayor grado de mejora entre todas las variables no básicas). La figura 3.3 muestra que el valor de x_2 debe incrementarse hasta que se llegue al punto de esquina B (recordemos que no llegar al punto de esquina B no es una opción porque un candidato para el óptimo debe ser un punto de esquina). En el punto B, el método simplex incrementará el valor de x_1 para llegar al punto de esquina mejorado C, el cual es el óptimo.

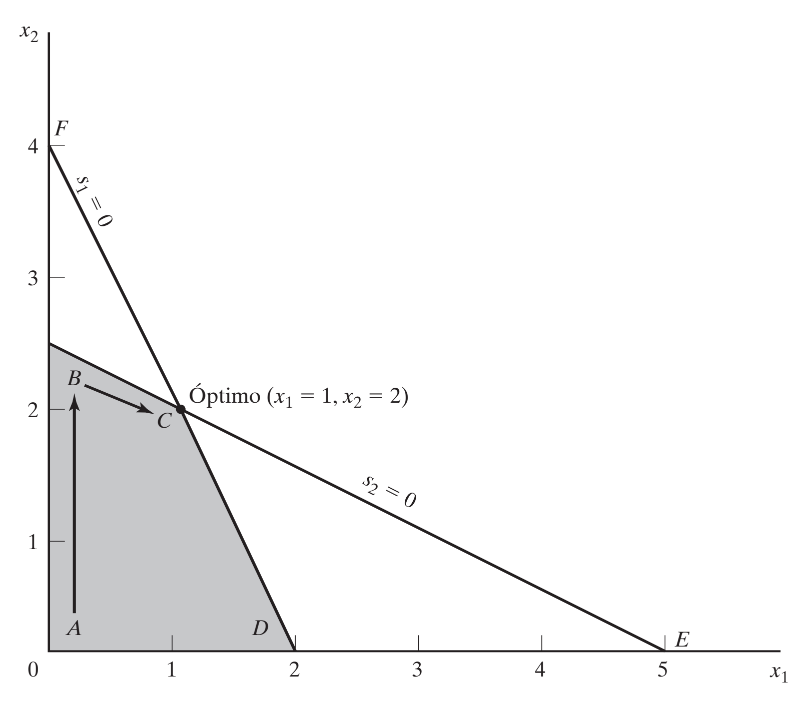


FIGURA 3.3

Proceso iterativo del método simplex

La trayectoria del algoritmo simplex se define como $A \rightarrow B \rightarrow C$. Cada punto de esquina a lo largo de la trayectoria está asociado con una **iteración**. Es importante hacer notar que el método simplex se mueve a lo largo de los **bordes** del espacio de soluciones, lo cual significa que el método no puede cruzarlo, es decir, irse directamente de A a C.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.3A

1. En la figura 3.3, suponga que la función objetivo se cambia a

$$\text{Maximizar } z = 8x_1 + 4x_2$$

Identifique la trayectoria del método simplex y las variables básicas y no básicas que la definen.

2. Considere la solución gráfica del modelo de Reddy Mikks dado en la figura 2.2. Identifique la trayectoria del método simplex y las variables no básicas que la definen.

***3.** Considere el espacio de soluciones PL tridimensional que se muestra en la figura 3.4, cuyos puntos extremos factibles son $A, B, \ldots,$ y J.

(a) ¿Cuáles de los siguientes pares de puntos de esquina no pueden representar iteraciones simplex *sucesivas*: (A, B), (B, D), (E, H) y (A, I)? Explique la razón.

(b) Suponga que las iteraciones simplex se inician en A y que el óptimo ocurre en H. Indique si alguna de las siguientes trayectorias son *no* legítimas para el algoritmo simplex, y explique la razón.

(i) $A \rightarrow B \rightarrow G \rightarrow H$

(ii) $A \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow H$

(iii) $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H$

4. Para el espacio de soluciones en la figura 3.4 todas las restricciones son del tipo $\leq$, y todas las variables x_1, x_2 y x_3 son no negativas. Suponga que s_1, s_2, s_3 y s_4 (≥ 0) son las holguras asociadas con las restricciones representadas por los planos *CEIJF*, *BEIHG*, *DFJHG* e *IJH*, respectivamente. Identifique las variables básicas y no básicas asociadas con cada punto de esquina factible del espacio de soluciones.

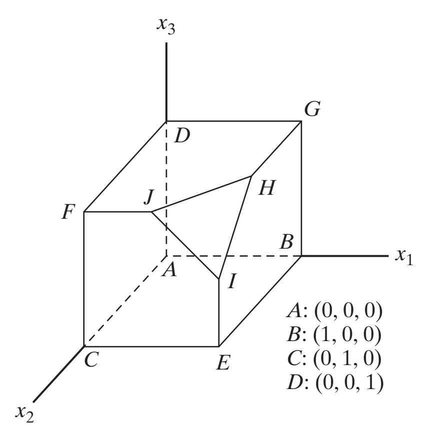


FIGURA 3.4

Espacio de soluciones del problema 3, conjunto 3.2b

5. Para cada una de las funciones objetivo dadas y el espacio de soluciones de la figura 3.4, seleccione la variable no básica que conduce al siguiente punto de esquina simplex, y determine la mejora asociada de z.

*(a) Maximizar $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$
(b) Maximizar $z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$
(c) Maximizar $z = -2x_1 + 7x_2 + 2x_3$
(d) Maximizar $z = x_1 + x_2 + x_3$

3.3.2 Detalles de cálculo del algoritmo simplex

En esta sección se explican los detalles de cálculo de una iteración simplex por medio de un ejemplo numérico.

Ejemplo 3.3-1

Considere el modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) expresado en forma de ecuación:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + s_1 \quad &= 24 \text{ (materia prima } M1) \\ x_1 + 2x_2 \quad + s_2 \quad &= 6 \text{ (materia prima } M2) \\ -x_1 + x_2 \quad + s_3 \quad &= 1 \text{ (Límite del mercado)} \\ x_2 \quad + s_4 &= 2 \text{ (Límite de la demanda)} \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Las variables s_1, s_2, s_3 y s_4 son las holguras asociadas con las restricciones respectivas.

A continuación escribimos la ecuación objetivo como

$$z - 5x_1 - 4x_2 = 0$$

De esta manera, la tabla inicial simplex se representa como sigue:

Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	
z	1	−5	−4	0	0	0	0	0	Fila z
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	Fila s_1
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	Fila s_2
s_3	0	−1	1	0	0	1	0	1	Fila s_3
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	Fila s_4

El diseño de la tabla simplex provee automáticamente la solución en la iteración inicial. La solución se inicia en el origen $(x_1, x_2) = (0,0)$, por lo que (x_1, x_2) se definen como las variables no básicas y (s_1, s_2, s_3, s_4) como las variables básicas. La variable objetivo z y las variables básicas

aparecen en la columna de la extrema izquierda (Básica). Los lados derechos de las ecuaciones del modelo dan sus valores, como se muestra en la columna de la extrema derecha (Solución) de la tabla; es decir, $z = 0, s_1 = 24, s_2 = 6, s_3 = 1, s_4 = 2$. El resultado puede verse igualando las variables no básicas (x_1, x_2) a cero en todas las ecuaciones y también observando la configuración de matriz identidad especial de los coeficientes de las variables básicas (todos los elementos en las diagonales son 1, y todos los elementos fuera de las diagonales son 0).

¿Es óptima la solución inicial? La función objetivo $z = 5x_1 + 4x_2$ muestra que la solución puede mejorarse si se incrementa el valor de la variable x_1 o de la x_2 no básica por encima de cero. Siguiendo el argumento de la sección 3.3.1, x_1 tiene que incrementarse porque tiene *el* coeficiente objetivo *más positivo*. De forma equivalente, en la tabla simplex donde la función objetivo aparece como $z - 5x_1 - 4x_2 = 0$, la variable seleccionada es la variable no básica con el coeficiente *más negativo* en la ecuación objetivo. Esta regla define la llamada **condición de optimalidad simplex**. En la terminología del algoritmo simplex, x_1 se conoce como la **variable de entrada** porque ingresa la solución básica.

Si x_1 es la variable de entrada, una de las variables básicas actuales debe salir; es decir, se vuelve no básica a un nivel cero (recordemos que la cantidad de variables no básicas debe ser siempre $n - m$). La mecánica para determinar la **variable de salida** implica calcular las **relaciones** del lado derecho de las ecuaciones (columna *Solución*) con los coeficientes de restricción estrictamente *positivos* (imposibilitando así al cero) bajo la variable de entrada, x_1, como se muestra en la siguiente tabla:

Básica	x_1 entrante	Solución	Relación (o intersección)
s_1	6	24	$x_1 = \frac{24}{6} = 4 \leftarrow$ mínimo
s_2	1	6	$x_1 = \frac{6}{1} = 6$
s_3	-1	1	$x_1 = \frac{1}{-1} = -1$ (denominador negativo, ignorar)
s_4	0	2	$x_1 = \frac{2}{0} = \infty$ (denominador cero, ignorar)
Conclusión: x_1 entra (en el nivel 4) y x_2 sale (en el nivel cero)			

¿Cómo determinan las relaciones calculadas la variable de salida y el valor de la variable de entrada? La figura 3.5 muestra que las relaciones calculadas son en realidad las intersecciones de las líneas de restricción con el eje x_1 (variable de entrada). Podemos ver que el valor de x_1 debe incrementarse hasta la intersección no negativa mínima con el eje x_1 (= 4) para alcanzar el punto de esquina B. Cualquier incremento más allá de B no es factible. En el punto B, la variable básica actual s_1 asociada con la restricción 1 asume un valor de cero y se transforma en la *variable de salida*. La regla asociada con las relaciones calculadas se conoce como **condición de factibilidad simplex** porque garantiza la factibilidad de la nueva solución.

El nuevo punto de solución B se determina "intercambiando" la variable de entrada x_1 y la variable de salida s_1 en la tabla simplex para obtener

Variables no básicas (cero) en B: (s_1, x_2)

Variables básicas en B: (x_1, s_2, s_3, s_4)

El proceso de intercambio se basa en las **operaciones de filas de Gauss-Jordan**. Identifica la columna de la variable de entrada como **columna pivote** y la fila de la variable de salida como **fila pi-**

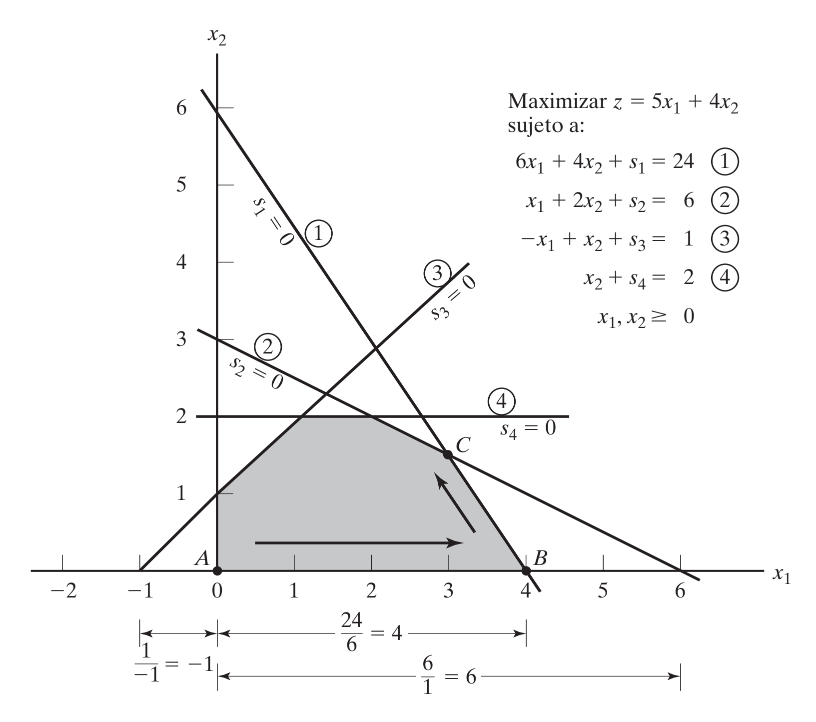


FIGURA 3.5

Interpretación gráfica de las relaciones del método simplex en el modelo de Reddy Mikks

vote. La intersección de la columna pivote y la fila pivote se conoce como **elemento pivote**. La siguiente tabla es un replanteamiento de la tabla inicial con sus filas y columnas pivote resaltadas.

	Básica	z	x_1 (Entra ↓)	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	
	z	1	−5	−4	0	0	0	0	0	
Sale ←	s_1	0	**6**	4	1	0	0	0	24	Fila pivote
	s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	
	s_3	0	−1	1	0	0	1	0	1	
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	
			Columna pivote							

Los cálculos de Gauss-Jordan necesarios para obtener la nueva solución básica son de dos tipos.

1. *Fila pivote*

a. Reemplace la variable de salida en la columna *Básica* con la variable de entrada.

b. Nueva fila pivote = Fila pivote actual ÷ Elemento pivote

2. *Todas las demás filas, incluyendo z*

Nueva fila = (Fila actual) − (Coeficiente de la columna pivote) × (Nueva fila pivote)

Estos cálculos se aplican a la tabla anterior como sigue:

1. Reemplace s_1 en la columna *Básica* con x_1:

Nueva fila x_1 = Fila s_1 actual ÷ 6

$= \frac{1}{6}(0\ 6\ 4\ 1\ 0\ 0\ 0\ 24)$

$= (0\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 0\ 0\ 4)$

2. Nueva fila z = Fila z actual − (−5) × Nueva fila x_1

$= (1\ -5\ -4\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0) - (-5) \times (0\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 0\ 0\ 4)$

$= (1\ \ 0\ -\frac{2}{3}\ \frac{5}{6}\ 0\ 0\ 0\ 20)$

3. Nueva fila s_2 = Fila s_2 actual − (1) × Nueva fila x_1

$= (0\ 1\ 2\ 0\ 1\ 0\ 0\ 6) - (1) \times (0\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 0\ 0\ 4)$

$= (0\ 0\ \frac{4}{3}\ -\frac{1}{6}\ 1\ 0\ 0\ 2)$

4. Nueva fila s_3 = Fila s_3 actual − (−1) × Nueva fila x_1

$= (0\ -1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1) - (-1) \times (0\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 0\ 0\ 4)$

$= (0\ 0\ \frac{5}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 1\ 0\ 5)$

5. Nueva fila s_4 = Fila s_4 actual − (0) × Nueva fila x_1

$= (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2) - (0)(0\ 1\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{6}\ 0\ 0\ 0\ 4)$

$= (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 2)$

La nueva solución básica es (x_1, s_2, s_3, s_4), y la nueva tabla es

				↓					
	Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
	z	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	0	20
	x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
←	s_2	0	0	$\mathbf{\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	2
	s_3	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	5
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Observe que la estructura de la nueva tabla es similar a la de la tabla inicial, en el sentido de que los coeficientes de las restricciones de la variable básica forman una matriz de identidad. Por consiguiente, cuando igualamos las nuevas variables no básicas x_2 y s_1 a cero, la columna

Solución de forma automática da la nueva solución ($x_1 = 4, s_2 = 2, s_3 = 5, s_4 = 2$).[3] Este "acondicionamiento" de la tabla es el resultado de la aplicación de las operaciones de filas de Gauss-Jordan. El nuevo valor objetivo es $z = 20$, el cual es consistente con

$$\text{Nueva } z = \text{Anterior } z + \text{Nuevo valor de } x_1 \times \text{su coeficiente objetivo}$$
$$= 0 + 4 \times 5 = 20$$

Por otra parte, $z = 4 \times$ valor de $x_1 + 0 \times$ valor de $s_2 + 0 \times$ valor de $s_3 + 0 \times$ valor de $x_4 = 4 \times 5 + 0 \times 2 + 0 \times 5 + 0 \times 2 = 20$.

En la última tabla, la *condición de optimalidad* muestra que x_2 es la variable de entrada. La condición de factibilidad produce la siguiente información:

Básica	Entrante x_2	Solución	Relación
x_1	$\frac{2}{3}$	4	$x_2 = 4 \div \frac{2}{3} = 6$
s_2	$\frac{4}{3}$	2	$x_2 = 2 \div \frac{4}{3} = 1.5$ (mínima)
s_3	$\frac{5}{3}$	5	$x_2 = 5 \div \frac{5}{3} = 3$
s_4	1	2	$x_2 = 2 \div 1 = 2$

Por lo tanto, s_2 sale de la solución básica, y el nuevo valor de x_2 es 1.5. El incremento correspondiente en z es $\frac{2}{3}x_2 = \frac{2}{3} \times 1.5 = 1$, el cual da la nueva $z = 20 + 1 = 21$.

Si reemplazamos s_2 en la columna *Básica* con la x_2 de entrada, se aplican las siguientes operaciones de filas de Gauss-Jordan:

1. Nueva fila pivote x_2 = Fila s_2 actual $\div \frac{4}{3}$
2. Nueva fila z = Fila z actual $-(-\frac{2}{3}) \times$ Nueva fila x_2
3. Nueva fila x_1 = Fila x_1 actual $-(\frac{2}{3}) \times$ Nueva fila x_2
4. Nueva fila s_3 = Fila s_3 actual $-(\frac{5}{3}) \times$ Nueva fila x_2
5. Nueva fila s_4 = Fila s_4 actual $-$ (1) $\times$ Nueva fila x_2

Estos cálculos producen la siguiente tabla:

Básica	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	21
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
s_3	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$
s_4	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$

[3] A lo largo de mi experiencia académica, he notado que si bien los estudiantes son capaces de realizar los tediosos cálculos del método simplex, al final algunos no pueden decir cuál es la solución. Para ayudar a vencer esta dificultad potencial, se hace un esfuerzo por "leer" la solución de la PL por la tabla.

Según la condición de optimalidad, *ninguno* de los coeficientes de la fila z son negativos. De ahí que la última tabla sea óptima.

La solución óptima puede leerse en la tabla simplex de la siguiente manera. Los valores óptimos de las variables en la columna *Basic* aparecen en la columna *Solución* del lado derecho y se interpretan como sigue:

Variable de decisión	Valor óptimo	Recomendación
x_1	3	Producir 3 toneladas diarias de pintura para exteriores
x_2	$\frac{3}{2}$	Producir 1.5 toneladas diarias de pintura para interiores
z	21	La utilidad diaria es de $21,000

La solución también da el estado de los recursos. Un recurso se designa como **escaso** si la variable de holgura asociada es cero, es decir, las actividades (variables) del modelo consumieron el recurso por completo. De lo contrario, si la holgura es positiva, entonces el recurso es **abundante**. La siguiente tabla clasifica las restricciones del modelo:

Recurso	Valor de holgura	Estado
Materia prima, $M1$	$s_1 = 0$	Escaso
Materia prima, $M2$	$s_2 = 0$	Escaso
Límite del mercado	$s_3 = \frac{5}{2}$	Abundante
Límite de la demanda	$s_4 = \frac{1}{2}$	Abundante

Comentarios. La tabla simplex ofrece mucha información adicional que incluye lo siguiente:

1. *Análisis de sensibilidad*, el cual determina las condiciones que mantendrán la solución actual sin cambios.
2. *Análisis postóptimo*, el cual determina la nueva solución óptima cuando cambian los datos del modelo.

La sección 3.6 se ocupa del análisis de sensibilidad. El análisis postóptimo se trata en el capítulo 4.

Momento de TORA.

Los cálculos de Gauss-Jordan son tediosos, voluminosos y, sobre todo, aburridos. No obstante, esto no tiene importancia porque en la práctica la computadora realiza estos cálculos. Lo importante es que entienda *cómo* funciona el método simplex. La opción interactiva *guiada para el usuario* de TORA (con retroalimentación instantánea), puede ser de ayuda porque le permite especificar el curso de los cálculos simplex (es decir, determinar las variables de entrada y de salida) sin el agobio de los cálculos de Gauss-Jordan. Para utilizar TORA con el problema de Reddy Mikks, ingrese el modelo y luego, en el menú SOLVE/MODIFY seleccione los comandos Solve ⇒ Algebraic ⇒ Iterations ⇒ All-Slack. (La selección All-Slack indica que la solución básica inicial se compone de sólo variables de holgura. Las opciones restantes se presentarán en las secciones 3.4, 4.3, y 7.4-2). A continuación, haga clic en el botón Go To Output Screen. Puede generar una o todas las iteraciones haciendo clic en las opciones Next Iteration o bien All Iterations. Si opta por generar las iteraciones de una en una, puede es-

pecificar de manera interactiva las variables de entrada y de salida haciendo clic en los encabezados de sus columnas y filas respectivas. Si sus selecciones son correctas, la columna se torna de color verde y la fila de color rojo. De lo contrario, aparece un mensaje de error.

3.3.3 Resumen del método simplex

Hasta ahora nos hemos ocupado del caso de maximización. En problemas de minimización, la *condición de optimalidad* requiere seleccionar la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente objetivo más *positivo* en la ecuación objetivo, la regla exacta opuesta del caso de maximización. Esto obedece a que máx z equivale a mín $(-z)$. En cuanto a la *condición de factibilidad* para seleccionar la variable de salida, la regla no cambia.

Condición de optimalidad. La variable de entrada en un problema de maximización (minimización) es la variable *no básica* con el coeficiente más negativo (positivo) en la fila z. Los vínculos se rompen arbitrariamente. El óptimo se alcanza en la iteración en la cual los coeficientes en la fila z son no negativos (no positivos).

Condición de factibilidad. Tanto en problemas de maximización como de minimización, la variable de salida es la variable *básica* asociada con la relación mínima no negativa con el denominador *estrictamente positivo.* Los vínculos se rompen arbitrariamente.

Operaciones de filas de Gauss-Jordan

1. *Fila pivote*
   a. Reemplace la variable de entrada en la columna *Básica* con la variable de entrada.
   b. Nueva fila pivote = Fila pivote actual ÷ Elemento pivote
2. *Todas las demás filas, incluida la z*
   Nueva fila = (Fila actual) − (Su coeficiente en la columna pivote) × (Nueva fila pivote).

Los pasos del método simplex son

Paso 0. Determine la solución factible básica inicial.

Paso 1. Seleccione una *variable de entrada* utilizando la condición de optimalidad. Deténgase si no hay variable de entrada; la última condición es óptima. De otro modo, prosiga con el paso 2.

Paso 2. Seleccione una *variable de salida* utilizando la condición de factibilidad.

Paso 3. Aplique los cálculos de Gauss-Jordan para determinar la nueva solución básica. Vaya al paso 1.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.3B

1. Este problema está diseñado para reforzar su comprensión de la condición de factibilidad simplex. En la primera tabla del ejemplo 3.3-1 utilizamos la prueba de relación mínima (no negativa) para determinar la variable de salida. La condición garantiza la factibilidad (todos los nuevos valores de las variables básicas permanecen no negativos según lo

estipulado por la definición de la PL). Para demostrar este punto, haga que s_2, en lugar de s_1, salga de la solución básica, y realice los cálculos de Gauss-Jordan. En la tabla simplex resultante, s_1 es no factible ($= -12$).

2. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\leq 40 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva el problema para cada una de las siguientes funciones objetivo.

(a) Maximizar $z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4$.

(b) Maximizar $z = 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4$.

(c) Maximizar $z = 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4$.

(d) Minimizar $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 8x_4$.

***3.** Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 \qquad\qquad &= 4 \\ 5x_1 - 2x_2 \qquad + 6x_4 \qquad + x_6 \qquad &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 \qquad\qquad + x_7 &= 3 \\ -x_1 \qquad + x_3 - 2x_4 \qquad\qquad + x_8 &= 0 \\ x_1, x_2, \ldots, x_8 &\geq 0 \end{aligned}$$

Sean $x_5, x_6, \ldots,$ y x_8 una solución factible básica inicial dada. Suponga que x_1 se vuelve básica. ¿Cuáles de las variables básicas dadas deben volverse no básicas al nivel cero para garantizar que todas las variables permanezcan no negativas, y cuál es el valor de x_1 en la nueva solución? Repita este procedimiento para x_2, x_3 y x_4.

4. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = x_1$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 4 \\ 6x_1 \qquad + x_3 \qquad &= 8 \\ 3x_1 \qquad\qquad + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Resuelva el problema *por inspección* (no utilice la operaciones de filas de Gauss-Jordan), y justifique la respuesta en función de las soluciones básicas del método simplex.

(b) Repita (a) suponiendo que la función objetivo requiere minimizar $z = x_1$.

5. Resuelva el siguiente problema por *inspección*, y justifique el método de solución en función de las soluciones básicas del método simplex.

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 5x_4 + 12x_5$$

sujeto a

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 3x_5 \leq 90$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(*Sugerencia:* Una solución básica se compone de sólo una variable.)

6. La siguiente tabla representa una iteración simplex específica. Todas las variables son no negativas. La tabla no es óptima en cuanto a maximización o minimización. Por lo tanto, cuando una variable no básica entra en la solución, puede o incrementar o reducir z, o bien dejarla como estaba, según los parámetros de la variable no básica de entrada.

Básica	X_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Solución
z	0	−5	0	4	−1	−10	0	0	620
x_8	0	3	0	−2	−3	−1	5	1	12
x_3	0	1	1	3	1	0	3	0	6
x_1	1	−1	0	0	6	−4	0	0	0

(a) Clasifique las variables como básicas y no básicas, y proporcione los valores actuales de todas las variables.

***(b)** Suponiendo que el problema fuera del tipo de maximización, identifique las variables no básicas que tienen el potencial de mejorar el valor de z. Si cada una de esas variables entra en la solución básica, determine la variable de salida asociada, si la hay, y el cambio asociado de z. No utilice operaciones de filas de Gauss-Jordan.

(c) Repita (b) suponiendo que el problema fuera del tipo de minimización.

(d) ¿Cuál variable o variables no cambiarán el valor de z al seleccionarlas para que entren en la solución?

7. Considere el espacio de soluciones bidimensional que se muestra en la figura 3.6.

(a) Suponga que la función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 6x_2$$

Si las iteraciones simplex se inician en el punto A, identifique la trayectoria que conduce al punto E óptimo.

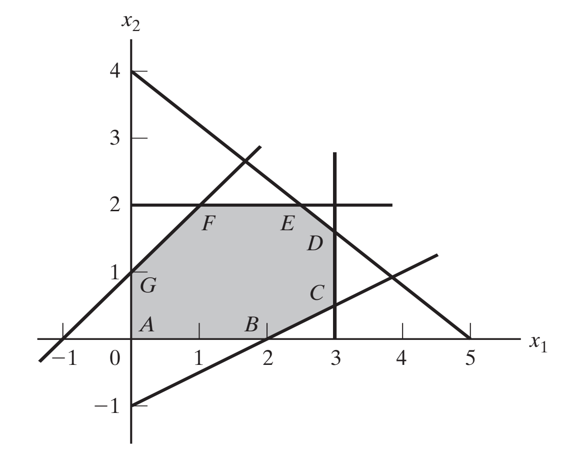


FIGURA 3.6

Espacio de soluciones para el problema 7, conjunto 3.3b

(b) Determine la variable de entrada, las relaciones correspondientes de la condición de factibilidad, y el cambio del valor de z, suponiendo que la iteración inicial ocurre en el punto A y que la función objetivo la da

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + x_2$$

(c) Repita (b), suponiendo que la función objetivo fuera

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 4x_2$$

8. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 16x_1 + 15x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 40x_1 + 31x_2 &\leq 124 \\ -x_1 + \quad x_2 &\leq 1 \\ x_1 \qquad &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Resuelva el problema mediante el método simplex, donde la variable de entrada es la variable no básica con el coeficiente *más* negativo en la fila z.

(b) Resuelva el problema mediante el algoritmo simplex, seleccionando siempre la variable de entrada como la variable no básica con el coeficiente *menos* negativo en la fila z.

(c) Compare la cantidad de iteraciones en (a) y (b). ¿Conduce la selección de la variable de entrada como las variables no básica con el coeficiente *más* negativo en la fila z a un menor número de iteraciones? ¿Qué conclusión puede hacerse con respecto a la condición de optimalidad?

(d) Suponga que el sentido de optimización se cambia a minimización al multiplicar z por -1. ¿Cómo afecta este cambio a las iteraciones de simplex?

***9.** En el ejemplo 3.3-1, muestre cómo puede determinarse el segundo mejor valor óptimo de z desde la tabla óptima.

10. ¿Puede ampliar el procedimiento del problema 9 para determinar el tercer mejor valor óptimo de z?

11. Gutchi Company fabrica bolsos de mano, bolsos para rasuradora y mochilas. La elaboración incluye piel y materiales sintéticos, y la piel es la materia prima escasa. El proceso de producción requiere dos tipos de mano de obra calificada: costura y acabado. La siguiente tabla da la disponibilidad de los recursos, su consumo por los tres productos y las utilidades por unidad.

	Requerimientos de recursos por unidad			
Recurso	*Bolsos de mano*	*Bolsos para rasuradora*	*Mochilas*	Disponibilidad diaria
Piel (pies^2)	2	1	3	42 pies^2
Costura (h)	2	1	2	40 h
Acabado (h)	1	.5	1	45 h
Precio de venta ($)	24	22	45	

(a) Formule el problema como un programa lineal, y halle la solución óptima (utilice TORA, Excel, Solver o AMPL).

(b) A partir de la solución óptima, determine el estado de cada recurso.

12. *Experimento con TORA.* Considere la siguiente programación lineal:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 \leq 4$$
$$5x_1 - 2x_2 + 6x_4 \leq 8$$
$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 3$$
$$-x_1 + x_3 + 2x_4 \leq 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(a) Aplique la opción de iteraciones de TORA para determinar la tabla óptima.

(b) Seleccione cualquier variable no básica para que "entre" en la solución básica, y haga clic en la opción Next Iteration para producir la iteración asociada. ¿Cómo se compara el nuevo valor objetivo con el óptimo en (a)? La idea es demostrar que la tabla en (a) es óptima porque ninguna de las variables no básicas puede mejorar el valor objetivo.

13. *Experimento con TORA*. En el problema 12, utilice TORA para determinar la siguiente mejor solución óptima.

3.4 SOLUCIÓN ARTIFICIAL INICIAL

Como se demostró en el ejemplo 3.3-1, las PL en las que todas las restricciones son ($\leq$) con lados derechos no negativos ofrecen una conveniente solución factible básica inicial con todas las holguras. Los modelos que implican restricciones ($=$) o ($\geq$) no lo hacen.

El procedimiento para iniciar PLs de "mal comportamiento" con restricciones ($=$) y ($\geq$) es utilizar **variables artificiales** que desempeñan el papel de holguras en la primera iteración, y que luego se desechan en una iteración posterior. Aquí se presentan dos métodos estrechamente relacionados: el método *M*, y el método de dos fases.

3.4.1 Método *M*[4]

El método *M* se inicia con la PL en forma de ecuación (sección 3.1). Si la ecuación *i* no tiene una holgura (o una variable que pueda desempeñar el papel de una), se agrega una variable artificial, R_i, para formar una solución inicial parecida a la solución básica de total holgura. Sin embargo, las variables artificiales no forman parte del problema original, y se requiere un "artificio" de modelado para igualarlas a cero en el momento en que se alcance la iteración óptima (suponiendo que el problema tenga una solución factible). La meta deseada se logra *penalizando* estas variables en la función objetivo utilizando la siguiente regla:

---

[4] El método *M*, una de las técnicas de PL más antiguas, nunca se utiliza en códigos comerciales debido a su inherente error de redondeo. En su lugar se prefiere el método de dos fases (sección 3.4.2). Sin embargo, el uso de penalizaciones, como lo anticipa el método *M*, es un importante concepto en muchas instancias de modelado de OR.

Regla de penalización para variables artificiales

Dado M, un valor positivo suficientemente grande (matemáticamente ($M \to \infty$), el coeficiente objetivo de una variable artificial representa una **penalización** apropiada si:

$$\text{Coeficiente objetivo de la variable artificial} = \begin{cases} -M, & \text{en problemas de maximización} \\ M, & \text{en problemas de minimización} \end{cases}$$

Ejemplo 3.4-1

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Si utilizamos x_3 como variable de superávit en la segunda restricción y x_4 como variable de holgura en la tercera restricción, el problema en forma de ecuación es

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

La tercera ecuación tiene su variable de holgura, x_4, pero la primera y segunda ecuaciones no. Por lo tanto, agregamos las variables artificiales R_1 y R_2 en las primeras dos ecuaciones y las penalizamos en la función objetivo con $MR_1 + MR_2$ (porque estamos minimizando). La PL resultante se da como

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + R_1 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución básica inicial es $(R_1, R_2, x_4) = (3, 6, 4)$

Desde un punto de vista de cálculo, la solución del problema con la computadora requiere que reemplace M con un valor numérico (suficientemente grande). No obstante, en todos los libros de texto, incluidas las siete ediciones de este libro, M se maneja algebraicamente en la tabla simplex. El resultado es una dificultad agregada innecesaria la cual puede evitarse sustituyendo

un valor numérico apropiado en lugar de M (lo que de cualquier modo tenemos que hacer cuando usamos la computadora). Nos apartamos de la larga tradición de manejar M algebraicamente y utilizar una sustitución numérica en su lugar. La intención es, desde luego, simplificar la presentación sin perder la esencia.

¿Qué valor de M debemos utilizar? La respuesta depende de los datos de la programación original. Recordemos que la penalización M debe ser lo bastante grande *con respecto a los coeficientes objetivos originales* para forzar a las variables originales a ser cero en la solución óptima. Al mismo tiempo, como las computadoras son la herramienta principal para resolver PLs, no es conveniente que M sea innecesariamente grande ya que ello nos puede conducir a un grave error de redondeo. En este ejemplo, los coeficientes objetivo de x_1 y x_2 son 4 y 1, respectivamente, y parece razonable establecer $M = 100$.[5]

Utilizando $M = 100$, la tabla simplex de inicio se da como sigue (por comodidad, la columna z se elimina porque no cambia en todas las iteraciones):

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	−4	−1	0	−100	−100	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	−1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Antes de proseguir con los cálculos del método simplex, la fila z debe hacerse consistente con el resto de la tabla. El lado derecho de la fila z en la tabla en este momento muestra $z = 0$. Sin embargo, dada la solución no básica $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, la solución básica actual es $R_1 = 3$, $R_2 = 6$ y $x_4 = 4$, la cual da $z = 100 \times 3 + 100 \times 6 + 4 \times 0 = 900$. Esta inconsistencia se deriva del hecho de que los coeficientes de R_1 y R_2 no son cero (−100, −100) en la fila z (compare con la solución de inicio de total holgura en el ejemplo 3.3-1, donde los coeficientes en la fila z de las holguras son cero).

Para eliminar la inconsistencia, tenemos que sustituir R_1 y R_2 en la fila z por medio de la siguiente operación de filas:

$$\text{Nueva fila } z = \text{Anterior fila } z + (100 \times \text{fila } R_1 \times \text{fila } R_2)$$

(Convénzase de que esta operación es la misma que sustituir $R_1 = 3 - 3x_1 - x_2$ y $R_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3$ en la fila z.)

Por tanto, la tabla modificada (¡compruébelo!) es:

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	696	399	−100	0	0	0	900
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	−1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

[5] Técnicamente, el método M no necesita sustituir M numéricamente. En su lugar, el coeficiente en la fila objetivo *i-ésimo* en una tabla simplex se reduce a calcular las constantes a_1 y b_1 en la expresión algebraica $a_iM + b_i$. La comparación de las dos expresiones algebraicas se basará entonces en condiciones que implican sólo las constantes a_i y b_i. La razón por la que no se utiliza en la práctica es la potencialmente tremenda carga de cómputo asociada con el cálculo (y comparación) de las constantes a_i y b_i.

El resultado es que R_1 y R_2 ahora se sustituyen (tienen coeficientes cero) en la fila z con $z =$ 900, como se deseaba.

La última tabla está lista para la aplicación de las condiciones de optimalidad y factibilidad de simplex, tal como se explicó en la sección 3.3.2. Dado que la función objetivo se minimiza, la variable x_1 que tiene el coeficiente más *positivo* en la fila z (=696) entra en la solución. La relación mínima de la condición de factibilidad especifica a R_1 como la variable de salida (¡compruébelo!).

Una vez que se han determinado las variables de entrada y de salida, la nueva tabla se calcula utilizando las conocidas operaciones de Gauss-Jordan.

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
z	0	167	−100	−232	0	0	204
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	$\frac{5}{3}$	−1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
x_4	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	3

La última tabla muestra que x_1 y R_2 son las variables de entrada y de salida, respectivamente. Continuando con los cálculos simplex, se requieren dos iteraciones más para alcanzar el óptimo $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{9}{5}$, $z = \frac{17}{5}$ (¡compruébelo con TORA!).

Observe que las variables artificiales R_1 y R_2 se salen de la solución básica (es decir, se hacen iguales a cero) en la primera y segunda iteraciones, un resultado que es consistente con el concepto de penalizarlas en la función objetivo.

Comentarios. El uso de la penalización M no forzará la variable artificial a cero en la iteración simplex final si la PL no tiene una solución factible (es decir, las restricciones no pueden satisfacerse al mismo tiempo). En este caso, la iteración simplex final incluirá al menos una variable artificial con un valor positivo. En la sección 3.5.4 se explica esta situación.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.4A

1. Complete las iteraciones simplex del ejemplo 3.4-1 con cálculos manuales y obtenga la solución óptima.

2. *Experimento con TORA.* Genere las iteraciones simplex del ejemplo 3.4-1 utilizando el módulo Iterations ⇒ Método M de TORA (archivo *toraEx3.4-1.txt*). Compare el efecto de utilizar $M = 1, M = 10$, y $M = 1000$ en la solución. ¿Qué conclusión se puede sacar de este experimento?

3. En el ejemplo 3.4-1, identifique la tabla de inicio en cada uno de los siguientes casos (independientes) y desarrolle la fila z asociada después de sustituir todas las variables artificiales:

*(a) La tercera restricción es $x_1 + 2x_2 \geq 4$.

*(b) La segunda restricción es $4x_1 + 3x_2 \leq 6$.

(c) La segunda restricción es $4x_1 + 3x_2 = 6$.

(d) La función objetivo es maximizar $z = 4x_1 + x_2$.

4. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$-2x_1 + 3x_2 = 3 \quad (1)$$
$$4x_1 + 5x_2 \geq 10 \quad (2)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad (3)$$
$$6x_1 + 7x_2 \leq 3 \quad (4)$$
$$4x_1 + 8x_2 \geq 5 \quad (5)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

En cada uno de los siguientes problemas, desarrolle la fila z después de sustituir las variables artificiales:

(a) Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$ sujeto a (1), (3) y (4).
(b) Maximizar $z = 2x_1 + 7x_2$ sujeto a (1), (2) (4) y (5).
(c) Minimizar $z = 3x_1 + 6x_2$ sujeto a (3), (4) y (5).
(d) Minimizar $z = 4x_1 + 6x_2$ sujeto a (1), (2) y (5).
(e) Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2$ sujeto a (1) y (5).

5. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7$$
$$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Resuelva el problema con cada una de las siguientes funciones objetivo:

(a) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$.
(b) Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$.
(c) Maximizar $z = x_1 + 2x_2 + x_3$.
(d) Minimizar $z = 4x_1 - 8x_2 + 3x_3$.

***6.** Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Resuelva el problema con x_1 y x_4 como las variables básicas de inicio y sin *utilizar variables artificiales.* (*Sugerencia:* x_3 y x_4 desempeñan el papel de variables holgura. La diferencia principal es que tienen coeficientes objetivo no cero.)

7. Resuelva el siguiente problema con x_3 y x_4 como variables factibles básicas de inicio. Como en el problema 6, *no* utilice variables artificiales.

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 7$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 \geq 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

8. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La variable x_3 desempeña el papel de una holgura. Por lo tanto, no se requiere ninguna variable artificial en la primera restricción. En la segunda restricción, se requiere una variable artificial R. Resuelva el problema con x_3 y R como variables de inicio.

9. Demuestre que el método M llegará a la conclusión de que el siguiente problema no tiene una solución factible.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

3.4.2 Método de dos fases

En el método M, el uso de la penalización, M, puede conducir a un error de redondeo. El método de dos fases elimina el uso de la constante M. Como su nombre lo indica, el método resuelve la PL en dos fases; en la fase I se trata de encontrar la solución factible básica inicial y, si se halla una, se invoca la fase II para resolver el problema original.

Resumen del método de dos fases

Fase I. Ponga el problema en forma de ecuación y agregue las variables artificiales necesarias a las restricciones (exactamente como en el método M), para tener la certeza de una solución básica. A continuación, determine una solución básica de la ecuación resultante que *siempre* minimice la suma de las variables artificiales, independientemente de si la PL es de maximización o minimización. Si el valor mínimo de la suma es positivo, el problema de PL no tiene una solución factible. De lo contrario, si el valor mínimo es cero, prosiga con la fase II.

Fase II. Use la solución factible de la fase I como una solución factible básica inicial para el problema *original*.

Ejemplo 3.4-2

Utilizamos el mismo problema del ejemplo 3.4-1.

Fase I

$$\text{Minimizar } r = R_1 + R_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + R_2 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1,\ x_2, x_3, x_4, R_1, R_2 \geq 0$$

La tabla asociada es

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	−1	−1	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	−1	0	1	0	6
x_4	1	2	0	0	0	1	4

Como en el método M, R_1 y R_2 se sustituyen en la fila r mediante las siguientes operaciones de filas:

$$\text{Nueva fila } r = \text{Anterior fila } r + (1 \times \text{fila } R_1 \times \text{fila } R_2)$$

La nueva fila r se utiliza para resolver la fase I del problema, la cual da por resultado la siguiente tabla óptima (compruébelo con la opción Iterations ⇒ Two fase Method): de TORA:

Básica	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	x_4	Solución
r	0	0	0	−1	−1	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	−1	1	1

Como el mínimo $r = 0$, la fase I produce la solución factible básica $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{6}{5}$ y $x_4 = 1$. En este punto, las variables artificiales ya completaron su misión, y podemos eliminar sus columnas de la tabla y continuar con la fase II.

Fase II

Después de eliminar las columnas artificiales, escribimos el problema *original* como

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 + \tfrac{1}{5}x_3 = \tfrac{3}{5}$$
$$x_2 - \tfrac{3}{5}x_3 = \tfrac{6}{5}$$
$$x_3 + x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

En esencia, la fase I ha transformado las ecuaciones de restricciones originales de tal forma que proporciona una solución factible básica inicial para el problema, si es que existe una. La tabla asociada con la fase II del problema es por consiguiente

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-4	-1	0	0	0
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	1

Una vez más, como las variables básicas x_1 y x_2 tienen coeficientes diferentes a cero en la fila z, deben ser sustituidas, mediante las siguientes operaciones.

$$\text{Nueva fila } z = \text{Anterior fila } z + (4 \times \text{fila } x_1 + 1 \times \text{fila } x_2)$$

La tabla inicial de la fase II es por consiguiente

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{18}{5}$
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_4	0	0	1	1	1

Como estamos minimizando, x_3 debe entrar en la solución. La aplicación del método simplex producirá el óptimo en una iteración (compruébelo con TORA).

Comentarios. La eliminación de las variables artificiales y sus columnas al final de la fase I sólo puede ocurrir cuando todas son *no básicas* (como lo ilustra el ejemplo 3.4-2). Si una o más variables son *básicas* (al nivel *cero*) al final de la fase I, entonces su eliminación requiere los siguientes pasos adicionales:

Paso 1. Seleccione una variable artificial cero que salga de la solución básica y designe su fila como *fila pivote*. La variable de entrada puede ser *cualquier* variable no básica (y no ar-

tificial) con un coeficiente *diferente de cero* (positivo o negativo) en la fila pivote. Realice la iteración simplex asociada.

Paso 2. Elimine la columna de la variable artificial (que acaba de salir) de la tabla. Si ya se eliminaron todas las variables artificiales, continúe con la fase II. De lo contrario, regrese al paso 1.

La lógica detrás del paso I es que la factibilidad de las variables básicas restantes no se verá afectada cuando una variable artificial cero se vuelva no básica independientemente de si el elemento pivote es positivo o negativo. Los problemas 5 y 6, conjunto 3.4b ilustran esta situación. El problema 7 da un detalle adicional sobre los cálculos de la fase I.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.4B

***1.** En la fase I, si la PL es del tipo de maximización, explique por qué no maximiza la suma de las variables artificiales en la fase I.

2. Para cada uno de los casos del problema 4, conjunto 3.4a, escriba la función objetivo correspondiente en la fase I.

3. Resuelva el problema 5, conjunto 3.4a, por el método de dos fases.

4. Escriba la fase I para el siguiente problema, y luego resuélvalo (con TORA por comodidad) para demostrar que el problema no tiene una solución factible.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

5. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(a) Demuestre que la fase I terminará con una variable artificial *básica* en el nivel cero (puede utilizar TORA por comodidad).

(b) Elimine la variable artificial cero antes de iniciar la fase II; luego realice las iteraciones.

6. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(a) Demuestre que la fase I termina con dos variables artificiales cero en la solución básica (use TORA por comodidad).

(b) Demuestre que cuando se aplica el procedimiento del problema 5(b) al final de la fase I, sólo una de las dos variables artificiales cero puede hacerse no básica.

(c) Demuestre que la restricción original asociada con la variable artificial cero que no puede hacerse básica en (b) debe ser redundante; por consiguiente, su fila y columnas pueden eliminarse al inicio de la fase II.

***7.** Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La tabla simplex óptima al final de la fase I es

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R	Solución
r	−5	0	−2	−1	−4	0	0
x_2	2	1	1	0	1	0	2
R	−5	0	−2	−1	−4	1	0

Explique por qué las variables no básicas x_1, x_3, x_4 y x_5 nunca pueden asumir valores positivos al final de la fase II. Por consiguiente, concluimos que sus columnas pueden eliminarse antes de que iniciemos la fase II. En esencia, la eliminación de estas variables reduce las ecuaciones de restricción del problema a $x_2 = 2$, lo que indica que es necesario realizar la fase II en este problema.

8. Considere el modelo de PL

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 - 4x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$5x_1 - 6x_2 + 2x_3 \geq 5$$
$$-x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 8$$
$$2x_1 + 5x_2 - 4x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Demuestre cómo pueden modificarse las desigualdades para un conjunto de ecuaciones que requiere el uso de sólo una variable artificial (en lugar de dos).

3.5 CASOS ESPECIALES EN EL MÉTODO SIMPLEX

Esta sección considera cuatro casos especiales que surgen al aplicar el método simplex.

1. Degeneración
2. Óptimos alternativos
3. Soluciones no acotadas
4. Soluciones no existentes (o no factibles)

Para concluir esta sección se presenta una explicación *teórica* de tales situaciones, e incluso se interpreta el significado de estos casos especiales tomando como tema un problema de la vida real.

3.5.1 Degeneración

Al aplicar la condición de factibilidad del método simplex, se puede presentar un empate por la relación mínima, el cual puede romperse arbitrariamente. Cuando esto sucede, al menos una variable *básica* será cero en la siguiente iteración, y se dice que la nueva solución está **degenerada**.

La degeneración puede hacer que las iteraciones simplex ocurran de forma indefinida en **ciclos**, y que el algoritmo nunca se termine. La condición también revela que el modelo tiene por lo menos una restricción *redundante* (vea también el comentario 2 después de este ejemplo).

El siguiente ejemplo explica los impactos prácticos y teóricos de la degeneración.

Ejemplo 3.5-1 (Solución óptima degenerada)

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 9x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Utilizando las variables de holgura x_3 y x_4, las tablas de solución son

En la iteración 0, x_3 y x_4 empatan como la variable de salida, lo que provoca degeneración en la iteración 1 porque la variable x_4 asume un valor cero. El óptimo se alcanza en una iteración más..

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
0	z	-3	-9	0	0	0
x_2 entra	x_3	1	4	1	0	8
x_3 sale	x_4	1	2	0	1	4
1	z	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18
x_1 entra	x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
x_4 sale	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
2	z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18
(óptimo)	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
	x_1	1	0	-1	2	0

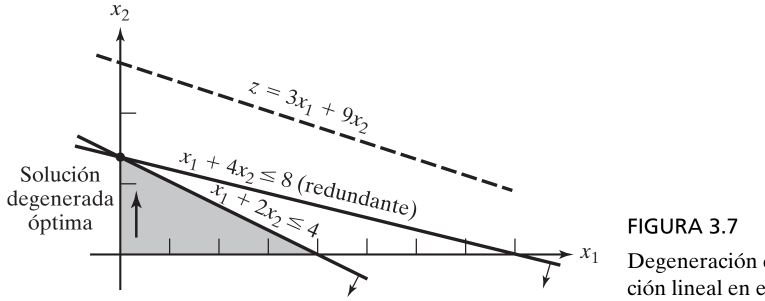


FIGURA 3.7
Degeneración de la programación lineal en el ejemplo 3.5-1

Comentarios.

1. ¿Cuál es la implicación práctica de la degeneración? Al examinar la solución gráfica en la figura 3.7 se ve que pasan tres líneas por el punto óptimo ($x_1 = 0, x_2 = 2$). Como éste es un problema bidimensional, el punto está *sobredeterminado*, y una de las restricciones es redundante.[6] En la práctica, el simple conocimiento de que algunos recursos son superfluos puede ser valioso durante la fase de implementación de la solución. La información también permite descubrir irregularidades en la construcción del modelo. Por desgracia, no existen técnicas de cómputo eficientes para identificar restricciones redundantes directamente desde la tabla.
2. Desde el punto de vista teórico, la degeneración puede provocar **ciclado**. En las iteraciones simplex 1 y 2, el valor objetivo no mejora ($z = 180$), y por lo tanto es posible que el método simplex entre en una secuencia repetitiva de iteraciones que nunca mejoran el valor objetivo ni satisfacen la condición de optimalidad (vea el problema 4, conjunto 3.5a). Aunque haya métodos para eliminar el ciclado, éstos reducen drásticamente los cálculos.[7]
3. Aun cuando quizá un modelo de PL no se inicie con restricciones redundantes (en el sentido directo que se muestra en la figura 3.7), el error de redondeo provocado por la computadora en realidad puede crear condiciones parecidas a la degeneración durante el curso del proceso de solución de una PL de la vida real. En esos casos las iteraciones se "detendrán" en un punto de solución, como si imitaran un ciclado. Los códigos comerciales tratan de aligerar el problema al perturbar periódicamente los valores de las variables básicas (para más detalles sobre cómo se desarrollan los códigos comerciales vea la sección 3.7).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5A

*1. Considere el espacio de soluciones gráficas que se muestra en la figura 3.8. Suponga que las iteraciones simplex se inician en A y que la solución óptima ocurre en D. Además, suponga que la función objetivo se define de modo que en A, x_1 ingresa primero la solución.
   (a) Identifique (en la gráfica) los puntos de esquina que definen la trayectoria del método simplex hacia el punto óptimo.
   (b) Determine el número máximo posible de iteraciones simplex necesarias para alcanzar la solución óptima, suponiendo que no hay ciclado.

[6] Por lo general la redundancia implica que las restricciones pueden eliminarse sin afectar el espacio de soluciones factible. Un ejemplo a veces citado es $x + y \leq 1, x \geq 1, y \geq 0$, donde la eliminación de cualquier restricción cambiará el espacio factible desde un punto único a una región. Basta decir que esta condición es cierta sólo si el espacio de soluciones se compone de un solo punto factible, una ocurrencia sumamente improbable en PL grandes (en la vida real).
[7] Vea Bland R., "New Finite Pivoting for the Simplex Method", *Mathematics of Operations Research*, vol. 2, núm., 2, págs. 103-107, 1977.

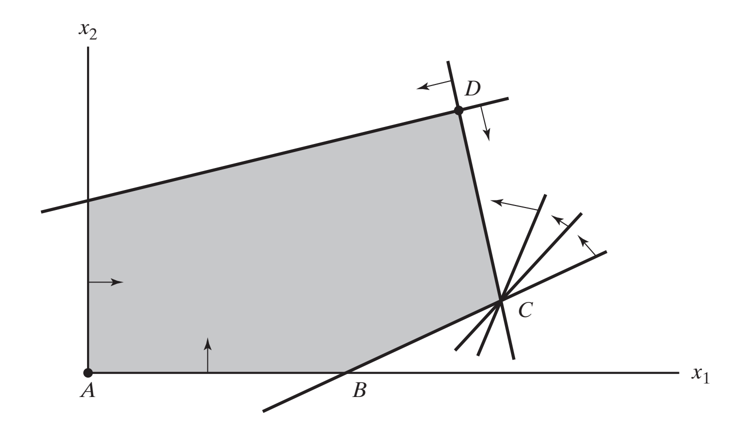


FIGURA 3.8
Espacio de soluciones del problema 1, conjunto 3.5a

2. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$4x_1 - x_2 \leq 8$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$4x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) Demuestre que las iteraciones simplex asociadas son temporalmente degeneradas (puede utilizar TORA por comodidad).

(b) Verifique el resultado resolviendo el problema con el módulo gráfico de TORA.

3. *Experimento con TORA*. Considere la PL en el problema 2.

(a) Use TORA para generar las iteraciones simplex. ¿Cuántas iteraciones se requieren para alcanzar el óptimo?

(b) Intercambie las restricciones (1) y (3) y vuelva a resolver el problema con TORA. ¿Cuántas iteraciones se requieren para resolverlo?

(c) Explique por qué los números de iteraciones en (a) y (b) son diferentes.

4. *Experimento con TORA*. Considere la siguiente PL (escrita por E.M. Beale para demostrar el ciclado):

$$\text{Maximizar } z = \tfrac{3}{4}x_1 - 20x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - 6x_4$$

sujeto a

$$\tfrac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0$$
$$\tfrac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + 3x_4 \leq 0$$
$$x_3 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

En el menú SOLVE/MODIFY de TORA, seleccione las opciones Solve ⇒ Algebraic ⇒ Iterations ⇒ All-slack. A continuación, "recorra" las iteraciones simplex sucesivas por medio del comando Next iteration (no utilice All iterations, porque entonces el método simplex entrará en un proceso de ciclado durante un tiempo indefinido). Notará que la solución factible básica inicial con todas las holguras en la iteración 0 reaparecerá de forma idéntica en la iteración 6. Este ejemplo ilustra la ocurrencia de ciclado en las iteraciones simplex y la posibilidad de que el algoritmo nunca converja hacia la solución óptima. (Lo interesante en este ejemplo es que si todos los coeficientes en esta PL se convierten en enteros, el ciclado no ocurre. ¡Haga la prueba!).

3.5.2 Óptimos alternativos

Un problema de PL puede tener una cantidad infinita de *óptimos alternativos* cuando la función objetivo es paralela a una restricción *obligatoria* no redundante (es decir, una restricción que se satisface como una ecuación en la solución óptima). El siguiente ejemplo demuestra la importancia práctica de tales soluciones.

Ejemplo 3.5-2 (Cantidad infinita de soluciones)

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La figura 3.9 demuestra cómo pueden surgir óptimos alternativos en el modelo de PL cuando la función objetivo es paralela a una restricción obligatoria. Cualquier punto sobre el *segmento de línea BC* representa un óptimo alternativo con el mismo valor objetivo $z = 10$.

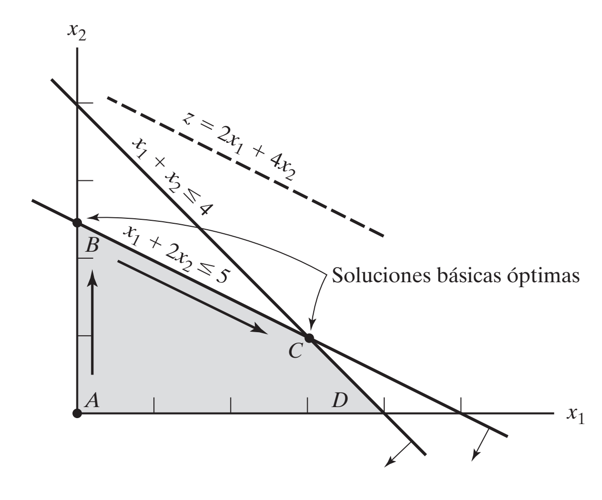


FIGURA 3.9
Óptimos alternativos de PL en el ejemplo 3.5-2

Las iteraciones del modelo se dan en la siguiente tabla.

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
0	z	-2	-4	0	0	0
x_2 entra	x_3	1	2	1	0	5
x_3 sale	x_4	1	1	0	1	4
1 (óptimo)	z	0	0	2	0	10
x_1 entra	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_4 sale	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
2	z	0	0	2	0	10
(óptimo alternativo)	x_2	0	1	1	-1	1
	x_1	1	0	-1	2	3

La iteración 1 proporciona la solución óptima $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2}$ y $z = 10$ (punto B en la figura 3.9). La existencia de un óptimo alternativo puede detectarse en la tabla óptima examinando los coeficientes de las variables *no* básicas de la ecuación z. El coeficiente cero de la x_1 no básica indica que x_1 puede hacerse básica, modificando los valores de las variables básicas sin cambiar el valor de z. La iteración 2 hace justo eso, aplicando x_1 y x_4 como las variables de entrada y de salida, respectivamente. El nuevo punto de solución ocurre en C ($x_1 = 3, x_2 = 1, z = 10$).La opción "Iterations" de TORA permite determinar un óptimo alternativo.)

El método simplex determina sólo puntos de esquina óptimos; es decir, los puntos B y C en el presente ejemplo. Podemos determinar de manera matemática todos los puntos (x_1, x_2) sobre el segmento de línea BC como un promedio ponderado no negativo de los puntos $B(x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2})$ $C(x_1 = 3, x_2 = 1)$, de lo que se concluye

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \alpha(0) + (1 - \alpha)(3) = 3 - 3\alpha \\ \hat{x}_2 &= \alpha\left(\tfrac{5}{2}\right) + (1 - \alpha)(1) = 1 + \tfrac{3}{2}\alpha \end{aligned}\right\}, 0 \leq \alpha \leq 1$$

Comentarios. En la práctica, los óptimos alternativos son útiles porque podemos elegir de entre muchas soluciones sin que se deteriore del valor objetivo. Digamos que en este ejemplo la solución en B muestra que la actividad 2 sólo está en un nivel positivo; en cambio, en C ambas actividades están en un nivel positivo. Si el ejemplo representa una situación de combinación de productos, puede ser ventajoso comercializar dos productos en lugar de uno.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5B

***1.** Para la siguiente PL, identifique tres soluciones básicas óptimas alternativas que comprendan estas tres soluciones básicas

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Nota: Aun cuando el problema tiene más de tres soluciones óptimas básicas alternativas, sólo necesita identificar tres de ellas. Puede utilizar TORA por comodidad.

2. Resuelva la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 5x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

A partir de la tabla óptima, demuestre que no todos los óptimos alternativos son puntos de esquina (es decir, no básicos). Provea una demostración gráfica bidimensional del tipo de espacio de soluciones y de función objetivo que producirá este resultado. (Puede utilizar TORA por comodidad.)

3. Para la siguiente PL demuestre que la solución óptima está degenerada y que las soluciones alternativas no son puntos de esquina (puede utilizar TORA por comodidad).

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2 \\ 7x_1 + 3x_2 - 5x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3.5.3 Solución no acotada

En algunos modelos de programación lineal, el espacio de soluciones es *no acotado* en por lo menos una variable, es decir que las variables pueden incrementarse de forma indefinida sin violar ninguna de las restricciones. En este caso el valor objetivo asociado también puede ser no acotado.

Un espacio de soluciones no acotado casi siempre indica que el modelo está mal construido. La irregularidad más probable en tales modelos es que no se han tomado en cuenta algunas restricciones clave. Otra posibilidad es que las estimaciones de los coeficientes de las restricciones quizá no sean precisas.

Ejemplo 3.5-3 (Valor objetivo no acotado)

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$2x_1 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Iteración de inicio

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	−2	−1	0	0	0
x_3	1	−1	1	0	10
x_4	2	0	0	1	40

En la tabla de inicio, tanto x_1 como x_2 tienen coeficientes negativos en la ecuación z, lo que significa que al incrementarse sus valores también lo hará el valor objetivo. Aunque x_1 debe ser la variable de entrada (tiene el coeficiente z más negativo), observamos que *todos* los coeficientes de *restricción* bajo x_2 son ≤ 0; lo que significa que x_2 puede incrementarse indefinidamente sin violar ninguna de las restricciones (compare con la interpretación gráfica de la relación mínima en la figura 3.5). El resultado es que z puede incrementarse indefinidamente. La figura 3.10 muestra el espacio de soluciones no acotado y también que x_2 y z pueden incrementarse indefinidamente.

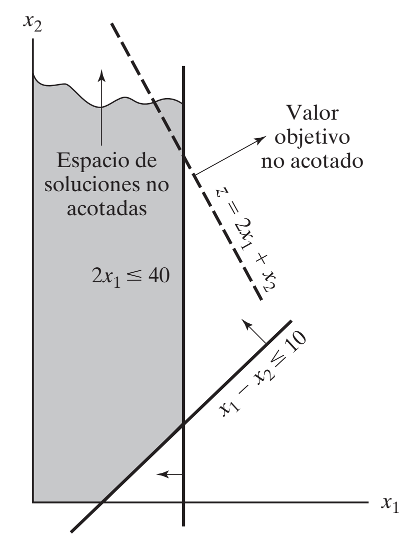


FIGURA 3.10
Solución no acotada de PL en el ejemplo 3.5-3

Comentarios. Si se hubiera seleccionado x_1 como la variable de entrada en la iteración de inicio (conforme a la condición de optimalidad), a fin de cuentas, una iteración posterior habría producido una variable de entrada con las mismas propiedades que x_2. Vea el problema 1, conjunto 3.5c.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5C

1. *Experimento con TORA*. Resuelva el ejemplo 3.5-3 aplicando la opción Iterations de TORA y demuestre que aunque la solución se inicia con x_1 como variable de entrada (conforme a la condición de optimalidad), el algoritmo simplex finalmente apuntará hacia una solución no acotada.

***2.** Considere la PL:

$$\text{Maximizar } z = 20x_1 + 10x_2 + x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 &\leq 50 \\ x_1 \qquad\quad + \; x_3 &\leq 10 \\ x_1 - \; x_2 + 4x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Inspeccionando las restricciones, determine la dirección (x_1, x_2 o x_3) en que el espacio de soluciones sea no acotado.

(b) Sin más cálculos, ¿qué puede concluir con respecto al valor objetivo óptimo?

3. En algunos modelos de PL mal construidos, el espacio de soluciones puede ser no acotado aun cuando el problema pueda tener un valor objetivo acotado. Semejante ocurrencia apunta hacia posibles irregularidades en la construcción del modelo. En problemas grandes, puede ser difícil detectar la situación de "acotación" por inspección. Idee un procedimiento analítico para determinar si el espacio de soluciones es no acotado.

3.5.4 Solución no factible

Los modelos PL con restricciones inconsistentes no tienen una solución factible. Esta situación no ocurre si *todas* las restricciones son del tipo $\leq$ con lados derechos no negativos porque las holguras proporcionan una solución factible obvia. Para otros tipos de restricciones, se utilizan variables artificiales penalizadas para iniciar la solución. Si al menos una variable artificial es *positiva* en la iteración óptima, entonces la PL no tiene una solución factible. Desde el punto de vista práctico, un espacio no factible apunta hacia la posibilidad de que el modelo se formuló de manera incorrecta.

Ejemplo 3.5-4 (Espacio de soluciones no factibles)

Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

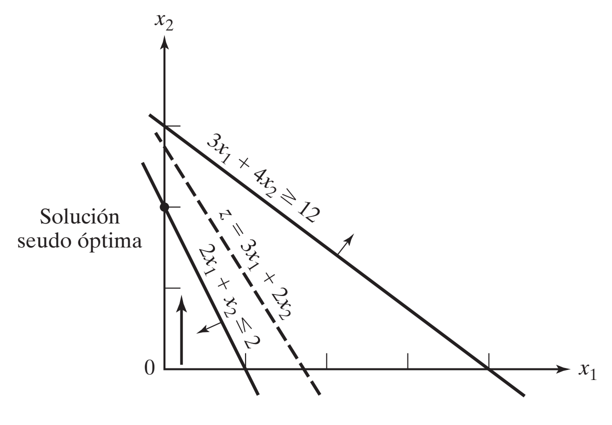


FIGURA 3.11
Solución no factible del ejemplo 3.5-4

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Aplicando la penalización $M = 100$ para la variable artificial R, la siguiente tabla proporciona la iteración simplex del modelo.

Iteración	Básica	x_1	x_2	x_4	x_3	R	Solución
0	z	−303	−402	100	0	0	−1200
x_2 entra	x_3	2	1	0	1	0	2
x_3 sale	R	3	4	−1	0	1	12
1	z	501	0	100	402	0	−396
(seudo óptima)	x_2	2	1	0	1	0	2
	R	−5	0	−1	−4	1	4

La iteración óptima 1 muestra que la variable artificial R es *positiva* (= 4), es decir que la PL es no factible. La figura 3.11 ilustra el espacio de soluciones no factibles. Al permitir que la variable artificial sea positiva, el método simplex de hecho ha invertido la dirección de la desigualdad de $3x_1 + 4x_2 \geq 12$ a $3x_1 + 4x_2 \leq 12$ (¿puede explicar cómo?). El resultado es lo que podemos llamar una solución **seudo óptima**.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.5D

1. *Toolco produce tres tipos de herramientas, $T1$, $T2$ y $T3$. Las herramientas utilizan dos materias primas, $M1$ y $M2$, según los datos que aparecen en la siguiente tabla:

	Cantidad de unidades de materias primas por herramienta		
Materia prima	*T1*	*T2*	*T3*
*M*1	3	5	6
*M*2	5	3	4

Las cantidades diarias de materias primas $M1$ y $M2$ son 1000 unidades y 1200 unidades, respectivamente. La investigación del mercado muestra que la demanda diaria de las tres herramientas debe ser por lo menos de 500 unidades. ¿Puede satisfacer la demanda el departamento de fabricación? Si no, ¿cuál es la máxima cantidad que Toolco puede producir?

2. *Experimento con TORA.* Considere el modelo de programación lineal

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Active la opción Iterations ⇒ *M*-Method para mostrar que la solución óptima incluye una variable básica artificial, pero en el nivel cero. ¿Tiene el problema una solución óptima *factible*?

3.6 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En PL, los parámetros (datos de entrada) del modelo pueden cambiar dentro de ciertos límites sin que cambie la solución óptima. Esto se conoce como *análisis de sensibilidad* y será el tema de esta sección. Más adelante, en el capítulo 4 estudiaremos el análisis *post óptimo*, el cual tiene que ver con la determinación de la nueva solución óptima cuando se cambian ciertos datos de entrada.

La presentación explica las ideas básicas del análisis de sensibilidad por medio de la solución gráfica, y después se extienden al problema general de PL con base en los resultados que aparecen en la tabla simplex.

3.6.1 Análisis de sensibilidad gráfica

Esta sección demuestra la idea general del análisis de sensibilidad. Se considerarán dos casos:

1. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios de la disponibilidad de los recursos (lado derecho de las restricciones).
2. La sensibilidad de la solución óptima a los cambios en la utilidad unitaria o el costo unitario (coeficientes de la función objetivo).

Utilizaremos ejemplos individuales para explicar los dos casos.

Ejemplo 3.6-1 (Cambios en el lado derecho)

JOBCO fabrica dos productos en dos máquinas. Una unidad del producto 1 requiere 2 horas en la máquina 1, y 1 hora en la máquina 2. Una unidad del producto 2 requiere 1 hora en la máquina 1, y 3 horas en la máquina 2. Los ingresos por unidad de los productos 1 y 2 son de \$30 y \$20, respectivamente. El tiempo de procesamiento diario total disponible en cada máquina es de 8 horas.

Si x_1 y x_2 son las cantidades diarias de unidades de los productos 1 y 2, respectivamente, el modelo de PL se da como

$$\text{Maximizar } z = 30x_1 + 20x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \qquad \text{(Máquina 1)}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 8 \qquad \text{(Máquina 2)}$$

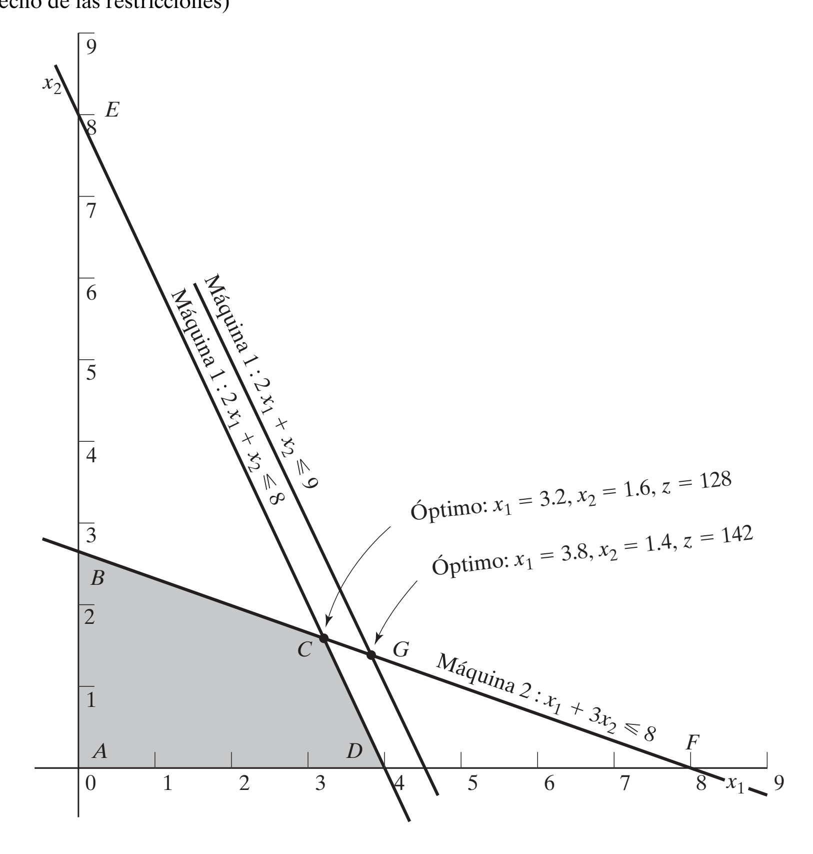
$$x_1, x_2 \geq 0$$

La figura 3.12 ilustra el cambio de la solución óptima cuando se cambia la capacidad de la máquina 1. Si la capacidad diaria se incrementa de 8 a 9 horas, el nuevo óptimo se moverá al punto G. La tasa de cambio en la z óptima a consecuencia del cambio de la capacidad de la máquina 1 de 8 a 9 horas se calcula como:

$$\begin{pmatrix} \text{Tasa de cambio del ingreso} \\ \text{a consecuencia del incremento} \\ \text{de la capacidad de la máquina 1} \\ \text{en 1 hora (punto } C \text{ a punto } G) \end{pmatrix} = \frac{z_G - z_C}{(\text{Cambio de la capacidad})} = \frac{142 - 128}{9 - 8} = \$14/\text{h}$$

FIGURA 3.12

Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en la disponibilidad de recursos (lado derecho de las restricciones)



La tasa calculada proporciona un vínculo *directo* entre los datos de entrada al modelo (recursos) y sus resultados (ingreso total). Se dice que un incremento unitario (reducción) en la capacidad de la máquina 1 aumentará (reducirá) el ingreso en $14.00.

El nombre **valor unitario de un recurso** es una descripción apropiada de la tasa de cambio de la función objetivo por cambio unitario de un recurso. No obstante, los primeros desarrollos de la PL acuñaron el nombre abstracto de **precio dual (**o **sombra)**, y ahora este nombre es un estándar en toda la literatura de PL y en paquetes de "software". La presentación en este libro se ajusta a este estándar.

En la figura 3.12 podemos ver que el precio dual de $14/h permanece válido para cambios (incrementos o reducciones) en la capacidad de la máquina 1 que mueven su restricción paralela a sí misma a cualquier punto sobre el segmento de línea *BF*. Calculamos las capacidades de la máquina 1 en los puntos B y F como sigue:

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 1 [en } B = (0.267)] = 2 \times 0 + 1 \times 2.67 = 2.67 \text{ h}$$

$$\text{Capacidad máxima de la máquina 1 [en } F = (8{,}0)] = 2 \times 8 + 1 \times 0 = 16 \text{ h}$$

La conclusión es que el precio dual de $14/h permanece válido en el intervalo

$$2.67 \text{ h} \leq \text{Capacidad de la máquina 1} \leq 16 \text{ h}$$

Los cambios fuera de este intervalo producen un precio dual diferente (valor por unidad).

Elaborando cálculos similares podemos verificar que el precio dual para la capacidad de la máquina 2 es de $2.00/h, y que no cambia cuando su capacidad se mantiene dentro del segmento de línea *DE*. Ahora,

$$\text{Capacidad mínima de la máquina 2 [en } D = (4{,}0)] = 1 \times 4 + 3 \times 0 = 4 \text{ h}$$

$$\text{Capacidad máxima de la máquina 2 [en } E = (8{,}0)] = 1 \times 0 + 3 \times 8 = 24 \text{ h}$$

Por lo tanto, el precio dual de $200/h para la máquina 2 no cambia dentro del intervalo

$$4 \text{ h} \leq \text{Capacidad de la máquina 2} \leq 24 \text{ h}$$

Los límites calculados para las máquinas 1 y 2 se conocen como **intervalos de factibilidad**. Todos los paquetes de "software" proporcionan información sobre los precios duales y sus intervalos de factibilidad. La sección 3.6.4 muestra cómo generan esta información AMPL, Solver y TORA.

Los precios duales permiten tomar decisiones económicas sobre el problema de PL, como las siguientes preguntas lo demuestran:

Pregunta 1. Si JOBCO puede incrementar la capacidad de ambas máquinas, ¿cuál máquina tendrá la prioridad?

Según los precios duales para las máquinas 1 y 2, cada hora adicional de la máquina 1 incrementa el ingreso en $14, en comparación con sólo $2 para la máquina 2. Por lo tanto, la máquina 1 debe tener la prioridad.

Pregunta 2. Se sugiere incrementar las capacidades de las máquinas 1 y 2 al costo adicional de $10/h para cada máquina. ¿Es esto aconsejable?

Para la máquina 1, el ingreso neto adicional por hora es $14 - 10 = \$4$, y para la máquina 2, es $\$2 - \$10 = -\$8$. Por consiguiente, sólo la máquina 1 debe considerarse para el incremento de capacidad.

Pregunta 3. Si la capacidad de la máquina 1 se incrementa de 8 a 13 horas, ¿cómo impactará este incremento al ingreso óptimo?

El precio dual para la máquina 1 es $14 y es válido en el intervalo (2.67,16)h. El incremento propuesto de 13 horas queda comprendido dentro del intervalo de factibilidad. Por consiguiente, el incremento del ingreso es $\$14(13 - 8) = \$70$, lo que significa que el ingreso total se incrementará de $128 a $198 (= $128 + $70).

Pregunta 4. Suponga que la capacidad de la máquina 1 se incrementa a 20 horas, ¿cómo afectará este incremento al ingreso óptimo?

El cambio propuesto queda fuera del intervalo de factibilidad (2.67,16)h. Por lo tanto, sólo podemos hacer una conclusión inmediata con respecto a un incremento hasta de 16 horas. Más allá de eso, se requieren más cálculos para hallar la respuesta (vea el capítulo 4). Recuerde que quedar fuera del intervalo de factibilidad *no* significa que el problema no tenga solución, sino que la información disponible no es suficiente para llegar a una conclusión completa.

Pregunta 5. ¿Cómo podemos determinar los nuevos valores óptimos de las variables asociadas con el cambio de un recurso?

Los valores óptimos de las variables cambiarán. Sin embargo, el procedimiento para determinar estos valores requiere más cálculos, como se demostrará en la sección 3.6.2.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6A

1. Una compañía fabrica dos productos, A y B. Los ingresos unitarios son \$2 y \$3, respectivamente. Las disponibilidades diarias de dos materias primas, $M1$ y $M2$, utilizadas en la fabricación de los dos productos son de 8 y 18 unidades, respectivamente. Una unidad de A utiliza 2 unidades de $M1$ y 2 unidades de $M2$, y una unidad de B utiliza 3 unidades de $M1$ y 6 unidades de $M2$.

- **(a)** Determine los precios duales de $M1$ y $M2$ y sus intervalos de factibilidad.
- **(b)** Suponga que pueden adquirirse 4 unidades más de $M1$ al costo de 30 centavos por unidad. ¿Recomendaría la compra adicional?
- **(c)** ¿Cuánto es lo máximo que la compañía debe pagar por unidad de $M2$?
- **(d)** Si la disponibilidad de $M2$ se incrementa en 5 unidades, determine el ingreso óptimo asociado.

***2.** Wild West produce dos tipos de sombreros texanos. Un sombrero tipo A requiere dos veces la mano de obra que el tipo 2. Si toda la mano de obra disponible se dedica sólo al tipo 2, la compañía puede producir un total de 400 sombreros tipo 2 al día. Los límites de mercado respectivos para los dos tipos son 150 y 200 sombreros por día. El ingreso es de \$8 por sombrero tipo 1 y de \$5 por sombrero tipo 2.

- **(a)** Use la solución gráfica para determinar la cantidad de sombreros de cada tipo que maximice el ingreso.
- **(b)** Determine el precio dual de la capacidad de producción (en función del sombrero tipo 2) y el intervalo dentro del cual es aplicable.
- **(c)** Si el límite de la demanda diaria del sombrero tipo 1 se reduce a 120, use el precio dual para determinar el efecto correspondiente en el ingreso óptimo.
- **(d)** ¿Cuál es el precio dual de la participación en el mercado del sombrero tipo 2? ¿Qué tanto se puede incrementar la participación en el mercado al mismo tiempo que se obtiene el valor calculado por unidad?

Ejemplo 3.6-2 (Cambios en los coeficientes objetivo)

La figura 3.13 muestra el espacio de soluciones gráficas del problema de JOBCO presentado en el ejemplo 3.6-1. El óptimo ocurre en el punto C ($x_1 = 3.2, x_2 = 1.6, z = 128$). Los cambios en unidades de ingresos (es decir, los coeficientes de la función objetivo) modificarán la pendiente de z. Sin embargo, como puede verse en la figura, la solución óptima en el punto C no cambia en tanto la función objetivo quede entre las líneas BF y DE.

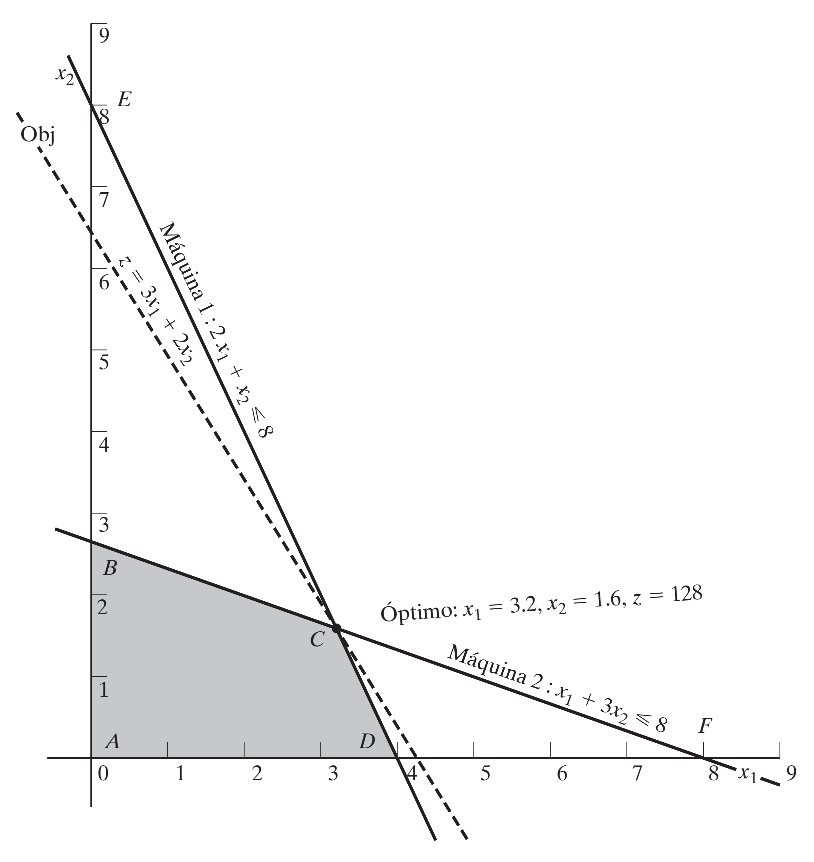


FIGURA 3.13

Sensibilidad gráfica de la solución óptima a cambios en las unidades de ingreso (coeficientes de la función objetivo)

¿Cómo podemos determinar los intervalos para los coeficientes de la función objetivo que mantendrán inalterable la función óptima en *C*? Primero, escribimos la función objetivo en el formato general

$$\text{Maximizar } z = c_1x_1 + c_2x_2$$

Imagine ahora que la línea z está pivotada en *C* y que puede girar en el sentido de las manecillas del reloj, así como en el sentido contrario. La solución óptima permanecerá en el punto *C* en tanto $z = c_1x_1 + c_2x_2$ quede entre las dos líneas $x_1 + 3x_2 = 8$, y $2x_1 + x_2 = 8$. Esto significa que la relación $\frac{c_1}{c_2}$ puede variar entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{1}$, lo que resulta en el siguiente **intervalo de optimalidad**:[8]

$$\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{2}{1} \text{ o } .333 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$$

[8] La condición de "relación" funciona correctamente en esta situación porque las pendientes para las dos líneas que pasan por el punto óptimo *C* tienen el mismo signo. Otras situaciones son más complejas.

Esta información proporciona respuestas inmediatas con respecto a la solución óptima como la siguiente pregunta lo demuestra:

Pregunta 1. Suponga que los ingresos unitarios producidos para los productos 1 y 2 cambian a \$35 y \$25, respectivamente. ¿Permanecerá igual el óptimo actual?

La nueva función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 35x_1 + 25x_2$$

La solución en C permanecerá óptima porque $\frac{c_1}{c_2} = \frac{35}{25} = 1.4$ permanece dentro del intervalo de optimalidad (.333,2). Cuando la relación queda afuera de este intervalo, se requieren más cálculos para determinar el nuevo óptimo (vea el capítulo 4). Observe que aunque los valores de las variables en el punto óptimo C no cambian, el valor óptimo de z cambia a $35 \times (3.2) + 25 \times (1.6) = \$152$.

Pregunta 2. Suponga que el ingreso unitario del producto 2 se fija a su valor actual $c_2 = \$20$. ¿Cuál es el intervalo de optimalidad asociado para el ingreso unitario del producto 1, c_1, que mantendrá el óptimo sin cambio?

Sustituyendo $c_2 = 20$ en la condición $\frac{1}{3} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$, obtenemos

$$\tfrac{1}{3} \times 20 \leq c_1 \leq 2 \times 20 \text{ o } 6.67 \leq c_1 \leq 40$$

Este intervalo asume implícitamente que c_2 se mantiene fijo en \$20.

Del mismo modo podemos determinar el intervalo de optimalidad para c_2 si fijamos el valor de c_1 en \$30. Por lo tanto,

$$(c_2 \leq 30 \times 3 \text{ y } c_2 \geq \tfrac{30}{2}) \text{ o } 15 \leq c_2 \leq 90$$

Como en el caso del lado derecho, todos los paquetes de software proporcionan los intervalos de optimalidad para cada uno de los coeficientes de la función objetivo. La sección 3.6.4 muestra cómo AMPL, Solver y TORA generan estos resultados.

Comentarios. Aunque el material en esta sección se ocupó de dos variables, los resultados sientan las bases para el desarrollo del análisis de sensibilidad para el problema general de PL en las secciones 3.6.2 y 3.6.3.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6B

1. Considere el problema 1, conjunto 3.6a.
   - **(a)** Determine la condición de optimalidad para $\frac{c_A}{c_B}$ que mantendrá el óptimo sin cambio.
   - **(b)** Determine los intervalos de optimalidad para c_A y c_B, suponiendo que el otro coeficiente se mantiene constante en su valor actual.
   - **(c)** Si los ingresos unitarios c_A y c_B cambian al mismo tiempo a \$5 y \$4, respectivamente, determine la nueva solución óptima.
   - **(d)** Si los cambios en (c) se hacen uno a la vez, ¿qué se puede decir sobre la solución óptima?

2. En el modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2.2-1:
   - **(a)** Determine el intervalo para la relación del ingreso unitario de la pintura para exteriores con el ingreso unitario de la pintura para interiores.

(b) Si el ingreso por tonelada de pintura para exteriores permanece constante en $5000 por tonelada, determine el ingreso unitario máximo de la pintura para interiores que mantendrá la solución óptima presente sin cambios.

(c) Si por razones de comercialización el ingreso unitario de pintura para interiores debe reducirse a $3000, ¿cambiará la combinación de producción óptima actual?

*__3.__ En el problema 2, conjunto 3.6a:

(a) Determine el intervalo de optimalidad para la relación de los ingresos unitarios de los dos tipos de sombreros que mantendrá el óptimo actual sin cambiar.

(b) Con la información en (b), ¿cambiará la solución óptima si el ingreso por unidad es el mismo para ambos tipos?

3.6.2 Análisis de sensibilidad algebraica. Cambios en el lado derecho

En la sección 3.6.1, utilizamos la solución gráfica para determinar el *precio dual* (valor unitario de un recurso) y sus intervalos de factibilidad. Esta sección amplía el análisis al modelo de PL general. Se utilizará un ejemplo numérico (el modelo de TOYCO) para facilitar la presentación.

Ejemplo 3.6-3 (Modelo de TOYCO)

TOYCO utiliza tres operaciones para armar tres tipos de juguetes: trenes, camiones y carros. Los tiempos diarios disponibles para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos, respectivamente, y los ingresos por unidad de tren, camión y auto de juguete son de $3, $2 y $5, respectivamente. Los tiempos de ensamble por tren en las tres operaciones son de 1, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los tiempos correspondientes por tren y por auto son (2,0,4) y (1,2,0) minutos (un tiempo cero indica que la operación no se utiliza).

Sean x_1, x_2 y x_3 las cantidades diarias de unidades ensambladas de trenes, camiones y autos, respectivamente, el modelo de PL asociado se da como:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 430 \text{ (Operación 1)} \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 460 \text{ (Operación 2)} \\ x_1 + 4x_2 &\leq 420 \text{ (Operación 3)} \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando x_4, x_5 y x_6 como las variables de holgura para las restricciones de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente, la tabla óptima es

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

La solución recomienda fabricar 100 camiones y 230 autos pero no trenes. El ingreso asociado es $1350.

Determinación de precios duales e intervalos de factibilidad. Utilizaremos el modelo de TOYCO para demostrar cómo se obtiene esta información con la tabla simplex óptima. Reconociendo que los precios duales y sus intervalos de factibilidad tienen que ver con los cambios del lado derecho de las restricciones, suponga que D_1, D_2 y D_3 son los cambios (positivos o negativos) realizados en el tiempo de fabricación diario asignado de las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente. El modelo de TOYCO original puede cambiarse entonces a

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 430 + D_1 &\quad &\text{(Operación 1)}\\
3x_1 \qquad + 2x_3 &\leq 460 + D_2 &\quad &\text{(Operación 2)}\\
x_1 + 4x_2 \qquad &\leq 420 + D_3 &\quad &\text{(Operación 3)}\\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Para expresar la tabla simplex óptima del problema modificado en función de los cambios D_1, D_2 y D_3, primero volvemos a escribir la tabla de inicio con los nuevos lados derechos, $430 + D_1$, $460 + D_2$ y $420 + D_3$.

							Solución			
Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*RHS*	D_1	D_2	D_3
z	−3	−2	−5	0	0	0	0	0	0	0
x_4	1	2	1	1	0	0	430	1	0	0
x_5	3	0	2	0	1	0	460	0	1	0
x_6	1	4	0	0	0	1	420	0	0	1

Las dos áreas sombreadas son idénticas. Por consiguiente, si repetimos las *mismas* iteraciones simplex (con las *mismas* operaciones de filas) como en el modelo *original*, las columnas en las dos áreas resaltadas también serán idénticas en la tabla óptima, es decir

							Solución			
Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	*RHS*	D_1	D_2	D_3
z	4	0	0	1	2	0	1350	1	2	0
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230	0	$\frac{1}{2}$	0
x_6	2	0	0	−2	1	1	20	−2	1	1

La nueva tabla óptima da la siguiente solución óptima:

$$z = 1350 + D_1 + 2D_2$$
$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2} D_1 - \tfrac{1}{4} D_2$$
$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2} D_2$$
$$x_6 = 20 - 2D_1 + D_2 + D_3$$

Ahora utilizamos esta solución para determinar los precios duales y los intervalos de factibilidad.

Precios duales: El valor de la función objetivo puede escribirse como

$$z = 1350 + \mathbf{1}D_1 + \mathbf{2}D_2 + \mathbf{0}D_3$$

La ecuación muestra que

1. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 1 ($D_1 = \pm 1$ min) cambia a z en \$1.
2. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 2 ($D_2 = \pm 1$ min) cambia a z en \$2.
3. Un cambio unitario en la capacidad de la operación 3 ($D_3 = \pm 1$ min) cambia a z en \$0.

Esto significa que, por definición, los precios duales correspondientes son de 1, 2 y 0 (\$/min) para las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente.

Los coeficientes D_1, D_2 y D_3 en la fila z óptima son exactamente los de las variables de holgura x_4, x_3 y x_6. Esto significa que los precios duales son iguales a los coeficientes de las variables de holgura en la fila z óptima. No existe ambigüedad en cuanto a qué coeficiente corresponde a qué recurso porque cada variable de holgura está identificada de forma única con una restricción.

Intervalo de factiblidad: La solución actual permanece factible si todas las variables básicas permaneces no negativas, es decir

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}D_1 - \tfrac{1}{4}D_2 \geq 0$$
$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}D_2 \geq 0$$
$$x_6 = 20 - 2D_1 + D_2 + D_3 \geq 0$$

Los cambios simultáneos de D_1, D_2 y D_3 que satisfacen estas desigualdades mantendrán la solución factible. La nueva solución óptima se determina sustituyendo los valores de D_1, D_2 y D_3.

Para ilustrar el uso de estas condiciones, suponga que el tiempo de fabricación disponible para las operaciones 1, 2 y 3 son de 480, 440 y 400 minutos, respectivamente. Entonces, $D_1 = 480 - 430 = 50$, $D_2 = 440 - 460 = -20$ y $D_3 = 400 - 420 = -20$. Sustituyendo en las condiciones de factibilidad, obtenemos

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}(50) - \tfrac{1}{4}(-20) = 130 > 0 \quad \text{(factible)}$$
$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}(-20) = 220 > 0 \quad \text{(factible)}$$
$$x_6 = 20 - 2(50) + (-20) + (-10) = -110 < 0 \quad \text{(no factible)}$$

Los cálculos demuestran que $x_6 < 0$, de ahí que la solución actual no permanezca factible. Se requerirán más cálculos para encontrar la nueva solución (vea el capítulo 4).

Como alternativa, si los cambios de los recursos son tales que $D_1 = -30$, $D_2 = -12$ y $D_3 = 10$, entonces

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}(-30) - \tfrac{1}{4}(-12) = 88 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}(-12) = 224 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

$$x_6 = 20 - 2(-30) + (-12) + (10) = 78 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

La nueva solución factible (óptima) es $x_1 = 88$, $x_3 = 224$, y $x_6 = 68$ con $z = 3(0) + 2(88) + 5(224) = \$1296$. Observe que el valor objetivo óptimo también puede calcularse utilizando los precios duales como $z = 1350 + 1(-30) + 2(-12) + 0(10) = \$1296$.

Las condiciones dadas pueden producir los *intervalos de factibilidad* individuales asociados con cambiar los recursos *uno a la vez* (como se define en la sección 3.6.1). Por ejemplo, un cambio del tiempo de la operación 1 sólo implica que $D_2 = D_3 = 0$. Por tanto, las condiciones simultáneas se reducen a

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 100 + \tfrac{1}{2}D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \geq -200 \\ x_3 &= 230 > 0 \\ x_6 &= 20 - 2D_1 \geq 0 \Rightarrow D_1 \leq 10 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -200 \leq D_1 \leq 10$$

Esto significa que el precio dual para la operación 1 es válido en el intervalo de factibilidad $-200 \leq D_1 \leq 10$.

Podemos demostrar del mismo modo que los intervalos de factibilidad para las operaciones 2 y 3 son $-20 \leq D_2 \leq 400$ y $-20 < D_3 < \infty$, respectivamente (¡compruébelo!).

Ahora podemos resumir los precios duales y sus intervalos de factibilidad para el modelo de TOYCO como sigue:[9]

			Cantidad de recurso (minutos)		
Recurso	Precio dual ($)	Intervalo de factibilidad	*Mínima*	*Actual*	*Máxima*
Operación 1	1	$-200 \leq D_1 \leq 10$	230	430	440
Operación 2	2	$-20 \leq D_2 \leq 400$	440	440	860
Operación 3	0	$-20 \leq D_3 < \infty$	400	420	∞

Es importante señalar que los precios duales permanecerán aplicables con cualquier cambio *simultáneo* que mantenga la solución factible, aun cuando los cambios violen los intervalos individuales. Por ejemplo, los cambios $D_1 = 30$, $D_2 = -12$ y $D_3 = 100$ mantendrán la solución factible aun cuando $D_1 = 30$ viole el intervalo de factibilidad $-200 \leq D_1 \leq 10$, como los siguientes cálculos lo demuestran:

$$x_2 = 100 + \tfrac{1}{2}(30) - \tfrac{1}{4}(-12) = 118 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

$$x_3 = 230 + \tfrac{1}{2}(-12) = 224 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

$$x_6 = 20 - 2(30) + (-12) + (100) = 48 > 0 \qquad \text{(factible)}$$

[9] Los paquetes de programación lineal disponibles suelen presentar esta información como resultados estándar. Prácticamente ninguno proporciona el caso de condiciones simultáneas, quizá porque su visualización es muy pesada en el caso de PL grandes.

Esto significa que los precios duales permanecerán aplicables, y que podemos calcular el nuevo valor objetivo óptimo con los precios duales como $z = 1350 + 1(30) + 2(-12) + 0(100) = \$1356$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6C[10]

1. En el modelo de TOYCO, suponga que los cambios D_1, D_2 y D_3 se hacen *al mismo tiempo* en las tres operaciones.

(a) Si la disponibilidad de las operaciones 1, 2 y 3 se cambia a 438, 500 y 410 minutos, respectivamente, aproveche las condiciones simultáneas para demostrar que la solución básica actual permanece factible, y determine el cambio del ingreso óptimo mediante los precios duales óptimos.

(b) Si la disponibilidad de las tres operaciones se cambia a 460, 440 y 380 minutos, respectivamente, aproveche las condiciones simultáneas para demostrar que la solución básica actual es no factible.

***2.** Considere el modelo de TOYCO:

(a) Suponga que cualquier tiempo adicional para la operación 1 por encima de su capacidad actual de 430 minutos por día deba hacerse con base en tiempo extra a $50 por hora. El costo por hora incluye tanto la mano de obra como la operación de la máquina. ¿Es económicamente ventajoso utilizar tiempo extra con la operación 1?

(b) Suponga que el encargado de la operación 2 ha acordado trabajar 2 horas de tiempo extra diarias a $45 por hora. Adicionalmente, el costo de la operación propiamente dicha es de $10 por hora. ¿Cuál es el efecto neto de esta actividad en el ingreso diario?

(c) ¿Es necesario el tiempo extra para la operación 3?

(d) Suponga que la disponibilidad diaria de la operación 1 se incrementa a 440 minutos. Cualquier tiempo extra por encima de la capacidad máxima actual costará $40 por hora. Determine la nueva solución óptima, incluido el ingreso neto asociado.

(e) Suponga que la disponibilidad de la operación 2 se reduce en 15 minutos por día y que el costo por hora de la operación durante el tiempo regular es de $30. ¿Es ventajoso reducir la disponibilidad de la operación 2?

3. Una compañía fabrica tres productos, A, B y C. El volumen de ventas de A es como mínimo 50% de las ventas totales de los tres productos. Sin embargo, la compañía no puede vender más de 75 unidades por día. Los tres productos utilizan una materia prima de la cual la máxima disponibilidad diaria es de 240 lb. Las tasas de consumo de la materia prima son de 2 lb por unidad de A, 4 lb por unidad de B, y 3 lb por unidad de C. Los precios unitarios de A, B y C son $20, $50 y $35, respectivamente.

(a) Determine la combinación óptima de productos para la compañía.

(b) Determine el precio dual de la materia prima y su intervalo permisible. Si la materia prima disponible se incrementa en 120 lb, determine la solución óptima y el cambio del ingreso total mediante el precio dual.

(c) Use el precio dual para determinar el efecto de cambiar la demanda máxima del producto A en $\pm$ 10 unidades.

---

[10] En este conjunto de problemas, quizá le convenga generar la tabla simplex óptima con TORA.

4. Una compañía que opera 10 horas al día fabrica tres productos con tres procesos. La siguiente tabla resume los datos del producto.

	Minutos por unidad			
Producto	*Proceso 1*	*Proceso 2*	*Proceso 3*	Precio unitario
1	10	6	8	$4.50
2	5	8	10	$5.00
3	6	9	12	$4.00

(a) Determine la combinación de productos óptima.

(b) Use el precio dual para priorizar los tres procesos para una posible expansión.

(c) Si pueden asignarse más horas de producción, ¿cuál sería un costo justo por hora adicional para cada proceso?

5. La división de educación continua del Colegio Comunitario de Ozark ofrece un total de 30 cursos cada semestre. Por lo común, los cursos ofrecidos son de dos tipos: prácticos, como carpintería, procesamiento de palabras y mantenimiento automotriz; y humanistas como historia, música y bellas artes. Para satisfacer las demandas de la comunidad, cada semestre deben ofrecerse como mínimo 10 cursos de cada tipo. La división estima que los ingresos producidos por el ofrecimiento de cursos prácticos y humanistas son aproximadamente de $1500 y $1000 por curso, respectivamente.

(a) Idee un ofrecimiento de cursos óptimo para el colegio.

(b) Demuestre que el precio dual de un curso adicional es de $1500, el cual es el mismo que el ingreso por curso práctico. ¿Qué significa este resultado en función de ofrecer cursos adicionales?

(c) ¿Cuántos cursos más pueden ofrecerse al mismo tiempo de modo que se garantice que cada uno contribuirá con $1500 al ingreso total?

(d) Determine el cambio en ingresos a consecuencia del aumento del requerimiento mínimo de cursos humanistas en un curso.

***6.** Show & Sell puede anunciar sus productos en la radio y la televisión (TV) locales, o en periódicos. El presupuesto de publicidad está limitado a $10,000 mensuales. Cada minuto de publicidad en radio cuesta $15 y cada minuto en TV cuesta $300. Un anuncio en el periódico cuesta $50. A Show & Sell le gusta anunciarse en radio al menos el doble de veces que en TV. Mientras tanto, se recomienda el uso de al menos 5 anuncios en el periódico y no más de 30 minutos de publicidad por radio al mes. La experiencia pasada muestra que la publicidad en TV es 50 veces más efectiva que la publicidad en radio, y 10 veces más efectiva que en periódicos.

(a) Determine la asignación óptima del presupuesto a los tres medios.

(b) ¿Son los límites impuestos a la publicidad por radio y periódicos económicamente justificables?

(c) Si el presupuesto mensual se incrementa en 50%, ¿produciría esto un incremento proporcional en la efectividad total de la publicidad?

7. Burroughs Garment Company fabrica camisas para caballeros y blusas para damas para Walmark Discount Stores, que aceptará toda la producción surtida por Burroughs. El proceso de producción incluye corte, costura y empacado. Burroughs emplea 25 trabajadores en el departamento de corte, 35 en el de costura y 5 en el empacado. La fábrica la-

bora un turno de 8 horas, 5 días a la semana. La siguiente tabla da los requerimientos de tiempo y los precios por unidad de las dos prendas:

	Minutos por unidad			
Prenda	*Corte*	*Costura*	*Empacado*	Precio unitario ($)
Camisas	20	70	12	8.00
Blusas	60	60	4	12.00

(a) Determine el programa de producción semanal óptimo para Burroughs.

(b) Determine el valor de 1 hora de corte, costura y empacado, en función del ingreso total.

(c) Si puede utilizarse tiempo extra en los departamentos de corte y costura, ¿cuál es la tarifa por hora máxima que Burroughs debe pagar por el tiempo extra?

8. ChemLabs utiliza las materias primas *I* y *II* para producir dos soluciones de limpieza doméstica, *A* y *B*. Las disponibilidades diarias de las materias primas *I* y *II* son de 150 y 145 unidades, respectivamente. Una unidad de la solución *A* consume .5 unidades de la materia prima *I* y .6 unidades de la materia prima *II*, y una unidad de la solución *B* usa .5 unidades de la materia prima *I* y .4 unidades de la materia prima *II*. Los precios por unidad de las soluciones *A* y *B* son de $8 y $10, respectivamente. La demanda diaria de la solución *A* es de entre 30 y 150 unidades, y la de la solución *B* de entre 40 y 200 unidades.

(a) Determine las cantidades óptimas de *A* y *B* que ChemLabs debe producir.

(b) Use los precios duales para determinar qué límites de demanda de los productos *A* y *B* se deben rebajar para mejorar la rentabilidad.

(c) Si pueden adquirirse más unidades de materia prima a $20 por unidad, ¿es esto aconsejable? Explique.

(d) Se sugiere incrementar 25% la materia prima *II* para eliminar un cuello de botella en la producción. ¿Es esto aconsejable? Explique.

9. Una línea de ensamble compuesta de tres estaciones de trabajo consecutivas produce dos modelos de radio: DiGi-1 y DiGi-2. La siguiente tabla da los tiempos de ensamble para las tres estaciones de trabajo.

	Minutos por unidad	
Estación de trabajo	*DiGi-1*	*DiGi-2*
1	6	4
2	5	4
3	4	6

El mantenimiento diario de las estaciones de trabajo 1, 2 y 3 consume 10, 14 y 12%, respectivamente, de los 480 minutos máximos disponibles por estación cada día.

(a) La compañía desea determinar la combinación óptima de productos que minimizará los tiempos ociosos (o no utilizados) en las tres estaciones de trabajo. Determine la utilización óptima de las estaciones de trabajo. *Sugerencia:* Exprese la suma de los tiempos ociosos (holguras) para las tres operaciones en función de las variables originales.

(b) Determine el valor de reducir el tiempo de mantenimiento diario de cada estación en un punto porcentual.

(c) Se propone que el tiempo de operación de las tres estaciones se incremente a 600 minutos por día a un costo adicional de $1.50 por minuto. ¿Puede mejorarse esta propuesta?

10. Gutchi Company fabrica bolsos de mano, bolsas para rasuradora y mochilas. La construcción de los tres productos requiere piel y materiales sintéticos, dado que la piel es la materia prima limitante. El proceso de producción utiliza dos tipos de mano de obra calificada: costura y terminado. La siguiente tabla da la disponibilidad de los recursos, su uso por los tres productos, y los precios por unidad.

	Requerimientos de recursos por unidad			
Recurso	*Bolso de mano*	*Bolsa para rasuradora*	*Mochila*	Disponibilidad diaria
Piel ($pies^2$)	2	1	3	42
Costura (h)	2	1	2	40
Terminado (h)	1	.5	1	45
Precio ($)	24	22	45	

Formule el problema como una programación lineal, y determine la solución óptima. A continuación, indique si los siguientes cambios en los recursos mantendrán factible la solución actual. En los casos donde la factibilidad se mantiene, determine la nueva solución óptima (valores de las variables y la función objetivo).

(a) La piel disponible se incrementa a 45 $pies^2$.

(b) La piel disponible se reduce en 1 pie^2.

(c) Las horas de costura disponibles se cambian a 38.

(d) Las horas de costura disponibles se cambian a 46.

(e) Las horas de terminado disponibles se reducen a 15.

(f) Las horas de terminado disponibles se incrementan a 50.

(g) ¿Recomendaría contratar una costurera más a $15 la hora?

11. HiDec produce dos modelos de artefactos electrónicos que utilizan resistores, capacitores y "chips". La siguiente tabla resume los datos de la situación:

	Requerimiento de recursos unitarios		
Recurso	*Modelo 1 (unidades)*	*Modelo 2 (unidades)*	Disponibilidad máxima (unidades)
Resistores	2	3	1200
Capacitores	2	1	1000
Chips	0	4	800
Precio unitario ($)	3	4	

Sean x_1 y x_2 las cantidades producidas de los modelos 1 y 2, respectivamente. A continuación se dan el modelo y su tabla simplex óptima asociada.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 \le 1200 \quad \text{(Resistores)}$$
$$2x_1 + x_2 \le 1000 \quad \text{(Capacitores)}$$
$$4x_2 \le 800 \quad \text{(Chips)}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solución
z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1750
x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	450
s_3	0	0	-2	2	1	400
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	100

***(a)** Determine el estado de cada recurso.
***(b)** En función del ingreso óptimo, determine los precios duales para resistores, capacitores y chips.
(c) Determine los intervalos de factibilidad para los precios duales obtenidos en (b).
(d) Si la cantidad de resistores disponibles se incrementa a 1300 unidades, encuentre la nueva solución óptima.
***(e)** Si la cantidad de chips disponibles se reduce a 350 unidades, ¿podrá determinar la nueva solución óptima directamente con la información dada? Explique.
(f) Si el intervalo de factibilidad calculado en (c) limita la disponibilidad de capacitores, determine el intervalo correspondiente del ingreso óptimo y los intervalos correspondientes de las cantidades de unidades de los modelos 1 y 2 que se producirán.
(g) Un nuevo contratista ofrece a HiDec más resistores a 40 centavos cada uno, pero sólo si HiDec compra al menos 500 unidades. ¿Debe HiDec aceptar la oferta?

12. *Regla de la factibilidad de 100%*. Puede usarse una regla simplificada basada en los cambios *individuales* $D_1, D_2, \ldots,$ y D_m en el lado derecho de las restricciones para probar si los cambios *simultáneos* mantendrán la factibilidad de la solución actual. Suponga que el lado derecho b_i de la restricción i se cambia a $b_i + D_i$ *paso a paso*, y que $p_i \le D_i \le q_i$ es el intervalo de factibilidad correspondiente obtenido utilizando el procedimiento de la sección 3.6.2. Por definición tenemos $p_i \le 0$ ($q_i \ge 0$) porque representa la reducción (incremento) máxima permisible en b_i. Luego definimos r_i como igual a $\frac{D_i}{p_i}$ si D_i es negativo, y $\frac{D_i}{q_i}$ si D_i es positivo. Por definición, tenemos que $0 \le r_i \le 1$. La regla del 100% dice por tanto que, dados los cambios, $D_1, D_2, \ldots,$ y D_m, una condición *suficiente* (pero no necesaria) para que la solución actual permanezca factible es que $r_1 + r_2 + \ldots + r_m \le 1$. Si la condición no se satisface, entonces la solución actual puede o no permanecer factible. La regla no es aplicable si D_i queda fuera del intervalo (p_i, q_i).

En realidad, la regla del 100% es demasiado débil como para que sea consistentemente útil. Aun en los casos en que la factibilidad puede confirmarse, seguimos teniendo la necesidad de obtener la nueva solución utilizando las condiciones de factibilidad simplex comunes. Además, los cálculos directos asociados con los cambios simultáneos dados en la sección 3.6.2, son simples y manejables.

Para demostrar la debilidad de la regla, aplíquela a las partes (a) y (b) del problema 1 de este conjunto. La regla no confirma la factibilidad de la solución en (a) y no es válida en (b) porque los cambios de D_i quedan fuera del intervalo admisible. El problema 13 demuestra aún más este punto.

13. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \geq 0$$

(a) Demuestre que la solución básica óptima incluye tanto a x_1 como a x_2 y que los intervalos de factibilidad considerados uno a la vez, son $-3 \leq D_i \leq 6$ y $-3 \leq D_2 \leq 6$.

(b) *Suponga que los dos recursos se incrementan al mismo tiempo en $\Delta > 0$. Primero, demuestre que la solución básica permanece factible con todos los incrementos $\Delta > 0$. Luego, demuestre que la regla del 100% confirmará la factibilidad sólo si el incremento ocurre en el intervalo $0 < \Delta \leq 3$ unidades. De lo contrario, la regla falla en el intervalo $3 < \Delta$ 6 y no es válida para $\Delta > 6$.

3.6.3 Análisis de sensibilidad algebraica. Función objetivo

En la sección 3.6.1 utilizamos el análisis de sensibilidad gráfica para determinar las condiciones que mantendrán la optimalidad de la solución de una PL de dos variables. En esta sección extendemos estas ideas al problema de programación lineal general.

Definición de costo reducido. Para facilitar la explicación del análisis de sensibilidad de la función objetivo, primero tenemos que definir los *costos reducidos*. En el modelo de TOYCO (ejemplo 3.6-2), la ecuación z objetivo que aparece en la tabla óptima puede escribirse como

$$z = 1350 - 4x_1 - x_4 - 2x_5$$

La solución óptima no produce trenes de juguete ($x_1 = 0$). La razón se pone de manifiesto en la ecuación z, donde un incremento unitario en x_1 (sobre su valor de cero actual) reduce a z en \$4, es decir, $z = 1350 - 4 \times (1) - 1 \times (0) - 2 \times (0) = \$1346$.

Podemos considerar el coeficiente de x_1 en la ecuación z (= 4) como un *costo* unitario porque reduce el ingreso z. Pero ¿de dónde proviene este "costo"? Sabemos que el ingreso por unidad de x_1 es de \$3 (según el modelo original). También sabemos que la producción de trenes de juguete incurre en un costo porque consume recursos (tiempo de operaciones). Por consiguiente, desde el punto de vista de la optimización, el "atractivo" de x_1 depende del costo de los recursos consumidos con respecto al ingreso. Esta relación define el llamado **costo reducido** y se formaliza en la literatura de PL como

$$\begin{pmatrix}\text{Costo reducido}\\ \text{por unidad}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Costo de los recursos}\\ \text{consumidos por unidad}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Ingreso}\\ \text{por unidad}\end{pmatrix}$$

Para apreciar la importancia de esta definición, en el modelo original de TOYCO el ingreso por unidad de camiones de juguete (= \$2) es menor que el de trenes de juguete (= \$3). No obstante la solución óptima recomienda producir camiones de juguete (x_2 = 100 unidades) y nada de trenes ($x_1 = 0$). La razón es que el costo de los recursos consumidos por un camión de juguete (es decir, tiempo de operaciones) es menor que su precio unitario; al contrario de lo que sucede en el caso de los trenes de juguete.

Con la definición dada de *costo reducido*, podemos ver que una variable no rentable (como x_1) puede hacerse rentable de dos maneras:

1. Incrementando el ingreso unitario.
2. Reduciendo el costo unitario de los recursos consumidos.

En la mayoría de las situaciones, las condiciones del mercado dictan el precio por unidad y puede ser difícil incrementarlo a voluntad. Por otra parte, una opción más viable es reducir el consumo de recursos porque el fabricante puede reducir el costo si hace que el proceso de producción sea más eficiente.

Determinación de los intervalos de optimalidad. Ahora nos enfocamos en la determinación de las condiciones que mantendrán una óptima solución. El desarrollo se basa en la definición de *costo reducido*.

En el modelo de TOYCO, sean d_1, d_2 y d_3 los cambios de los ingresos unitarios de camiones, trenes y autos, respectivamente. La función objetivo se escribe entonces como

$$\text{Maximizar } z = (3 + d_1)x_1 + (2 + d_2)x_2 + (5 + d_3)x_3$$

Primero consideramos la situación general en la cual todos los coeficientes objetivo cambian *al mismo tiempo*.

Con los cambios simultáneos, la fila z en la tabla de inicio aparece como:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$-3 - d_1$	$-2 - d_2$	$-5 - d_3$	0	0	0	0

Cuando generamos la tabla simplex con la misma secuencia de las variables de entrada y salida utilizadas en el modelo original (antes de que se realicen los cambios de d_i), la iteración óptima aparecerá como sigue (convénzase de que éste si es el caso realizando las operaciones de filas simplex):

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$4 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{3}{2}d_3 - d_1$	0	0	$1 + \frac{1}{2}d_2$	$2 - \frac{1}{4}d_2 + \frac{1}{2}d_3$	0	$1350 + 100d_2 + 230d_3$
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	$-\frac{1}{4}$	0	0	-2	1	1	20

La nueva tabla óptima es igual a la tabla óptima *original*, excepto por los *costos reducidos* (coeficientes de la ecuación z). Esto significa que los *cambios en los coeficientes de la función objetivo pueden afectar sólo la optimalidad del problema.* (Compare con la sección 3.6.2, donde los cambios del lado derecho sólo afectan a la factibilidad.)

En realidad no tiene que realizar la operación de filas simplex para calcular los nuevos costos reducidos. Un examen de la nueva fila z muestra que los coeficientes de d_i se toman directamente de los coeficientes de las restricciones de la tabla óptima. Una forma conveniente de calcular el nuevo costo reducido es agregar una nueva fila superior y una nueva columna más a la izquierda de la tabla óptima, como lo muestran las áreas sombreadas en la siguiente ilustración.

		d_1	d_2	d_3	0	0	0	
	Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
1	z	4	0	0	1	2	0	1350
d_2	x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
d_3	x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
0	x_6	2	0	0	-2	1	1	20

Las entradas en la fila superior son los cambios d_i asociados con la variable x_j. En la columna a la extrema izquierda, el elemento superior es 1 en la fila z seguido del cambio d_i de la variable básica x_i. Tenga en cuenta que $d_i = 0$ para la variable de holgura x_i.

Para calcular el nuevo costo reducido para cualquier variable (o el valor de z), multiplique los elementos de su columna por los elementos correspondientes que aparecen en la columna a la extrema izquierda, súmelos y reste el elemento en la fila superior de la suma. Por ejemplo, para x_1, tenemos

$$\text{Costo reducido de } x_1 = [4 \times 1 + (-\tfrac{1}{4}) \times d_2 + \tfrac{3}{2} \times d_3 + 2 \times 0] - d_1$$
$$= 4 - \tfrac{1}{4} d_2 + \tfrac{3}{2} d_3 - d_1$$

La solución actual permanece óptima en tanto los costos reducidos (coeficientes de la ecuación z) permanezcan no negativos (caso de maximización). Por lo tanto tenemos las siguientes *condiciones de optimalidad simultáneas* correspondientes a las x_1, x_4 y x_5 no básicas:

$$4 - \tfrac{1}{4} d_2 + \tfrac{3}{2} d_3 - d_1 \geq 0$$
$$1 + \tfrac{1}{2} d_2 \geq 0$$
$$2 - \tfrac{1}{4} d_2 + \tfrac{1}{2} d_3 \geq 0$$

Recuerde que el costo reducido de una variable básica siempre es cero, como lo muestra la tabla óptima modificada.

Para ilustrar el uso de estas condiciones, suponga que la función objetivo de TOYCO cambia de $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ a $z = 2x_1 + x_2 + 6x_3$. Entonces, $d_1 = 2 - 3 = -\$1$, $d_2 = 1 - 2 = -\$1$ y $d_3 = 6 - 5 = \$1$. La sustitución en las condiciones dadas presenta el resultado

$$4 - \tfrac{1}{4} d_2 + \tfrac{3}{2} d_3 - d_1 = 4 - \tfrac{1}{4}(-1) + \tfrac{3}{2}(1) - (-1) = 6.75 > 0 \quad \text{(satisfecha)}$$
$$1 + \tfrac{1}{2} d_2 = 1 + \tfrac{1}{2}(-1) = .5 > 0 \quad \text{(satisfecha)}$$
$$2 - \tfrac{1}{4} d_2 + \tfrac{1}{2} d_3 = 2 - \tfrac{1}{4}(-1) + \tfrac{1}{2}(1) = 2.75 > 0 \quad \text{(satisfecha)}$$

Los resultados muestran que los cambios propuestos mantendrán la solución actual ($x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230$) óptima (con un nuevo valor de $z = 1350 + 100d_2 + 230d_3 = 1350 + 100 \times -1 + 230 \times 1 = \$1480$. Si cualquier condición no se satisface, debe determinarse una nueva solución (vea el capítulo 4).

El tema anterior abordó el caso de maximización. La única diferencia en el caso de minimización es que los costos reducidos (coeficientes de la ecuación z) deben ser ≤ 0 para mantener la optimalidad.

Los *intervalos de optimalidad* que tienen que ver con los cambios de d_i *uno a la vez* pueden desarrollarse a partir de las condiciones de optimalidad simultáneas.[11] Por ejemplo, suponga que el coeficiente objetivo de x_2 sólo cambia a $2 + d_2$; es decir que $d_1 = d_3 = 0$. Las condiciones de optimalidad simultáneas se reducen por lo tanto a

$$\left.\begin{array}{l} 4 - \frac{1}{4}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \leq 16 \\ 1 + \frac{1}{2}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \geq -2 \\ 2 - \frac{1}{4}d_2 \geq 0 \Rightarrow d_2 \leq 8 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \leq d_2 \leq 8$$

Del mismo modo, puede verificar que los cambios individuales $(3 + d_3)$ y $(5 + d_3)$ para x_1 y x_3 dan los intervalos de optimalidad $d_1 < 4$ y $d_3 \geq -\frac{8}{3}$, respectivamente.

Las condiciones individuales dadas pueden traducirse a intervalos de ingresos unitarios totales. Por ejemplo, para los camiones de juguete (variable x_2), el ingreso unitario total es $2 + d_2$, y su intervalo de optimalidad $-2 \leq d_2 \leq 8$ se traduce a

$$\$0 \leq (\text{ingreso unitario del camión de juguete}) \leq \$10$$

Se supone que los ingresos unitarios de los trenes y autos de juguete permanecen fijos en \$3 y \$5, respectivamente.

Es importante observar que los cambios d_1, d_2 y d_3 pueden estar dentro de sus intervalos individuales permisibles sin satisfacer las condiciones simultáneas y viceversa. Por ejemplo, considere $z = 6x_1 + 8x_2 + 3x_3$. En este caso $d_1 = 6 - 3 = \$3$, $d_2 = 8 - 2 = \$6$ y $d_3 = 3 - 5 = -\$2$, los cuales quedan dentro de los intervalos individuales permisibles ($-\infty < d_1 \leq 4$, $-2\ d_2 \leq 8$, $y\ -\frac{8}{3}d_3 < \infty$). Sin embargo, las condiciones simultáneas correspondientes dan por resultado

$$4 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{3}{2}d_3 - d_1 = 4 - \tfrac{1}{4}(6) + \tfrac{3}{2}(-2) - 3 = -3.5 < 0 \quad \text{(no satisfecha)}$$

$$1 + \tfrac{1}{2}d_2 = 1 + \tfrac{1}{2}(6) = 4 > 0 \quad \text{(satisfecha)}$$

$$2 - \tfrac{1}{4}d_2 + \tfrac{1}{2}d_3 = 2 - \tfrac{1}{4}(6) + \tfrac{1}{2}(-2) = -.5 < 0 \quad \text{(no satisfecha)}$$

---

[11] Los intervalos individuales son resultados estándar en todo software de PL. Por lo común, las condiciones simultáneas no forman parte de los resultados, quizá porque son voluminosas para problemas grandes.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6D[12]

1. En el modelo de TOYCO, determine si la solución actual cambiará en cada uno de los siguientes casos:

(i) $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$

(ii) $z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$

(iii) $z = 8x_1 + 3x_2 + 9x_3$

*__2.__ La tienda de abarrotes B&K vende tres tipos de refrescos: las marcas Cola A1, Cola A2 y la marca más barata genérica de Cola A3. El precio por lata de A1, A2 y A3 es 80, 70 y 60 centavos, respectivamente. En promedio, la tienda no vende más de 500 latas de todos los refrescos de cola al día. Aunque A1 es una marca reconocida, los clientes tienden a comprar más A2 y A3 porque son más baratos. Se estima que como mínimo se venden 100 latas de A1 al día y que las ventas de A2 y A3 sobrepasan las de A1 por un margen de al menos 4:2.

(a) Demuestre que la solución óptima no requiere vender la marca A3.

(b) ¿Qué tanto se debe incrementar el precio por lata de A3 para que B&K la venda?

(c) Para competir con otras tiendas, B&K decidió reducir el precio de los tres tipos de refresco de cola en 5 centavos por lata. Calcule de nuevo los costos reducidos para determinar si esta promoción cambiará la solución óptima actual.

3. Baba Furniture Company emplea cuatro carpinteros durante 10 días para ensamblar mesas y sillas. Se requieren dos horas-hombre para ensamblar una mesa y 5 horas-hombre para ensamblar una silla. Los clientes suelen comprar una mesa y de cuatro a seis sillas. Los precios son $135 por mesa y $50 por silla. La compañía opera un turno de ocho horas al día.

(a) Determine la combinación de producción óptima para los 10 días.

(b) Si los precios unitarios presentes por mesa y silla se reducen en un 10%, aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima obtenida en (a) cambiará.

(c) Si los precios unitarios presentes por mesa y silla cambian a $120 y $25, ¿cambiará la solución obtenida en (a)?

4. El banco de Elkins va a asignar un máximo de $200,000 para préstamos personales y para automóvil durante el siguiente mes. El banco cobra 14% por los préstamos personales, y 12% por los préstamos para automóvil. Ambos tipos de préstamos se reembolsan al final del periodo de 1 año. La experiencia muestra que aproximadamente 3% de los préstamos personales y 2% de los préstamos para automóvil no se reembolsan. El banco suele asignar a los préstamos para automóvil el doble de lo que asigna a los préstamos personales.

(a) Determine la asignación óptima de fondos entre los dos préstamos, y la tasa neta de rendimiento en todos los préstamos.

(b) Si los porcentajes de los préstamos personales y para automóvil se cambian a 4% y 3%, respectivamente, aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima en (a) cambiará.

*__5.__ Electra produce cuatro tipos de motores eléctricos, cada uno en una línea de ensamble distinta. Las capacidades respectivas de las líneas son 500, 500, 800 y 750 motores por día. El motor tipo 1 utiliza 8 unidades de un determinado componente electrónico; el motor tipo 2 utiliza 5 unidades; el motor tipo 3 utiliza 4 unidades, y el motor tipo 4 utiliza 6 unidades.

[12] En este conjunto de problemas, le convendría generar la tabla simplex óptima con TORA.

El proveedor del componente puede surtir 8000 piezas por día. Los precios de los tipos de motor respectivos son \$60, \$40, \$25 y \$30.

(a) Determine la combinación óptima de producción diaria.

(b) El programa de producción actual satisface las necesidades de Electra. Sin embargo, debido a la competencia, es posible que Electra tenga que reducir el precio del motor tipo 2. ¿Cuál es la reducción máxima que puede efectuarse sin que cambie el programa de producción actual?

(c) Electra decidió reducir25% el precio de todos los tipos de motores. Aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima no cambia.

(d) Actualmente el motor tipo 4 ya no se produce. ¿Qué tanto debe incrementarse su precio para incluirlo en el programa de producción?

6. Popeye Canning firmó un contrato para recibir 60,000 lb diarias de tomates maduros a 7 centavos por libra, con los cual produce jugo de tomate enlatado, salsa de tomate y puré de tomate. Los productos enlatados se empacan en cajas de 24 latas. Una lata de jugo utiliza 1 lb de tomates frescos, una lata de salsa utiliza $\frac{1}{2}$ lb, y una lata de puré utiliza $\frac{3}{4}$ lb. La participación diaria del mercado de la compañía está limitada a 2000 cajas de jugo, 5000 cajas de salsa y 6000 cajas de puré. Los precios de mayoreo por caja de jugo, salsa y puré son \$21, \$9 y \$12, respectivamente. .

(a) Desarrolle un programa de producción diaria óptimo para Popeye.

(b) Si el precio por caja de jugo y puré permanece fijo al valor dado en el problema, aplique el análisis de sensibilidad para determinar el intervalo de precio unitario que Popeye debe cobrar por caja de salsa para mantener sin cambios la combinación de productos óptima.

7. Dean's Furniture Company ensambla gabinetes de cocina regulares y de lujo utilizando madera precortada. Los gabinetes regulares se pintan de blanco, y los de lujo se barnizan. Un departamento realiza tanto el pintado como el barnizado. La capacidad diaria del departamento de ensamble es de 200 gabinetes regulares y de 150 de lujo. El barnizado de una unidad de lujo requiere el doble de tiempo que pintar uno regular. Si el departamento de pintura/barnizado se dedica sólo a las unidades de lujo, puede completar 180 unidades diarias. La compañía estima que los ingresos por unidad de los gabinetes regulares y de lujo son de \$100 y \$140, respectivamente.

(a) Formule el problema como un programa lineal y halle el programa de producción óptimo por día.

(b) Suponga que la competencia dicta que el precio por unidad de cada gabinete regular y de lujo se reduzca a \$80. Aplique el análisis de sensibilidad para determinar si la solución óptima en (a) permanece sin cambios.

8. *Regla de optimalidad de 100%*. También puede desarrollarse una regla similar a la *regla de factibilidad de 100%* descrita en el problema 12, conjunto 3.6c, para probar el efecto del cambio simultáneo de todas las c_j a $c_j + d_j, j = 1, 2,\ldots,n$, en la optimalidad de la solución actual. Suponga que $u_j \leq d_j \leq v_j$ es el intervalo de optimalidad obtenido como resultado del cambio de cada c_j a $c_j + d_j$, uno a la vez, siguiendo el procedimiento descrito en la sección 3.6.3. En este caso $u_j \leq 0$ ($v_j \geq 0$), porque representa la reducción (incremento) máxima permisible en c_j que mantendrá óptima la solución actual. Para los casos en que $u_j \leq d_j \leq v_j$, defina r_j igual a $\frac{d_j}{v_j}$ si d_j es positivo y $\frac{d_j}{u_j}$ si d_j es negativo. Por definición, $0 \leq r_j \leq 1$. La regla de 100% dice que una condición suficiente (pero no necesaria) para que la solución actual permanezca óptima es que $r_1 + r_2 + \ldots + r_n \leq 1$. Si la condición no se satisface, la solución actual puede o no permanecer óptima. La regla no aplica si d_j queda fuera de los intervalos especificados.

Demuestre que la regla de optimalidad de 100% es demasiado débil como para ser consistentemente confiable como herramienta de toma de decisiones al aplicarla a los siguientes casos.

(a) Los incisos (ii) e (iii) del problema 1

(b) El inciso (b) del problema 7

3.6.4 Análisis de sensibilidad con Tora, Solver, y AMPL

Ahora contamos con todas las herramientas para descifrar los resultados proporcionados por el software de PL, en particular con respecto al análisis de sensibilidad. Utilizaremos el ejemplo de TOYCO para demostrar lo obtenido con TORA, Solver y AMPL.

El reporte de los resultados de PL obtenidos con TORA proporciona los datos del análisis de sensibilidad de forma automática como se muestra en la figura 3.14 (archivo *toraTOYCO.txt*). Los resultados incluyen los costos reducidos y los precios duales así como los intervalos de optimalidad y factibilidad permisibles.

La figura 3.15 muestra el modelo de TOYCO analizado con Solver (archivo *solverTOYCO.xls*) y su reporte del análisis de sensibilidad. Después de hacer clic en la opción Solve en el cuadro de diálogo **Solver Parameters**, puede solicitar el reporte del análisis de sensibilidad en el nuevo cuadro de diálogo **Solver Results**. Luego haga clic en la pestaña **Sensitivity Report 1** para ver los resultados. El reporte es parecido al de TORA, con tres excepciones: (1) El costo reducido tiene un signo opuesto. (2) Utiliza el nombre *shadow price (precio sombra)* en lugar de *dual price (precio dual)*. (3) Los intervalos de optimalidad son para los cambios d_j y D_j y no para los coeficientes objetivos totales y los lados derechos de las restricciones. Las diferencias son mínimas, y la interpretación de los resultados no cambia.

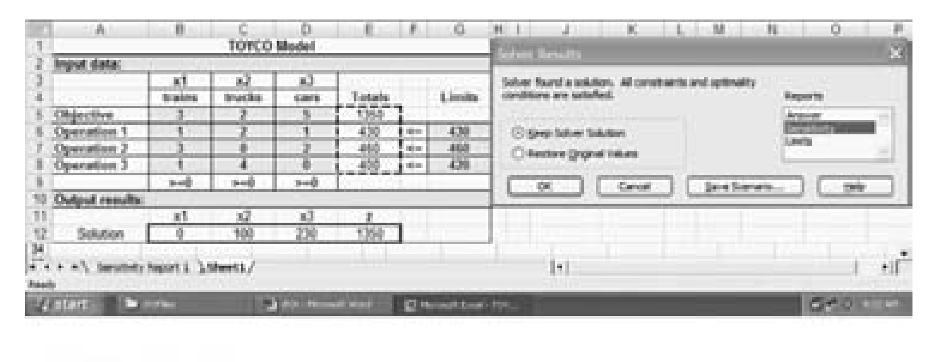
En AMPL, el reporte del análisis de sensibilidad se obtiene de inmediato. El archivo *amplTOYCO.txt* proporciona el código necesario para determinar los resultados obtenidos con el análisis de sensibilidad. Requiere las instrucciones adicionales (el reporte se envía al archivo `a.out`) siguientes:

```
option solver cplex;
option cplex_options 'sensitivity';
solve;
#———————————————sensitivity analysis
display oper.down,oper.current,oper.up,oper.dual>a.out;
display x.down,x.current,x.up,x.rc>a.out;
```

FIGURA 3.14

Análisis de sensibilidad, realizado con TORA para el modelo de TOYCO

Sensitivity Analysis				
Variable	CurrObjCoeff	MinObjCoeff	MaxObjCoeff	Reduced Cost
x1:	3.00	-infinity	7.00	4.00
x2:	2.00	0.00	10.00	0.00
x3:	5.00	2.33	infinity	0.00
Constraint	Curr RHS	Min RHS	Max RHS	Dual Price
1(<):	430.00	230.00	440.00	1.00
2(<):	460.00	440.00	860.00	2.00
3(<):	420.00	400.00	infinity	0.00



Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
$B$12	Solution x1	0	-4	3	4	1E+30
$C$12	Solution x2	100	0	2	8	2
$D$12	Solution x3	230	0	5	1E+30	2.666666667

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
$E$6	Operation 1 Totals	430	1	430	10	200
$E$7	Operation 2 Totals	460	2	460	400	20
$E$8	Operation 3 Totals	400	0	420	1E+30	20

FIGURA 3.15

Reporte del análisis de sensibilidad realizado con Excel Solver para el modelo de TOYCO

Se requieren las instrucciones de CPLEX `option` para obtener el reporte del análisis de sensibilidad estándar. En el modelo de TOYCO, las variables y restricciones con subíndices utilizan los nombres de raíz *x* y `oper.`, respectivamente. Utilizando estos nombres los sufijos alusivos `.down`, `.current` y `.up` en las instrucciones generan automáticamente el reporte del análisis de sensibilidad formateado que aparece en la figura 3.16. Los sufijos `.dual` y `.rc` proporcionan el precio dual y el costo reducido.

```
: oper.down  oper.current oper.up oper.dual    :=
1      230         430        440       1
2      440         460        860       2
3      400         420       1e+20p     0

:       x.down  x.current      x.up    x.rc    :=
1    -1e+20             3          7    -4
2         0             2         10     0
3         2.33333       5      1e+20     0
```

FIGURA 3.16

Reporte del análisis de sensibilidad obtenido con AMPL para el modelo de TOYCO

CONJUNTO DE PROBLEMAS 3.6E[13]

1. Considere el problema 1, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use el precio dual para decidir si vale la pena incrementar los fondos para el año 4.

[13] Antes de resolver los problemas en este conjunto, se espera que usted genere el reporte del análisis de sensibilidad utilizando AMPL, Solver o TORA.

2. Considere el problema 2, conjunto 2.4a (capítulo 2).

(a) Use los precios duales para determinar el rendimiento total sobre la inversión.

(b) Si quisiera gastar $1000 en cosas placenteras al final del año 1, ¿cómo afectaría esto a la suma acumulada al inicio del año 5?

3. Considere el problema 3, conjunto 2.4a (capítulo 2).

(a) Dé una interpretación económica de los precios duales del modelo.

(b) Demuestre cómo el precio dual asociado con el límite superior del dinero prestado al principio del tercer trimestre puede derivarse a partir de los precios duales asociados con las ecuaciones de balance que representan el flujo de efectivo de entrada y de salida en las cinco fechas designadas del año.

4. Considere el problema 4, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use los precios duales para determinar la tasa de rendimiento asociada con cada año.

*__5.__ Considere el problema 5, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use el precio dual para determinar si vale la pena que el ejecutivo invierta más dinero en los planes.

6. Considere el problema 6, conjunto 2.4a (capítulo 2). Use el precio dual para decidir si es aconsejable que el jugador apueste más dinero.

7. Considere el problema 1, conjunto 2.4b (capítulo 2). Relacione los precios duales con los costos de producción unitarios del modelo.

8. Considere el problema 2, conjunto 2.4b (capítulo 2). Suponga que cualquier capacidad adicional de las máquinas 1 y 2 puede obtenerse sólo si se utiliza tiempo extra. ¿Cuál es el costo máximo por hora en que la compañía estaría dispuesta a incurrir para cualquier máquina?

*__9.__ Considere el problema 3, conjunto 2.4b (capítulo 2).

(a) Suponga que el fabricante puede adquirir más unidades de la materia prima A a $12 por unidad. ¿Sería aconsejable hacer esto?

(b) ¿Recomendaría que el fabricante adquiriera más unidades de la materia prima B a $5 por unidad?

10. Considere el problema 10, conjunto 2.4e (capítulo 2).

(a) ¿Cuál de las restricciones especificadas tiene un impacto adverso en la solución óptima?

(b) ¿Cuál es lo máximo que la compañía debe pagar por tonelada de cada mineral?

3.7 TEMAS DE CÁLCULO EN LA PROGRAMACIÓN LINEAL[14]

En este capítulo se han presentado los detalles del algoritmo simplex. Los capítulos siguientes presentan otros algoritmos: El simplex dual (capítulo 4); el simplex revisado (capítulo 7), y el punto interior (capítulo 22 en el sitio web). ¿Por qué la variedad? La razón es que cada algoritmo tiene características específicas que pueden ser benéficas en el desarrollo de códigos de computadora robustos.

Un código de PL se considera robusto si satisface dos requerimientos:

1. Velocidad
2. Precisión

Ambos requerimientos presentan retos incluso para las computadoras más avanzadas. Las razones se derivan de la naturaleza de los cálculos algorítmicos y las limitaciones de la computadora. Para estar seguros, el formato de tabla simplex presentado en

[14] Para esta sección se han tomado elementos de R. Bixby, “Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress”, *Operations Research*, vol. 50, núm. 1, págs. 3-15, 2002.

este capítulo *no es numéricamente estable*, es decir que el error de redondeo cometido por la computadora y la pérdida de dígitos presentan serios problemas de cálculo, en particular cuando los coeficientes del modelo de PL difieren con mucho en magnitud. A pesar de estos retos, de hecho los diferentes algoritmos de PL se han integrado de manera ingeniosa para producir códigos altamente eficientes a fin de resolver PLs extremadamente grandes.

Esta sección explica la transición desde las presentaciones básicas en libros de texto hasta los robustos códigos de PL actuales de última generación. Aborda los temas que afectan la velocidad y la precisión y presenta remedios para aliviar los problemas. También presenta un amplio marco de referencia de los roles de los diferentes algoritmos de programación lineal (simplex, simplex dual, simplex revisado y punto interior) en el desarrollo de códigos de computadora numéricamente estables. La presentación se mantiene, expresamente, libre de matemáticas y se concentra en los conceptos clave que constituyen el fundamento de los códigos de programación lineal exitosos.

1. Regla (pivote) de la variable de entrada simplex. Una nueva iteración simplex determina las variables de entrada y de salida mediante criterios de *optimalidad* y *factibilidad*. Una vez determinadas las dos variables, se utilizan operaciones de fila pivote para generar la siguiente tabla simplex.

En realidad, el *criterio de optimalidad* presentado en la sección 3.3.2 es sólo uno de los muchos que se han utilizado en el desarrollo de códigos de PL. La siguiente tabla resume los tres criterios prominentes.

Regla de la variable de entrada	Descripción
Clásica (sección 3.3.2)	La variable de entrada es la del *costo reducido* más favorable entre todas las variables no básicas.
Mejora máxima	La variable de entrada es la que produce la *mejora total* máxima del valor objetivo entre todas las variables no básicas.
Borde más inclinado[15]	La variable de entrada es la que da el *costo reducido* más favorable entre todas las variables no básicas. El algoritmo se mueve a lo largo del *borde más inclinado* que va del punto actual a un punto extremo vecino.

En cuanto a la *regla clásica*, la fila objetivo de la tabla simplex proporciona de inmediato los costos reducidos de todas las variables no básicas sin cálculos adicionales. Por otra parte, la *regla de la mejora máxima* requiere una considerable cantidad de cálculos adicionales para determinar primero el valor con el cual una variable no básica entra en la solución y luego la mejora total resultante del valor objetivo. La idea de la *regla del borde más inclinado*, aunque en el "espíritu" de la *regla de la mejora máxima* (en el sentido de que toma en cuenta indirectamente el valor de la variable de entrada), requiere mucho menos cálculos.

[15] Vea D. Goldfarb y J. Reid, "A Practicable Steepest Edge Simplex Algorithm", *Mathematical Programming*, vol. 12, núm. 1, págs. 361-377, 1977.

El intercambio entre las tres reglas es que la *regla clásica* es la menos costosa desde el punto de vista computacional pero, sin duda, requiere la máxima cantidad de iteraciones para llegar al óptimo. Por otra parte, la *regla de la mejora máxima* es la más costosa desde el punto de vista computacional pero, sin duda, implica la cantidad mínima de iteraciones simplex. La *regla del borde más inclinado* parece ser el término medio en función de la cantidad de cálculos adicionales y la cantidad de iteraciones simplex. Es interesante observar que los resultados de prueba muestran que los beneficios generados por los cálculos adicionales en la *regla de la mejora máxima* no parecen mejores que los generados por la *regla del borde más inclinado*. Esto es lo que hace que rara vez se implemente la *regla de la mejora máxima* en los códigos de PL.

Aunque la *regla del borde más inclinado* es la regla predeterminada más común para la selección de la variable de entrada, los códigos de PL exitosos tienden a utilizar una *fijación de precios híbrida*. Inicialmente, las iteraciones simplex utilizan (una variación de) la *regla clásica*. Conforme se incrementa la cantidad de iteraciones, se hace un cambio a (una variación de) la *regla del borde más inclinado*. La extensa experiencia de cálculo indica que esta estrategia reditúa en función del tiempo total de computadora necesario para resolver una programación lineal.

2. Algoritmo primal vs. simplex dual. El capítulo 3 se concentró principalmente en los detalles de lo que en ocasiones se conoce en la literatura como *método simplex primal*. En el algoritmo primal, la solución básica inicial es factible, pero no óptima. Las iteraciones sucesivas permanecen factibles a medida que avanzan hacia el óptimo. Se desarrolló un algoritmo subsiguiente para PLs, llamado *simplex dual,* que se inicia como no factible pero óptimo y que se dirige hacia la factibilidad, al tiempo que mantiene la optimalidad. La iteración final ocurre cuando se restaura la factibilidad. Los detalles del algoritmo dual se dan en el capítulo 4, sección 4.4.1.

En un inicio, el algoritmo dual se utilizó sobre todo en el análisis post óptimo de PL (sección 4.5) y en la programación lineal entera, (capítulo 9), pero no como un algoritmo independiente para resolver PLs. La razón principal es que su regla para seleccionar la variable de salida era débil. Sin embargo, todo esto cambió cuando se adoptó la idea de la regla del borde más inclinado primal para determinar la variable de salida en el algoritmo simplex dual.[16] En la actualidad, el simplex dual con la adaptación del borde más inclinado ha demostrado que es dos veces más rápido que el simplex dual, y por el momento es el algoritmo simplex dominante en los códigos comerciales más importantes.

3. Simplex revisado vs. tabla simplex. Los cálculos simplex presentados al principio de este capítulo (y también en el capítulo 4 para el simplex dual) generan la siguiente tabla simplex a partir de la inmediata anterior. El resultado es que las tablas no son numéricamente estables por tres razones:

a. La mayoría de los modelos de PL son sumamente dispersos (es decir, contienen un alto porcentaje de coeficientes cero en la iteración de inicio). Los métodos numéricos disponibles pueden reducir la cantidad de cálculos locales al economizar (incluso eliminar) operaciones que implican coeficien-

[16] Vea J. Forrest y D. Goldfarb, "Steepest-Edge Simplex Algorith for Linear Programming", *Mathematical Programming*, vol. 57, núm. 3, págs. 341-374, 1992.

tes cero, lo que a su vez acelera sustancialmente los cálculos. Ésta es una fuerte oportunidad perdida en cálculos con tablas, porque las tablas sucesivas pronto se saturan de elementos no cero.

b. El error de redondeo y la pérdida de dígitos, inherentes en todas las computadoras, pueden propagarse con rapidez a medida que crece la cantidad de iteraciones, que llevaría a una grave pérdida de precisión, sobre todo en PL grandes.

c. Las operaciones de filas simplex realizan mas cálculos que los que se requieren para generar la siguiente tabla (recuerde que todo lo que se necesita en una iteración son las variables de entrada y de salida). Estos cálculos extra representan tiempo de computadora desperdiciado.

El algoritmo simplex revisado presentado en la sección 7.2 mejora con respecto a estas desventajas. Aunque el método utiliza las reglas de pivoteo exactas como en el método de tablas (*tableau)*, la diferencia principal es que realiza los cálculos aplicando álgebra matricial. En un modelo de *m* restricciones, cada solución de punto (de esquina) extremo se calcula resolviendo el conjunto de *m* x *m* ecuaciones $\mathbf{BX}_B = \mathbf{b}$ para el vector básico $\mathbf{X}_B$. La matriz básica $\mathbf{B}$ se determinar a partir de las columnas de restricciones del modelo *original*, y $\mathbf{b}$ es el lado derecho *original* de las restricciones. En esencia, sólo $\mathbf{B}$ cambia entre iteraciones. Esta propiedad única que permite controlar el error de redondeo/pérdida de dígitos, aprovecha la dispersión del modelo original y acelera los cálculos. En realidad, el análisis numérico en el álgebra matricial proporciona métodos robustos y eficientes para resolver $\mathbf{BX}_B = \mathbf{b}$ factorizando $\mathbf{B}$ en matrices triangulares de $\mathbf{L}$ inferior y $\mathbf{U}$ superior, de modo que $\mathbf{B} = \mathbf{LU}$. El método, con toda propiedad llamado descomposición L-U, es particularmente adecuado para matrices dispersas.[17]

Por estas razones el formato de tabla nunca se utiliza en los códigos de PL más destacados disponibles en la actualidad.

4. Algoritmo de barrera (punto interior) vs. algoritmo simplex. El algoritmo de punto interior (vea la sección 22.3 en el sitio web) es totalmente diferente del algoritmo simplex en que cruza el espacio factible y poco a poco se mueve (en el límite) hacia el óptimo. Computacionalmente, el algoritmo es *polinomial* en el tamaño del problema. Por otra parte, el algoritmo simplex es *exponencial* en el tamaño del problema (se han construido ejemplos hipotéticos en los que el algoritmo simplex visita *cada* punto de esquina del espacio de soluciones antes de alcanzar el óptimo).

El algoritmo de punto interior se introdujo en 1984 y, sorpresivamente, fue patentado por AT&T y vendido en una computadora especializada (aparentemente por una exuberante cantidad) sin revelar sus detalles computacionales. Al fin, la comunidad científica "se ocupó" y descubrió que el método de punto interior tenía raíces en los primeros algoritmos de programación no lineal de la década de 1960 (vea por ejemplo el algoritmo SUMT en la sección 21.2.5). El resultado es el llamado *método de barrera* con algunas variaciones algorítmicas.

Para problemas en extremo grandes, el método de barrera ha demostrado ser mucho más rápido que el algoritmo simplex dual. La desventaja es que el algoritmo de barrera no produce soluciones de punto de esquina, una restricción que limita su apli-

---

[17] Vea J. Bunch y J. Jopcroft, "Triangular Factorization and Inversion by Fast Matrix Multiplication", *Mathematics of Computation,* vol. 28, págs. 231-236, 1974. Vea también E. Hellerman y D. Rarick, "Reinversion with the Preassigned Pivot Procedure", *Mathematical Programming*, vol. 1, págs. 195-216, 1971.

cación en el análisis postóptimo (capítulo 4) y también en la programación entera (capítulo 9). Aunque se han desarrollado métodos para convertir una solución de punto interior óptimo de barrera en una solución de punto de esquina, la carga de computo asociada es enorme, lo que limita su uso en aplicaciones como programación entera, donde la frecuente necesidad de localizar soluciones de punto de esquina es fundamental para el algoritmo. No obstante, todos los códigos comerciales incluyen el algoritmo de barrera como herramienta para resolver PL grandes.

5. Degeneración. Como se explicó en la sección 3.5.1, las soluciones básicas degeneradas pueden generar ciclado, lo que haría que las iteraciones simplex se quedaran atascadas indefinidamente en un punto de esquina degenerado sin alcanzar su término. En las primeras versiones del algoritmo simplex, la degeneración y el ciclado no se incorporaron en la mayoría de los códigos porque se suponía que su ocurrencia en la práctica era rara. A medida que se probaron instancias de problemas más difíciles y más grandes (sobre todo en el área de la programación entera), el error de redondeo producido por las computadoras dio lugar a un comportamiento de tipo ciclado y degeneración que provocó que los cálculos "se quedaran atascados" en el mismo valor objetivo. El problema se evadió interponiendo una perturbación aleatoria condicional y cambiando los valores de las variables básicas.[18]

6. Acondicionamiento del modelo de entrada (solución previa). Todos los lenguajes y solucionadores tratan de acondicionar los datos de entrada antes de resolverlos. El objetivo es "simplificar" el modelo de dos maneras clave:[19]

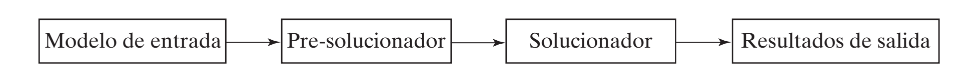
- **a.** Reduciendo el tamaño del modelo (filas y columnas) mediante la identificación y eliminación de las restricciones redundantes, y posiblemente fijando y sustituyendo las variables.
- **b.** Ponderando los coeficientes del modelo que sean de magnitud ampliamente diferente para mitigar el efecto adverso de la pérdida de dígitos cuando se manipulan números reales de magnitudes ampliamente diferentes.

La figura 3.17 resume las etapas de solución de un problema de PL. El modelo de entrada puede ser alimentado por medio de un pre-solucionador a un solucionador, tal como CPLEX o XPRESS. Como alternativa puede usarse un lenguaje cómodo de modelado como AMPL, GAMS, MOSEL o MPL, para modelar algebraicamente la PL y luego pre-solucionar de manera interna y transformar sus datos de entrada para ajustarlos al formato del solucionador, el cual entonces produce los resultados de salida en función de las variables y restricciones del modelo de PL *original*.

7. Avance de las computadoras. No es de sorprender que en el último cuarto del siglo XX la velocidad de las computadoras se hubiera incrementado más de mil veces.

FIGURA 3.17

Componentes de una PL numérica



[18] Vea P. Harris, "Pivot Selection Methods of the debex LP Code", *Mathematical Programming*, vol. 5, págs. 1-28, 1974.

[19] Vea L. Bearley, L. Mitra, y H. Williams, "Analysis of Mathematical Programming Problems Prior to Applying Simplex Algorith", *Mathematical Programming,* vol. 8, pp. 54–83, 1975.

En la actualidad, una computadora de escritorio es más potente y veloz que las antiguas supercomputadoras. Estos avances (junto con los avances algorítmicos antes citados) han hecho posible resolver enormes PL en cuestión de segundos en comparación con días (¡sí, días!) en el pasado.

BIBLIOGRAFÍA

Bazaraa, M., J. Jarvis, y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows,* 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.

Chváta1, V., *Linear Programming,* Freeman, Nueva York, 1983.

Dantzig, G., *Linear Programming and Extensions,* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

Dantzig, G., y M. Thapa, *Linear Programming 1: Introduction,* Springer, Nueva York, 1997.

Nering, E., y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems,* Academic Press, Boston, 1992.

Taha, H., "Linear Programming", capítulo II-1 en *Handbook of Operations* Research, J. Moder y S. Elmaghraby (eds.), Van Nostrand Reinhold, Nueva York, 1987.

CAPÍTULO 4

Dualidad y análisis postóptimo

4.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DUAL

El problema **dual** se define sistemáticamente a partir del modelo de PL **primal** (u original). Los dos problemas están estrechamente relacionados en el sentido de que la solución óptima de uno proporciona automáticamente la solución óptima al otro.

En la mayoría de los tratamientos de PL, el dual se define para varias formas del primal según el sentido de la optimización (maximización o minimización), los tipos de restricciones ($\leq$, $\geq$ o $=$), y el signo de las variables (no negativas o irrestrictas). Este capítulo ofrece una definición *única* que abarca de manera automática *todas* las formas del primal.

Nuestra definición del problema dual requiere expresar el problema primal en la *forma de ecuación* que se presentó en la sección 3.1 (todas las restricciones son ecuaciones con lado derecho no negativo, y todas las variables son no negativas). Este requerimiento es consistente con el formato de la tabla inicial simplex. De ahí que cualesquier resultados obtenidos a partir de la solución óptima primal se aplican directamente al problema dual asociado.

Las ideas clave para construir el dual a partir del primal se resumen como sigue:

1. Asigne una variable dual por cada restricción primal.
2. Construya una restricción dual por cada variable primal.
3. Los coeficientes de restricción (columna) y el coeficiente objetivo de la variable primal j-ésima definen respectivamente los lados izquierdo y derecho de la restricción dual j-ésima.
4. Los coeficientes objetivo duales son iguales a los lados derechos de las ecuaciones de restricción primales.
5. Las reglas que aparecen en la tabla 4.1 rigen el sentido de optimización, la dirección de las desigualdades y los signos de las variables en el dual. Una forma fácil de recordar el tipo de restricción en el dual (es decir, $\leq$ o $\geq$) es que si el objetivo dual es de *minimización* (es decir, apunta *hacia abajo*), entonces todas las restricciones serán del tipo $\geq$ (es decir, *apuntan hacia arriba*). Lo opuesto aplica cuando el objetivo dual es de maximización.

TABLA 4.1 Reglas para construir el problema dual

Objetivo del problema primal[a]	Problema dual		
	Objetivo	*Tipo de restricción*	*Signo de las variables*
Maximización	Minimización	$\geq$	irrestricta
Minimización	Maximización	$\leq$	irrestricta

[a]Todas las restricciones primales son ecuaciones con lado derecho no negativo, y todas las variables son no negativas.

Los siguientes ejemplos demuestran en la tabla 4.1 el uso de las reglas; incluso, muestran que nuestra definición incorpora automáticamente todas las formas del primal.

Ejemplo 4.1-1

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$	Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$	
sujeto a	sujeto a	
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$	$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$	y_1
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$	$2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$	y_2
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Minimizar } w = 10y_1 + 8y_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\geq 5 \\ 2y_1 - y_2 &\geq 12 \\ y_1 + 3y_2 &\geq 4 \\ \left.\begin{aligned} y_1 + 0y_2 &\geq 0 \\ y_1, y_2 &\text{ irrestricta} \end{aligned}\right\} &\Rightarrow (y_1 \geq 0,\ y_2 \text{ irrestricta}) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1-2

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2$	Minimizar $z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$	
sujeto a	sujeto a	
$x_1 + 2x_2 \geq 3$	$x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 = 3$	y_1
$2x_1 - 4x_2 \leq 5$	$2x_1 - 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 5$	y_2
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Maximizar } w = 3y_1 + 5y_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 &\leq 15 \\ 2y_1 - 4y_2 &\leq 12 \\ \left.\begin{aligned} -y_1 \quad &\leq 0 \\ y_2 &\leq 0 \\ y_1, y_2 \text{ irrestricta} \end{aligned}\right\} &\Rightarrow (y_1 \geq 0, y_2 \leq 0) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.1-3

Primal	Primal en forma de ecuación	Variables duales
	Sustituir $x_1 = x_1^- - x_1^+$	
Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$	Maximizar $z = 5x_1^- - 5x_1^+ + 6x_2$	
sujeto a	sujeto a	
$x_1 + 2x_2 = 5$	$x_1^- - x_1^+ + 2x_2 = 5$	y_1
$-x_1 + 5x_2 \geq 3$	$-x_1^- + x_1^+ + 5x_2 - x_3 = 3$	y_2
$4x_1 + 7x_2 \leq 8$	$4x_1^- - 4x_1^+ + 7x_2 + x_4 = 8$	y_3
x_1 irrestricta, $x_2 \geq 0$	$x_1^-, x_1^+, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	

Problema dual

$$\text{Minimizar } z = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$

sujeto a

$$\left.\begin{aligned} y_1 - y_2 + 4y_3 &\geq 5 \\ -y_1 + y_2 - 4y_3 &\geq -5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y_1 - y_2 + 4y_3 &\geq 5 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 &\leq 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1 - y_2 + 4y_3 = 5$$

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$

$$\left.\begin{aligned} -y_2 \quad &\geq 0 \\ y_3 &\geq 0 \\ y_1, y_2, y_3 \text{ irrestricta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (y_1 \text{ irrestricta}, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0)$$

La primera y segunda restricciones son reemplazadas por una ecuación. La regla general es que una variable primal irrestricta siempre corresponde a una restricción dual de igualdad. A la inversa, una ecuación primal de igualdad produce una variable dual irrestricta, como lo demuestra la primera restricción primal.

Resumen de las reglas para construir el dual. La tabla 4.2 resume las reglas del primal-dual como suelen presentarse en la literatura. Un buen ejercicio es verificar que las dos reglas que aparecen en la tabla 4.1 abarcan estas reglas explícitas.

TABLA 4.2 Reglas para construir el problema dual

Problema de maximización		Problema de minimización
Restricciones		*Variables*
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	Irrestrictas
Variables		*Restricciones*
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
Irrestrictas	$\Leftrightarrow$	$=$

Observe que los encabezados de columna que aparecen en la tabla no utilizan el nombre primal y dual. Lo que importa en este caso es el sentido de optimización. Si el primal es de maximización, entonces el dual es de minimización, y viceversa. Observe también que no hay medidas específicas para incluir variables artificiales en el primal. La razón es que las variables artificiales no cambiarían la definición del dual (vea el problema 5, conjunto 4.1a).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.1A

1. En el ejemplo 4.1-1, derive el problema dual asociado si el sentido de optimización en el problema primal se cambia a minimización.

*__2.__ En el ejemplo 4.1-2, derive el problema dual asociado dado que el problema primal se incrementa con una tercera restricción, $3x_1 + x_2 = 4$.

3. En el ejemplo 4.1-3, demuestre que aunque el sentido de optimización en el primal se cambie a minimización, una variable primal irrestricta siempre corresponde a una restricción dual de igualdad.

4. Escriba el dual para cada uno de los siguientes problemas primales:

(a) Maximizar $z = -5x_1 + 2x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq -2 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) Minimizar $z = 6x_1 + 3x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + x_3 &\geq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &\geq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

*__(c)__ Maximizar $z = x_1 + x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 &= 6 \\ x_1, x_2 &\text{ irrestricta} \end{aligned}$$

***5.** Considere el ejemplo 4.1-1. La aplicación del método simplex al primal requiere utilizar una variable artificial en la segunda restricción del primal estándar para asegurar una solución básica inicial. Demuestre que la presencia de una primal artificial en forma de ecuación no afecta la definición del dual porque conduce a una restricción dual redundante.

6. ¿Verdadero o falso?

(a) El dual del problema dual da por resultado el primal original.

(b) Si la restricción primal está originalmente en forma de ecuación, la variable dual correspondiente no necesariamente es irrestricta.

(c) Si la restricción primal es del tipo $\leq$ la variable dual correspondiente será no negativa (no positiva) si la función objetivo primal es de maximización (minimización).

(d) Si la restricción primal es del tipo $\geq$ la variable dual correspondiente será no negativa (no positiva) si la función objetivo primal es de minimización (maximización).

(e) Una variable primal irrestricta producirá una restricción dual de igualdad.

4.2 RELACIONES PRIMAL-DUAL

Los cambios realizados en los datos de un modelo de PL pueden afectar la optimalidad y/o factibilidad de la solución óptima actual. Esta sección presenta varias relaciones primal-dual que pueden usarse para calcular de nuevo los elementos de la tabla simplex óptima. Estas relaciones constituyen la base de la interpretación económica del modelo de PL y del análisis postóptimo.

La sección se inicia con un breve repaso de las matrices, una herramienta muy útil para realizar los cálculos de tabla simplex. Un repaso más detallado de las matrices se da en el apéndice D en el sitio web.

4.2.1 Repaso de operaciones con matrices simples

La tabla simplex puede generarse por medio de tres operaciones de matrices elementales: (fila vector) $\times$ (matriz), (matriz) $\times$ (columna vector) y (escalar) $\times$ (matriz). Por comodidad, estas operaciones se resumen. En primer lugar, presentamos algunas definiciones de matriz:

1. Una *matriz*, $\mathbf{A}$, de tamaño $(m \times n)$ es un conjunto rectangular de elementos con m filas y n columnas.
2. Un *vector fila*, $\mathbf{V}$, de tamaño m es una matriz $(1 \times m)$.
3. Un *vector columna*, $\mathbf{P}$, de tamaño n es una matriz $(n \times 1)$.

Estas definiciones pueden representarse matemáticamente como

$$\mathbf{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_m), \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

1. **(Vector fila $\times$ matriz, VA).** La operación es válida sólo si el tamaño del vector fila **V** y la cantidad de filas de **A** son iguales. Por ejemplo,

$$(11, 22, 33)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33, 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33)$$

$$= (242, 308)$$

2. **(Matriz $\times$ vector columna, AP).** La operación es válida sólo si la cantidad de columnas de **A** y el tamaño del vector columna **P** son iguales. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 11 + 3 \times 22 + 5 \times 33 \\ 2 \times 11 + 4 \times 22 + 6 \times 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 242 \\ 308 \end{pmatrix}$$

3. **(Escalar $\times$ matriz, αA).** Dada la cantidad escalar a (o constante), la operación de multiplicación $\alpha\mathbf{A}$ da una matriz del mismo tamaño que la matriz **A**. Por ejemplo, dado que $\alpha = 10$,

$$(10)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2A

1. Considere las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_1 = (11, 22), \mathbf{V}_2 = (-1, -2, -3)$$

En cada uno de los siguientes casos, indique si la operación matricial dada es legítima; si lo es, calcule el resultado.

*(a) $\mathbf{AV}_1$
(b) $\mathbf{AP}_1$
(c) $\mathbf{AP}_2$
(d) $\mathbf{V}_1\mathbf{A}$
*(e) $\mathbf{V}_2\mathbf{A}$
(f) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$
(g) $\mathbf{V}_1\mathbf{P}_1$

4.2.2 Diseño de la tabla simplex

La tabla simplex del capítulo 3 es la base para la presentación en este capítulo. La figura 4.1 representa esquemáticamente las tablas simplex *inicial* y *generales*. En la tabla inicial, los coeficientes de restricción bajo las variables iniciales forman una **matriz identidad** (todos los elementos en la diagonal principal son 1, y todos los elementos

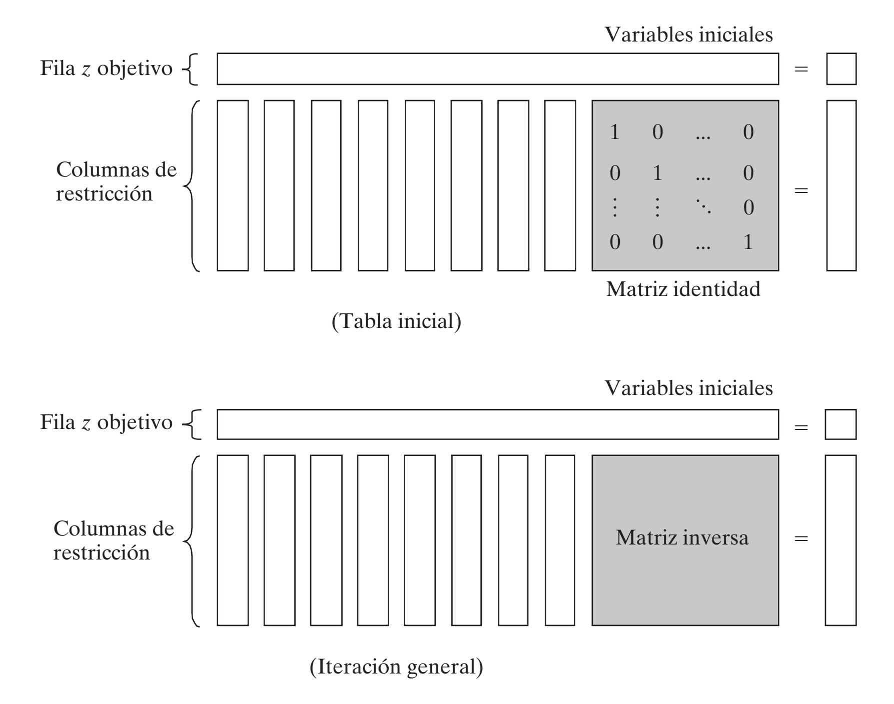


FIGURA 4.1
Representación esquemática de las tablas simplex inicial y general

fuera de la diagonal son cero). Con esta disposición, las iteraciones siguientes de la tabla simplex generadas por las operaciones de filas de Gauss-Jordan (vea el capítulo 3) modifican los elementos de la matriz identidad para producir lo que se conoce como **matriz inversa**. Como veremos en el resto de este capítulo, la matriz inversa es la clave para calcular todos los elementos de la tabla simplex asociada.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2B

1. Considere la tabla óptima del ejemplo 3.3-1.
   (a)* Identifique la matriz inversa óptima.
   (b) Demuestre que el lado derecho es igual a la inversa multiplicada por el vector del lado derecho original de las restricciones originales.

2. Repita el problema 1 para la última tabla del ejemplo 3.4-1.

4.2.3 Solución dual óptima

Las soluciones primal y dual están estrechamente relacionadas en el sentido de que la solución óptima de uno u otro problema da la solución óptima al otro. Así pues, en un modelo de PL en el que la cantidad de variables es considerablemente menor que la de restricciones, pueden ahorrarse cálculos resolviendo el dual porque la cantidad de

cálculos simplex depende en gran medida (aunque no totalmente) de la cantidad de restricciones (vea el problema 2, conjunto 4.2c).

Esta sección proporciona dos métodos para determinar los valores duales.

Método 1.

$$\begin{pmatrix}\text{Valor óptimo de} \\ \text{la variable } \textit{dual } y_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Coeficiente } z \text{ primal óptimo de la variable } \textit{inicial } x_i \\ + \\ \text{Coeficiente objetivo } \textit{original} \text{ de } x_i\end{pmatrix}$$

Método 2.

$$\begin{pmatrix}\text{Valores óptimos de} \\ \text{las variables } \textit{duales}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Vector fila de los} \\ \text{coeficientes objetivo originales de las} \\ \text{variables básicas } \textit{primales} \text{ óptimas}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Inversa } \textit{primal} \\ \text{óptima}\end{pmatrix}$$

Los elementos del vector fila deben aparecer en el mismo orden en que las variables básicas aparecen en la columna *Básica* de la tabla simplex.

Ejemplo 4.2-1

Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para preparar el problema para su solución mediante el método simplex, agregamos una variable de holgura x_4 en la primera restricción y una variable artificial R en la segunda. Por consiguiente, el primal resultante y los problemas duales asociados se definen como sigue:

Primal	Dual
Maximizar $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR$	Minimizar $w = 10y_1 + 8y_2$
sujeto a	sujeto a
$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 + R = 8$	$2y_1 - y_2 \geq 12$
$x_1, x_2, x_3, x_4, R \geq 0$	$y_1 + 3y_2 \geq 4$
	$y_1 \geq 0$
	$y_2 \geq -M$ ($\Rightarrow y_2$ irrestricta)

La tabla 4.3 proporciona la tabla primal óptima.

A continuación demostramos cómo se determinan los valores duales óptimos aplicando los dos métodos descritos al inicio de esta sección.

TABLA 4.3 Tabla óptima del primal del ejemplo 4.2-1

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	R	Solución
z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$	$54\frac{4}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

Método 1. En la tabla 4.3, las variables primales iniciales x_3 y R corresponden sólo a las variables duales y_1 y y_2, respectivamente. Por lo tanto, determinamos la solución dual óptima como sigue:

Variables básicas primales iniciales	x_4	R
Coeficientes de la ecuación z	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$
Coeficiente objetivo original	0	$-M$
Variables duales	y_1	y_2
Valores duales óptimos	$\frac{29}{5} + 0 = \frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M + (-M) = -\frac{2}{5}$

Método 2. La matriz inversa óptima, resaltada en la tabla 4.3, bajo las variables iniciales x_4 y R, es

$$\text{Inversa óptima} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

El orden de las variables básicas primales óptimas en la columna *Básica* es x_2 seguida por x_1. Los elementos de los coeficientes objetivo originales para las dos variables deben aparecer en el mismo orden, es decir,

$$\begin{aligned}(\text{Coeficientes objetivo originales}) &= (\text{Coeficiente de } x_2, \text{coeficiente de } x_1)\\ &= (12{,}5)\end{aligned}$$

Los valores duales óptimos son

$$\begin{aligned}(y_1, y_2) &= \begin{pmatrix}\text{Coeficientes objetivo}\\ \text{originales de } x_2, x_1\end{pmatrix} \times (\text{Inversa óptima})\\ &= (12, 5)\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\\ &= \left(\frac{29}{5}, -\frac{2}{5}\right)\end{aligned}$$

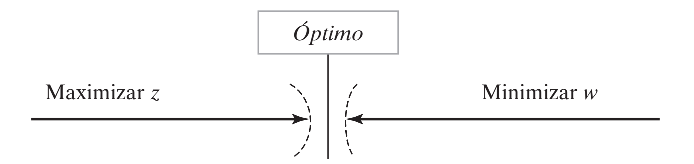


FIGURA 4.2
Relación entre z máxima y w mínima

Valores objetivo primales-duales. Para cualquier par de soluciones primales y duales *factibles*

$$\begin{pmatrix}\text{Valor objetivo en el}\\ \text{problema de } \textit{maximización}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Valor objetivo en el}\\ \text{problema de } \textit{minimización}\end{pmatrix}$$

En el óptimo, la relación se mantiene como una ecuación estricta, lo que significa que los dos valores objetivo son iguales. Observe que la relación no especifica cuál problema es primal y cuál es dual. En este caso sólo el sentido de optimización (maximización o minimización) es importante.

El óptimo no puede ocurrir con z estrictamente menor que w (es decir, $z < w$) porque, no importa qué tan cerca estén z y w, siempre hay la oportunidad de una mejora, lo que contradice la optimalidad como lo demuestra la figura 4.2.

Ejemplo 4.2-2

En el ejemplo 4.2-1 ($x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{8}{3}$) y ($y_1 = 6, y_2 = 0$) son soluciones primales y duales factibles (arbitrarias). Los valores asociados de las funciones objetivo son

$$z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 5(0) + 12(0) + 4(\tfrac{8}{3}) = 10\tfrac{2}{3}$$
$$w = 10y_1 + 8y_2 = 10(6) + 8(0) = 60$$

Por lo tanto, $z(= 10\frac{2}{3})$ en el problema de maximización (primal) es menor que w (= 60) en el problema de minimización (dual). El valor óptimo de z (= $54\frac{4}{5}$) queda en el intervalo ($10\frac{2}{3}$, 60).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2C

1. Determine el valor óptimo de la función objetivo en el siguiente problema al inspeccionar sólo el dual. (No resuelva el dual con el método simplex).

$$\text{Minimizar } z = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2. Resuelva el dual del siguiente problema, y en seguida halle su solución óptima a partir de la solución del dual. ¿Ofrece ventajas computacionales la solución del dual sobre la solución directa del primal?

$$\text{Minimizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\geq 50 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\geq 20 \\ 7x_1 + 6x_2 - 9x_3 &\geq 30 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\geq 35 \\ 2x_1 + 4x_2 - 15x_3 &\geq 10 \\ 12x_1 + 10x_2 &\geq 90 \\ x_2 - 10x_3 &\geq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

***3.** Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 30 \\ x_1 - 5x_2 - 6x_3 &\leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dado que la variable artificial x_4 y la variable de holgura x_5 forman las variables básicas iniciales y que M se estableció igual a cero al solucionar el problema, la *tabla óptima* se da como:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	23	7	105	0	150
x_1	1	5	2	1	0	30
x_5	0	–10	–8	–1	1	10

Escriba el problema dual asociado y encuentre su solución óptima de las dos maneras.

4. Considere la siguiente PL:

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución inicial se compone de las variables artificiales x_4 y x_5 para la primera y segunda restricciones y la variable de holgura x_6 para la tercera restricción. Utilizando $M = 100$ para las variables artificiales, la tabla óptima se da como sigue:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	0	0	0	−98.6	−100	−.2	3.4
x_1	1	0	0	.4	0	–.2	.4
x_2	0	1	0	.2	0	.6	1.8
x_3	0	0	1	1	–1	1	1.0

Escriba el problema dual asociado y determine su solución óptima de las dos maneras.

5. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Aplicando x_3 y x_4 como variables iniciales, la tabla óptima se da como

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	2	0	0	3	16
x_3	.75	0	1	–.25	2
x_2	.25	1	0	.25	2

Escriba el problema dual asociado, y determine su solución óptima en dos maneras.

*__6.__ Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La solución inicial se compone de la variable x_3 en la primera restricción y una variable artificial x_4 en la segunda restricción con $M = 100$. La tabla óptima se da como

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	2	0	99	5
x_3	1	2.5	1	–.5	1
x_1	0	–.5	0	.5	2

Escriba el problema dual asociado, y determine su solución óptima de las dos maneras.

7. Considere el siguiente conjunto de desigualdades:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq -4$$
$$3x_1 - 5x_2 \leq 2$$
$$x_1 \text{ irrestricta}$$
$$x_2 \geq 0$$

Se puede determinar una solución factible incrementando la función objetivo trivial, maximizar $z = x_1 + x_2$ y luego resolviendo el problema. Otra forma es resolver el dual, con el cual puede determinarse una solución para el conjunto de desigualdades. Aplique ambos métodos.

8. Estime un intervalo para el valor objetivo óptimo de las siguientes PL:

*(a) Minimizar $z = 5x_1 + 2x_2$
sujeto a

$$x_1 - x_2 \geq 3$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(b) Maximizar $z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$
sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(c) Maximizar $z = 2x_1 + x_2$
sujeto a

$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$2x_1 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(d) Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$
sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

9. En el problema 7(a), sean y_1 y y_2 las variables duales. Determine si los siguientes pares de soluciones primales-duales son óptimos.

(a)* $(x_1 = 3,\ x_2 = 1;\ y_1 = 4,\ y_2 = 1)$

(b) $(x_1 = 4,\ x_2 = 1;\ y_1 = 1,\ y_2 = 0)$

(c) $(x_1 = 3,\ x_2 = 0;\ y_1 = 5,\ y_2 = 0)$

4.2.4 Cálculos con la tabla simplex

Esta sección muestra cómo se puede generar *cualquier iteración* de la tabla simplex a partir de los datos *originales* del problema, la *inversa* asociada con la iteración, y el problema dual. Con el diseño de la tabla simplex que se muestra en la figura 4.1, podemos dividir los cálculos en dos tipos:

1. Columnas de restricción (lados izquierdo y derecho).
2. Fila z objetivo.

Fórmula 1: Cálculos con la columna de restricción. En cualquier iteración simplex, una columna izquierda o derecha se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Columna de restricción}\\ \text{en iteración } i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa en}\\ \text{la iteración } i\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Columna de}\\ \text{restricción original}\end{pmatrix}$$

Fórmula 2: Cálculos con la fila z objetivo. En cualquier iteración simplex, el coeficiente de x_j en la ecuación objetivo (costo reducido) se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix}\text{Coeficiente de la variable } x_1\\ \text{en la ecuación } z \textit{ primal}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Lado izquierdo de la}\\ \text{restricción } \textit{dual j-ésima}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Lado derecho de la}\\ \text{restricción } \textit{dual j-ésima}\end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2-3

Utilizamos la programación lineal del ejemplo 4.2-1 para ilustrar la aplicación de las fórmulas 1 y 2. A partir de la tabla óptima que aparece en la tabla 4.3, tenemos

$$\text{Inversa óptima} = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Columna } x_1 \text{ en la}\\ \text{iteración óptima}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa en la}\\ \text{iteración óptima}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Columna } x_1\\ \text{en original}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Puede utilizarse un cálculo similar para generar las columnas óptimas para x_2, x_3, x_4, R, y el lado derecho (¡compruébelo!).

A continuación demostramos cómo se realizan los cálculos de fila objetivo con la fórmula 2. Los valores óptimos de las variables duales $(y_1, y_2) = \left(\frac{29}{5}, -\frac{2}{5}\right)$, se calcularon en el ejemplo 4.2-1. Estos valores se utilizan en la fórmula 2 para calcular todos los coeficientes z, como se ilustra aquí para x_1 y R.

$$\text{Coeficiente } z \text{ de } x_1 = y_1 + 2y_2 - 5 = \tfrac{29}{5} + 2 \times -\tfrac{2}{5} - 5 = 0$$

$$\text{Coeficiente } z \text{ de } R = y_2 - (-M) \quad = -\tfrac{2}{5} - (-M) \qquad = -\tfrac{2}{5} + M$$

Pueden usarse cálculos similares para determinar los coeficientes z de x_2, x_3 y x_4 (¡compruébelo!).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.2D

1. Genere la primera iteración simplex del ejemplo 4.2-1 (por comodidad puede utilizar la opción Iterations ⇒ M-method con $M = 100$), luego utilice las fórmulas 1 y 2 para verificar todos los elementos de la tabla resultante.
2. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + 14x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + x_3 \quad\; &= 21 \\ 7x_1 + 2x_2 \quad\; + x_4 &= 21 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Compruebe la optimalidad y factibilidad de cada una de las siguientes soluciones básicas.

*(a) Variables básicas $= (x_2, x_4)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix}$

(b) Variables básicas $= (x_2, x_3)$, Inversa $= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$

(c) Variables básicas $= (x_2, x_1)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{7}{45} & -\frac{2}{45} \\ -\frac{2}{45} & \frac{7}{45} \end{pmatrix}$

(d) Variables básicas $= (x_1, x_4)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$

3. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad\quad &= 30 \\ 3x_1 \quad + 2x_3 \quad + x_5 \quad &= 60 \\ x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + x_6 &= 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Compruebe la optimalidad y factibilidad de las siguientes soluciones básicas.

(a) Variables básicas $= (x_4, x_3, x_6)$, Inversa $= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Variables básicas $= (x_2, x_3, x_1)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(c) Variables básicas $= (x_2, x_3, x_6)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

*__4.__ Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 \quad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad - x_4 \quad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Calcule la tabla simplex completa asociada con la siguiente solución básica, y compruebe optimalidad y factibilidad.

$$\text{Variables básicas} = (x_1, x_2, x_5), \text{ Inversa} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \quad &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Identifique la mejor solución de entre las siguientes soluciones factibles básicas:

(i) Variables básicas $= (x_4, x_3)$, Inversa $= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(ii) Variables básicas $= (x_2, x_1)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

(iii) Variables básicas $= (x_2, x_3)$, Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$

(b) ¿Es óptima la solución obtenida en (a) para el modelo de PL?

6. Considere el siguiente modelo de PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq b_1$$
$$x_1 - 5x_2 - 6x_3 \leq b_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La siguiente tabla óptima corresponde a valores específicos de b_1 y b_2:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	a	7	d	e	150
x_1	1	b	2	1	0	30
x_5	0	c	–8	–1	1	10

Determine lo siguiente:

(a) Los valores del lado derecho, b_1 y b_2.

(b) La solución dual óptima.

(c) Los elementos a, b, c, d y e.

*__7.__ La siguiente es la tabla óptima para un modelo de PL de maximización con tres restricciones ($\leq$) y todas las variables no negativas. Las variables x_3, x_4 y x_5 son las holguras asociadas con las tres restricciones. Determine el valor objetivo óptimo asociado de dos maneras diferentes usando las funciones objetivo primal y dual.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	0	0	3	2	?
x_3	0	0	1	1	–1	2
x_2	0	1	0	1	0	6
x_1	1	0	0	–1	1	2

8. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Aproveche el problema dual para demostrar que la solución básica (x_1, x_2) no es óptima.

9. Demuestre que el método 1 de la sección 4.2.3 para determinar los valores duales óptimos en realidad está basado en la fórmula 2 de la sección 4.2.4.

4.3 INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA DUALIDAD

El problema de PL puede considerarse como un modelo de asignación de recursos que busca maximizar los ingresos con recursos limitados. Considerando el problema desde este punto de vista, el problema dual asociado ofrece interesantes interpretaciones económicas del modelo de asignación de recursos.

Para formalizar el planteamiento, considere la siguiente representación de los problemas primal y dual:

Primal	Dual
Maximizar $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	Minimizar $w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
sujeto a	sujeto a
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$
$x_j \geq 0,\ j=1, 2, \ldots, n$	$y_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$

Considerado como un modelo de asignación de recursos, el problema primal consta de n actividades económicas y m recursos. El coeficiente c_j en el primal representa el ingreso por unidad de la actividad j. El recurso i con disponibilidad b_i se consume a razón de a_{ij} unidades por unidad de actividad j.

4.3.1 Interpretación económica de las variables duales

La sección 4.2.3 establece que para cualquiera de las dos soluciones *factibles* primal y dual, los valores de las funciones objetivo, cuando son finitos, deben satisfacer la siguiente desigualdad:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$$

En el óptimo, los dos valores objetivo son iguales, es decir, $z = w$.

En función del modelo de asignación de recursos, z representa \$ ingresos, y b_i representa unidades disponibles del recurso i. Por lo tanto, dimensionalmente, $z = w$ implica

$$\$ \text{ ingresos} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_{i=1}^{m} (\text{unidades del recurso } i) \times (\$ \text{ por unidad del recurso } i)$$

Esto quiere decir que la variable dual, y_i, representa el **valor por unidad** del recurso i.

Como se expone en la sección 3.6, el nombre estándar **precio dual** (o precio **sombra**) del recurso i reemplaza el nombre (sugestivo) *valor por unidad* en toda la literatura de programación lineal y en los paquetes de software, de ahí que también se adoptó el nombre estándar en este libro.

Utilizando el mismo análisis dimensional, podemos interpretar la desigualdad $z < w$ (para cualquiera de las dos soluciones primal y dual) como

$$(\text{Ingreso}) < (\text{Valor de los recursos})$$

Esta relación expresa que en tanto el ingreso total de todas las actividades sea menor que el valor de los recursos, las soluciones primal y dual correspondientes no serán óptimas. La optimalidad se alcanza sólo cuando los recursos se han explotado por completo. Esto puede suceder sólo cuando la entrada (valor de los recursos) se iguala a la salida (ingreso en dólares).

Ejemplo 4.3-1

El modelo de Reddy Mikks (ejemplo 2.1-1) y su dual se dan como sigue:

Primal de Reddy Mikks	Dual de Reddy Mikks
Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$ sujeto a $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (recurso 1, $M1$) $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (recurso 2, $M2$) $-x_1 + x_2 \leq 1$ (recurso 3, mercado) $x_2 \leq 2$ (recurso 4, demanda) $x_1, x_2 \geq 0$	Minimizar $w = 24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4$ sujeto a $6y_1 + y_2 - y_3 \geq 5$ $4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 4$ $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$
Solución óptima: $x_1 = 3, x_2 = 1.5, z = 21$	Solución óptima: $y_1 = .75, y_2 = 0.5, y_3 = y_4 = 0, w = 21$

El modelo de Reddy Mikks se ocupa de la producción de dos tipos de pintura (para interiores y exteriores) con dos materias primas $M1$ y $M2$ (recursos 1 y 2) y sujeto a los límites del mercado y a la demanda por la tercera y cuarta restricciones. El modelo determina las cantidades (en toneladas por día) de pinturas para exteriores e interiores que maximizan el ingreso diario (expresado en miles de dólares).

La solución dual óptima muestra que el precio dual (valor por unidad) de la materia prima $M1$ (recurso 1) es $y_1 = .75$ (o $750 por tonelada) y que la materia prima $M2$ (recurso 2) es $y_2 = .5$ (o $500 por tonelada). Estos resultados se mantienen ciertos en *intervalos de factibilidad* específicos como se mostró en la sección 3.6. Para los recursos 3 y 4, que representan los límites del mercado y de la demanda, ambos precios duales son cero, lo que indica que sus recursos asociados son abundantes (es decir, no son críticos al determinar el óptimo y, por consiguiente, su valor por unidad, o precio dual, es cero).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.3A

1. En el ejemplo 4.3-1, calcule el cambio del ingreso óptimo en cada uno de los siguientes casos (utilice el resultado de TORA para obtener los intervalos de factibilidad):

(a) La restricción para la materia prima $M1$ (recurso 1) es $6x_1 + 4x_2 \leq 22$.

(b) La restricción para la materia prima $M2$ (recurso 2) es $x_1 + 2x_2 \leq 4.5$.

(c) La condición del mercado representada por el recurso 4 es $x_2 \leq 10$.

2.* NWAC Electronics fabrica cuatro tipos de cable sencillo para un contratista gubernamental. Cada cable debe pasar a través de cuatro operaciones consecutivas: corte, estañado, encamisado e inspección. La siguiente tabla presenta los datos pertinentes de la situación.

	Minutos por unidad				
Cable	*Corte*	*Estañado*	*Encamisado*	*Inspección*	Ingreso por unidad ($)
SC320	10.5	20.4	3.2	5.0	9.40
SC325	9.3	24.6	2.5	5.0	10.80
SC340	11.6	17.7	3.6	5.0	8.75
SC370	8.2	26.5	5.5	5.0	7.80
Capacidad diaria (minutos)	4800.0	9600.0	4700.0	4500.0	

El contratista garantiza un nivel de producción mínimo de 100 unidades de cada uno de los cuatro cables.

(a) Formule el problema como un modelo de programación lineal, y determine el programa óptimo de producción.

(b) Basado en los precios duales, ¿recomienda incrementar las capacidades diarias de cualquiera de las cuatro operaciones? Explique.

(c) ¿Representan los requerimientos mínimos de producción de los cuatro cables una ventaja o una desventaja para NWAC Electronics? Dé una explicación con base en los precios duales.

(d) ¿Se puede garantizar la contribución actual de cada unidad al ingreso por el precio dual si incrementamos en 10% la capacidad del proceso de estañado?

3. BagCo produce chamarras y bolsos de mano de piel. Una chamarra requiere 8 m^2 de piel, y un bolso de mano sólo 2 m^2. Las necesidades de mano de obra para los dos productos son de 12 y 15 horas, respectivamente. Los actuales suministros semanales de piel y mano de obra están limitados a 1200 m^2 y 1850 horas. La compañía vende las chamarras a $350 y los bolsos de mano a $120. El objetivo es determinar el programa de producción que maximice el ingreso neto.

(a) Determine la solución óptima.

(b) BagCo planea aumentar la producción. ¿Cuál es el precio de compra máximo que la compañía debe pagar por la piel adicional? ¿Y cuánto por la mano de obra extra?

4.3.2 Interpretación económica de las restricciones duales

El significado económico de las restricciones duales puede lograrse utilizando la fórmula 2 de la sección 4.2.4, la cual establece que en cualquier iteración primal,

$$\text{El coeficiente objetivo de } x_j = \begin{pmatrix}\text{Lado izquierdo de} \\ \text{la restricción dual } j\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Lado derecho de} \\ \text{la restricción dual } j\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$$

Una vez más utilizamos el análisis dimensional para interpretar esta ecuación. El ingreso por unidad, c_j, de la actividad j está en dólares por unidad. De ahí que, por consistencia, la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ también debe estar en dólares por unidad. A continuación, como c_j representa ingreso, la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$, con signo opuesto, debe representar costo. Por lo tanto tenemos

$$\$ \text{ costo} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} \begin{pmatrix}\text{Consumo del recurso } i \\ \text{por unidad de la actividad } j\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Costo por unidad} \\ \text{del recurso } i\end{pmatrix}$$

La conclusión es que la variable dual y_1 representa lo que se conoce en la literatura de PL como **costo imputado** por unidad de recurso i, y podemos considerar que la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ como el costo imputado de todos los recursos necesarios para producir una unidad de la actividad j. Como se indica en la sección 3.6, la cantidad $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$ (= costo imputado de la actividad $j - c_j$) se conoce como **costo reducido**

de la actividad *j*. La condición de optimalidad de maximización del método simplex plantea que un incremento en el nivel de una actividad *j* no utilizada (no básica) puede mejorar el ingreso sólo si su *costo reducido* es negativo. En función de la interpretación precedente, esta condición establece que

$$\begin{pmatrix}\text{Costo imputado de}\\ \text{recursos consumidos por}\\ \text{una unidad de la actividad } j\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}\text{Ingreso por unidad}\\ \text{de la actividad } j\end{pmatrix}$$

De este modo, la condición de optimalidad de maximización dice que es económicamente ventajoso incrementar el nivel de una actividad si su ingreso unitario excede su costo unitario imputado.

Ejemplo 4.3-2

TOYCO ensambla tres tipos de juguetes: trenes, camiones y autos, realizando tres operaciones. Los tiempos de ensamble disponibles para las tres operaciones son 430, 460 y 420 minutos por día, y los ingresos por tren, camión y auto de juguete son \$3, \$2 y \$5, respectivamente. Los tiempos de ensamble por tren para las tres operaciones son 1, 3 y 1 minuto, respectivamente. Los tiempos correspondientes por camión y por auto son (2, 0, 4) y (1, 2, 0) minutos (un tiempo cero indica que la operación no se utiliza).

Sean x_1, x_2 y x_3 las cantidades diarias de unidades ensambladas de trenes, camiones y carros, el modelo de programación lineal asociado y su dual se dan como sigue:

Primal de TOYCO	Dual de TOYCO
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	Minimizar $w = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$
sujeto a	sujeto a
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operación 1)	$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (Operación 2)	$2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operación 3)	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = \$1350$	$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = \$1350$

La solución óptima pide que se produzcan 100 camiones y 230 autos, pero ningún tren.

Suponga que a TOYCO también le interesa producir trenes (x_1). ¿Cómo se puede lograr esto? Examinando el *costo reducido* de x_1, un tren de juguete se vuelve económicamente atractivo sólo si su costo unitario imputado es estrictamente menor que su ingreso unitario. TOYCO puede lograr esto si incrementa el precio unitario. También puede reducir el costo imputado de los recursos consumidos ($= y_1 + 3y_2 + y_3$).

Una reducción en el costo unitario imputado conlleva a reducir los tiempos de ensamble utilizados por un tren en las tres operaciones. Sean r_1, r_2 y r_3 las relaciones de las reducciones en las operaciones 1, 2 y 3, respectivamente. La meta es determinar los valores de r_1, r_2 y r_3 de modo que el nuevo costo imputado por tren sea menor que su ingreso unitario, es decir,

$$1(1 - r_1)y_1 + 3(1 - r_2)y_2 + 1(1 - r_3)y_3 < 3$$
$$0 \leq r_1 \leq 1, 0 \leq r_2 \leq 1, 0 \leq r_3 \leq 1$$

Para los valores duales óptimos, $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0$, esta desigualdad se reduce a

$$r_1 + 6r_2 > 4, 0 \leq r_1 \leq 1, 0 \leq r_2 \leq 1$$

Todos los valores de r_1 y r_2 que cumplan con estas condiciones harán que los trenes sean rentables. Observe, sin embargo, que quizás esta meta no sea alcanzable porque requiere grandes reducciones en los tiempos de las operaciones 1 y 2 que no parecen ser prácticas. Por ejemplo, incluso una reducción de 50% (es decir, $r_1 = r_2 = .5$) no satisface la condición dada. Entonces la conclusión lógica es que TOYCO no debe producir trenes a menos que las reducciones del tiempo vayan acompañadas de un incremento en el ingreso unitario.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.3B

1. En el ejemplo 4.3-2, suponga que para los trenes el tiempo por unidad de la operación 2 puede reducirse de 3 a cuando mucho 1.25 minutos. ¿Qué tanto debe reducirse el tiempo por unidad de la operación 1 para que los trenes sean apenas rentables?

*__2.__ En el ejemplo 4.3-2, suponga que TOYCO está estudiando la posibilidad de introducir un cuarto juguete: camiones de bombero. El ensamble no utiliza la operación 1. Sus tiempos de ensamble unitarios en las operaciones 2 y 3 son 1 y 3 minutos, respectivamente. El ingreso por unidad es de $4. ¿Aconsejaría a TOYCO introducir el nuevo producto?

*__3.__ JoShop utiliza tornos y taladros de banco para producir cuatro tipos de piezas para maquinaria, *PP*1, *PP*2, *PP*3 y *PP*4. La siguiente tabla resume los datos pertinentes.

	Tiempo de maquinado en minutos por unidad de				
Máquina	*PP*1	*PP*2	*PP*3	*PP*4	Capacidad (min)
Tornos	2	5	3	4	5300
Taladros de banco	3	4	6	4	5300
Ingreso unitario ($)	3	6	5	4	

Para las piezas que no se producen por la solución óptima actual, determine la tasa de deterioro del ingreso óptimo por incremento unitario de cada uno de estos productos.

4. Considere la solución óptima de JoShop en el problema 3. La compañía estima que por cada pieza que no se produce (conforme a la solución óptima), el tiempo de maquinado puede reducirse 20% mediante mejoras del proceso. ¿Harían estas mejoras que las piezas fueran rentables? De no ser así, ¿cuál es el porcentaje de reducción mínimo necesario para lograr la rentabilidad?

4.4 ALGORITMOS SIMPLEX ADICIONALES

El capítulo 3 presenta el algoritmo simplex (primal) que se inicia siendo factible y continúa siéndolo hasta que se alcanza el óptimo. Esta sección presenta dos algoritmos, el **simplex dual** que se inicia como *no factible* (pero mejor que óptimo) y así permanece hasta que se restaura la factiblidad, y el **simplex generalizado**, que combina los métodos simplex primal y dual, los cuales se inician sin ser ni óptimos ni factibles. En los tres algoritmos se utiliza el análisis postóptimo de la sección 4.5.

4.4.1 Algoritmo simplex dual

El método simplex dual se inicia con una solución mejor que óptima y una solución básica no factible. Las condiciones de optimalidad y factibilidad están diseñadas para preservar la optimalidad de las soluciones básicas a medida que la solución se mueve hacia la factibilidad.

Condición dual de factibilidad. La variable de salida, x_r, es la variable básica que tiene el valor más negativo (los empates se rompen de forma arbitraria). Si todas las variables básicas son no negativas, el algoritmo se termina.[1]
Condición dual de optimalidad. Dado que x_r es la variable de salida, sea $\bar{c}_j$ el costo reducido de la variable no básica x_j, y α_{rj} el coeficiente de restricción en la fila x_r y en la columna x_j de la tabla. La variable de entrada es la variable no básica con $\alpha_{rj} < 0$ que corresponde a

$$\min_{\text{No básica } x_j} \left\{ \left|\frac{\bar{c}_j}{\alpha_{rj}}\right|, \alpha_{rj} < 0 \right\}$$

(Los empates se rompen arbitrariamente). Si $\alpha_{rj} \geq$ con todas las x_j no básicas, el problema no tiene una solución factible.

Para iniciar la programación lineal óptima y no factible, se debe cumplir con dos requisitos:

1. La función objetivo debe satisfacer la condición de optimalidad del método simplex regular (capítulo 3).
2. Todas las restricciones deben ser del tipo ($\leq$).

Las desigualdades del tipo ($\geq$) se convierten en ($\leq$) al multiplicar ambos lados de la desigualdad por -1. Si la PL incluye restricciones ($=$), la ecuación se puede reemplazar por dos desigualdades. Por ejemplo, $x_1 + x_2 = 1$, equivale a $x_1 + x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \geq 1$, o $x_1 + x_2 \leq 1, -x_1 + x_2 \leq -1$. La solución inicial es no factible si al menos uno de los lados derechos de las desigualdades es negativo.

Ejemplo 4.4-1

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &\geq 3 \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

[1]Como se explicó en la sección 3.7, una condición de factibilidad diferente, conocida como el *borde más inclinado*, ha mejorado tanto la eficiencia de cálculo del algoritmo simplex dual que ahora es el algoritmo dominante (basado en simplex) para resolver PL en todos los códigos comerciales.

En este ejemplo, las primeras dos desigualdades se multiplican por –1 para convertirlas en restricciones ($\leq$). Por tanto, la tabla inicial se da como sigue:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	–3	–2	–1	0	0	0	0
x_4	–3	–1	–1	1	0	0	–3
x_5	3	–3	–1	0	1	0	–6
x_6	1	1	1	0	0	1	3

La tabla es óptima porque todos los costos reducidos en la fila z son ≤ 0 ($\bar{c}_1 = -3$, $\bar{c}_2 = -2, \bar{c}_3 = -1, \bar{c}_4 = 0, \bar{c}_5 = 0, \bar{c}_6 = 0$). También es no factible porque al menos una de las variables básicas es negativa ($x_4 = -3, x_5 = -6, x_6 = 3$).

De acuerdo con la condición dual de factibilidad, $x_5(= -6)$ es la variable de salida. La siguiente tabla muestra cómo se utiliza la condición de optimalidad para determinar la variable de entrada.

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
Variable no básica	x_1	x_2	x_3
Fila z ($\bar{c}_j$)	–3	–2	–1
Fila x_5 α_{4j}	3	–3	–1
Relación, $\left\|\frac{\bar{c}_j}{\alpha_{5j}}\right\|, \alpha_{5j} < 0$	—	$\frac{2}{3}$	1

Las relaciones muestran que x_2 es la variable de entrada.

La siguiente tabla se obtiene al utilizar las conocidas operaciones de filas, las cuales dan

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	–5	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	4
x_4	–4	0	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	–1
x_2	–1	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_6	2	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	1
Relación	$\frac{5}{4}$	—	$\frac{1}{2}$	—	2	—	

La tabla anterior muestra que x_4 sale y x_3 entra, lo que da por resultado la siguiente tabla, la cual es tanto óptima como factible.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	–3	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{2}$
x_3	6	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_2	–3	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_6	–2	0	0	1	0	1	0

Observe cómo funciona el simplex dual. En todas las iteraciones la optimalidad se mantiene (todos los costos reducidos son ≤ 0) ya que cada nueva iteración mueve la solución hacia la factibilidad. En la iteración 3, la factibilidad se restaura por primera vez, y el proceso finaliza con la solución factible óptima dada como $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{3}{2}$ y $z = \frac{9}{2}$.

Momento de TORA.

TORA incluye un módulo tutorial para el método simplex dual. A partir del menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve ⇒ Algebraic ⇒ Iterations ⇒ Dual Simplex. Recuerde que necesita convertir las restricciones (=) en desigualdades. No tiene que convertir las restricciones (≥) porque TORA lo hará internamente.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.4A[2]

1. Considere el espacio de soluciones de la figura 4.3, donde se desea determinar el punto extremo óptimo que utiliza el método simplex *dual* para minimizar $z = 2x_1 + x_2$. La solución óptima ocurre en el punto $F = (0.5, 1.5)$ en la gráfica.

(a) ¿Puede el simplex dual iniciarse en el punto A?

***(b)** Si el punto G da la solución básica inicial (no factible pero mejor que óptima) y el punto F da el óptimo, ¿sería posible que las iteraciones del método simplex dual sigan la trayectoria $G \rightarrow E \rightarrow F$? Explique.

(c) Si la solución básica inicial (no factible) empieza en el punto L, identifique una posible trayectoria del método simplex dual que conduzca al punto factible óptimo en el punto F.

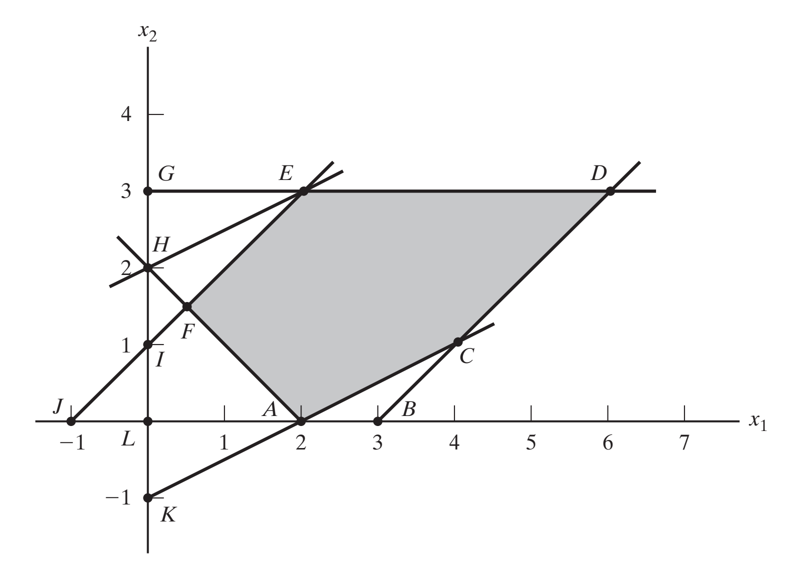


FIGURA 4.3

Espacio de soluciones para el problema 1, conjunto 4.4a

---

[2]Se le recomienda utilizar el modo tutorial de TORA cuando sea posible, para evitar los tediosos cálculos simplex.

2. Genere las iteraciones simplex dual para los siguientes problemas (utilizando TORA por comodidad), y trace la trayectoria del algoritmo en el espacio de soluciones gráficas.

(a) Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeto a

$$2x_1 + 2x_2 \leq 30$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(b) Minimizar $z = 5x_1 + 6x_2$
sujeto a

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$4x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(c) Minimizar $z = 4x_1 + 2x_2$
sujeto a

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$3x_1 - x_2 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(d) Minimizar $z = 2x_1 + 3x_2$
sujeto a

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1 + x_2 = 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

3. *Simplex dual con restricciones artificiales*. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq 4$$
$$-x_1 + 9x_2 - x_3 \geq 3$$
$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La solución básica inicial compuesta de variables de exceso x_4 y x_5, y la variable de holgura x_6 es no factible porque $x_4 = -4$ y $x_5 = -3$. Sin embargo, el simplex dual no es aplicable de forma directa, porque x_1 y x_3 no satisfacen la condición de optimalidad de maximización. Demuestre que agregando la restricción artificial $x_1 + x_3 \leq M$ (donde M es lo bastante grande como para no eliminar cualesquier puntos factibles en el espacio de soluciones original), y luego utilizando la nueva restricción como fila pivote, la selección de x_1 como la variable de entrada (porque tiene el coeficiente objetivo más negativo), producirá una fila totalmente óptima. A continuación, realice el método simplex dual regular en el problema modificado.

4. Utilizando el procedimiento de restricción artificial presentado en el problema 3, resuelva los siguientes problemas mediante el método simplex dual. En cada caso, indique si la solución resultante es factible, no factible, o no acotada.

(a) Maximizar $z = 2x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\geq 8 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) Maximizar $z = x_1 - 3x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 - 2x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

***(c)** Minimizar $z = -x_1 + x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &\geq 5 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 - 5x_2 &\geq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(d) Maximizar $z = 2x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 7x_3 &\geq 5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &\leq 1 \\ 3x_1 + x_2 - 10x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

5. Resuelva la siguiente PL de tres maneras diferentes (use TORA por comodidad). ¿Cuál método parece ser el más eficiente computacionalmente?

$$\text{Minimizar } z = 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 5x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 &\geq 12 \\ x_2 - 5x_3 - 6x_4 &\geq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

4.4.2 Algoritmo simplex generalizado

El algoritmo simplex (primal) en el capítulo 3 se inicia factible pero no óptimo. El simplex dual (sección 4.4-1) se inicia mejor que óptimo y no factible. ¿Y qué pasa si un modelo de programación lineal se inicia no óptimo y no factible al mismo tiempo? Desde luego, podemos utilizar variables y restricciones artificiales para asegurar una solución inicial. Sin embargo, esto no es obligatorio porque la idea clave de los métodos simplex primal y dual es que la solución factible óptima, cuando es finita, siempre ocurre en un punto de esquina (o una solución básica). Esto indica que puede desarrollarse un nuevo algoritmo simplex basado en el uso de uno tras otro de los métodos simplex dual y simplex primal. Primero utilice el algoritmo dual para deshacerse de la no factibilidad (sin preocuparse de la optimalidad). Una vez restaurada la factibilidad, puede usarse el simplex primal para hallar el óptimo. Como alternativa podemos aplicar primero el simplex primal para asegurar la optimalidad (sin preocuparnos de la factibilidad) y luego utilizar el simplex dual para buscar la factibilidad.

Ejemplo 4.4-2

Considere el modelo de PL de maximización del problema 4(a), conjunto 4.4a. El modelo puede ponerse en el siguiente formato de tabla en el cual la solución básica de inicio (x_4, x_5, x_6) es al mismo tiempo no óptima (debido a la variables x_3 no básica) y no factible (debido a la variable básica x_4).

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	0	0	–2	0	0	0	0
x_4	1	–2	2	1	0	0	–8
x_5	–1	1	1	0	1	0	4
x_6	2	–1	4	0	0	1	10

Podemos resolver el problema sin el uso de variables o restricciones artificiales, teniendo asegurada primero la factibilidad al aplicar el simplex dual y buscando luego la optimalidad si utilizamos el simplex primal. El simplex dual selecciona a x_4 como la variable de salida. La variable de entrada puede ser *cualquier* variable no básica con un coeficiente de restricción negativo en la fila x_4. En este ejemplo, x_2 tiene un coeficiente negativo en la fila x_4 y se le selecciona como la variable de entrada. Por tanto, la siguiente tabla se calcula como

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	0	0	–2	0	0	0	0
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	–1	$-\frac{1}{2}$	0	0	4
x_5	$-\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{1}{2}$	1	0	0
x_6	$\frac{3}{2}$	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	1	14

La nueva solución ahora es factible pero no óptima y podemos utilizar el simplex primal para determinar la solución óptima. Por lo común, si no hubiéramos restaurado la factibilidad en la tabla anterior, repetiríamos el procedimiento como fuera necesario hasta que se satisficiera la factibilidad o hasta que hubiera pruebas de que el problema no tiene una solución factible (lo

cual sucede si una variable básica es negativa y todos sus coeficientes de restricciones son no negativos).

Comentarios. La esencia del ejemplo 4.4-2 es que el método simplex no es rígido. La literatura abunda con variaciones del método simplex (por ejemplo, el método primal-dual, el método simétrico, el método entrecruzado y el método multiplex) que dan la impresión de que cada procedimiento es diferente, cuando, en realidad, todos buscan una solución de punto de esquina, con una tendencia hacia los cálculos automáticos y, quizás, eficiencia computacional.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.4B

1. El modelo de PL del problema 4(c), conjunto 4.4a, no tiene solución factible. Demuestre cómo detecta esta condición el *procedimiento simplex generalizado*.
2. El modelo de programación lineal del problema 4(d), conjunto 4.4a, no tiene solución acotada. Demuestre cómo detecta esta condición el *procedimiento simplex generalizado*.

4.5 ANÁLISIS POSTÓPTIMO

En la sección 3.6 nos ocupamos de la sensibilidad de la solución óptima al determinar los intervalos de los diferentes parámetros de PL que mantendrían las variables básicas óptimas sin cambiar. En esta sección nos ocuparemos de los cambios de los parámetros del modelo y de la determinación de la nueva solución óptima. Considere, por ejemplo, un caso en la industria avícola, donde comúnmente se utiliza un modelo de programación lineal para determinar la mezcla de alimentos óptima por pollo (vea el ejemplo 2.2-2). El consumo semanal por pollo varía de .26 lb (120 gramos) para un pollo de una semana de edad hasta 2.1 lb (950 gramos) para un pollo de ocho semanas de edad. Además, el costo de los ingredientes en la mezcla puede cambiar periódicamente. Estos cambios requieren un nuevo cálculo periódico de la solución óptima. El *análisis postóptimo* determina la nueva solución de una manera eficiente. Los nuevos cálculos tienen su raíz en el uso de las relaciones duales y primales-duales dadas en la sección 4.2.

La siguiente tabla lista esos casos que pueden surgir en el análisis postóptimo y las acciones necesarias para obtener la nueva solución (suponiendo que existe una):

Condiciones después de que cambian los parámetros	Acción recomendada
La solución actual permanece óptima y factible.	No es necesaria ninguna otra acción.
La solución actual se vuelve no factible.	Use el simplex dual para recuperar factibilidad.
La solución actual se vuelve no óptima.	Use el simplex primal para recuperar optimalidad.
La solución actual se vuelve no óptima y no factible al mismo tiempo.	Use el método simplex generalizado para recuperar optimalidad y factibilidad.

En esta sección se investigan los primeros tres casos. El cuarto caso, por ser una combinación de los casos 2 y 3, se trata en el problema 6, conjunto 4.5a.

Se utilizará el modelo de TOYCO del ejemplo 4.3-2 para explicar los diferentes procedimientos. Recuerde que el problema tiene que ver con el ensamble de tres tipos de juguetes: trenes, camiones y autos. En el ensamble intervienen tres operaciones. El modelo y su dual se repiten aquí por comodidad.

Primal de TOYCO	Dual de TOYCO
Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	Minimizar $z = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$
sujeto a	sujeto a
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operación 1)	$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460$ (Operación 2)	$2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operación 3)	$y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$y_1, y_2, y_3 \geq 0$
Solución óptima:	Solución óptima:
$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = \$1350$	$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = \$1350$

La tabla óptima asociada para el primal se da como

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	–2	1	1	20

4.5.1 Cambios que afectan la factibilidad

La factibilidad de la solución óptima actual se ve afectada sólo si cambia el lado derecho de las restricciones, o se agrega una nueva restricción al modelo. En ambos casos, la no factibilidad ocurre cuando una o más de las variables básicas actuales se vuelven negativas.

Cambios en el lado derecho. Este cambio requiere volver a calcular el lado derecho de la tabla aplicando la fórmula 1 de la sección 4.2.4:

$$\begin{pmatrix}\text{Nuevo lado derecho de} \\ \text{la tabla en la iteración } i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Inversa en} \\ \text{la iteración } i\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{Nuevo lado derecho} \\ \text{de las restricciones}\end{pmatrix}$$

Recuerde que el lado derecho de la tabla muestra los valores de las variables básicas.

Ejemplo 4.5-1

Situación 1. Suponga que TOYCO incrementa la capacidad diaria de las operaciones 1, 2 y 3 a 600, 640 y 590 minutos, respectivamente. ¿Cómo afectaría este cambio al ingreso total?

Con estos incrementos, el único cambio que tendrá lugar en la tabla óptima es el lado derecho de las restricciones (y el valor objetivo óptimo). Por tanto, la nueva solución básica se calcula como sigue:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 640 \\ 590 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 320 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Así, las variables básicas actuales, x_2, x_3 y x_4, permanecen factibles con los nuevos valores 140, 320 y 30 unidades, respectivamente. El ingreso óptimo asociado es $1880.

Situación 2. Aunque la nueva solución es atractiva desde el punto de vista del ingreso incrementado, TOYCO reconoce que su nueva implementación puede llevarse tiempo. Otra propuesta desplaza la capacidad de la operación 3 ($x_6 = 20$ minutos) a la capacidad de la operación 1. ¿Cómo impactaría este cambio la solución óptima?

Las capacidades de las tres operaciones cambian a 450, 460, y 400 minutos respectivamente. La solución resultante es

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 450 \\ 460 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 230 \\ -40 \end{pmatrix}$$

La solución resultante es no factible porque $x_6 = -40$, la cual requiere aplicar el método simplex dual para recuperar la factibilidad. Primero, modificamos el lado derecho de la tabla como se muestra por medio de la columna sombreada. Observe que el valor asociado es $z = 3 \times 0 + 2 \times 110 + 5 \times 230 = \$1370$.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	1370
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	110
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	–2	1	1	–40

Según el dual simplex, x_6 sale y x_4 entra, lo que da la siguiente tabla factible óptima (por lo común, el simplex dual puede requerir más de una iteración para recuperar la factibilidad).

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	5	0	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1350
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_4	–1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	20

La solución óptima (en función de x_1, x_2 y x_3) permanece igual que en el modelo original. Esto quiere decir que el cambio propuesto de la asignación de la capacidad no es ventajoso, porque simplemente cambia la capacidad excedente de la operación 3 a una capacidad de superávit en la operación 1. La conclusión entonces es que la operación 2 es el cuello de botella, y que puede ser ventajoso cambiar el superávit a la operación 2 (vea el problema 1, conjunto 4.5a).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5A

1. En el modelo de TOYCO que aparece al inicio de la sección 4.5, ¿sería más ventajoso asignar la capacidad de superávit de 20 minutos de la operación 3 a la operación 2 en lugar de la operación 1?

2. Suponga que TOYCO desea cambiar las capacidades de las tres operaciones a los siguientes casos:

(a) $\begin{pmatrix}460\\500\\400\end{pmatrix}$ **(b)** $\begin{pmatrix}500\\400\\600\end{pmatrix}$ **(c)** $\begin{pmatrix}300\\800\\200\end{pmatrix}$ **(d)** $\begin{pmatrix}450\\700\\350\end{pmatrix}$

Utilice el análisis postóptimo para determinar la solución óptima en cada caso.

3. Considere el modelo de Reddy Mikks del ejemplo 2-1.1. Su tabla óptima se da en el ejemplo 3.3-1. Si las disponibilidades diarias de las materias primas $M1$ y $M2$ se incrementan a 28 y 8 toneladas, respectivamente, utilice el análisis postóptimo para determinar la nueva solución óptima.

***4.** Ozark Farm tiene 20,000 pollos que alimenta durante ocho semanas antes de enviarlos al mercado. La alimentación semanal por pollo varía según el programa siguiente:

Semana	1	2	3	4	5	6	7	8
lb/pollo	.26	.48	.75	1.00	1.30	1.60	1.90	2.10

Para que el pollo alcance el peso deseado en ocho semanas, los alimentos deben satisfacer necesidades nutricionales específicas. Aunque una lista de alimentos es grande, por simplicidad limitaremos el modelo a sólo tres ingredientes: piedra caliza (carbonato de calcio), maíz y soya. Las necesidades nutricionales también se limitarán a tres tipos: calcio, proteína y fibra. La siguiente tabla resume el contenido nutritivo de los ingredientes seleccionados junto con sus costos.

	Contenido (lb) por libra de			
Ingrediente	*Calcio*	*Proteína*	*Fibra*	$ por libra
Piedra caliza	.380	.00	.00	.12
Maíz	.001	.09	.02	.45
Soya	.002	.50	.08	1.60

La mezcla alimenticia debe contener al menos .8% pero no más de 1.2% de calcio, un mínimo de 22% de proteína, y cuando mucho 5% de fibra cruda.

Resuelva la PL para la semana 1 y luego aplique el análisis postóptimo para desarrollar un programa óptimo para las 7 semanas restantes.

5. Demuestre que la regla de factibilidad de 100% del problema 12, conjunto 3.6c (capítulo 3) está basada en la condición

$$\begin{pmatrix}\text{Inversa}\\\text{óptima}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Vector del lado}\\\text{derecho original}\end{pmatrix} \geq 0$$

6. *Análisis postóptimo para casos que afectan tanto la optimalidad como la factibilidad.* Suponga que se dan los siguientes cambios simultáneos en el modelo de Reddy Mikks. El ingreso por tonelada de pinturas para exteriores e interiores es de \$1000 y \$4000, respec-

tivamente, y las disponibilidades diarias máximas de las materias primas M_1 y M_2 son de 28 y 8 toneladas, respectivamente.

(a) Demuestre que los cambios propuestos darán la solución óptima actual tanto no óptima como no factible.

(b) Use el *algoritmo simplex generalizado* (sección 4.4-2) para determinar la nueva solución factible óptima.

Adición de una nueva restricción. Agregar una nueva restricción nunca puede mejorar el valor objetivo óptimo actual. Si la nueva restricción es *redundante*, no afectará la solución actual. Además, la solución actual no satisface la nueva restricción, y debe determinarse una nueva solución mediante el método simplex dual.

Ejemplo 4.5-2

Situación 1. Suponga que TOYCO cambia el diseño de sus juguetes y que el cambio requerirá agregar una cuarta operación de ensamble. La capacidad diaria de la nueva operación es de 500 minutos y los tiempos por unidad de los tres productos en esta operación son 3, 1 y 1 minutos, respectivamente.

La nueva restricción para la operación 4 es

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

Esta restricción es redundante porque la satisface la solución óptima actual $x_1 = 0, x_2 = 100$, y $x_3 = 230$. Por consiguiente, la solución óptima actual no cambia.

Situación 2. Suponga, en cambio, que los tiempos de TOYCO por unidad en la cuarta operación se cambian a 3, 3 y 1 minutos, respectivamente. Los datos restantes del modelo no cambian.

La nueva restricción para la operación 4 es

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 500$$

La solución óptima actual no satisface esta restricción, y se agrega a la tabla óptima actual como sigue (x_7 es una variable de holgura):

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solución
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
x_6	2	0	0	–2	1	1	0	20
x_7	3	3	1	0	0	0	1	500

La tabla muestra que $x_7 = 500$, lo cual es consistente con los valores de x_2 y x_3 en el resto de la tabla. La razón es que las variables básicas x_2 y x_3 no se han sustituido en la nueva restricción. Esta sustitución se logra realizando la siguiente operación:

$$\text{Nueva fila } x_7 = \text{Anterior fila } x_7 - (3 \times (\text{fila } x_2) + 1 \times (\text{fila } x_3))$$

Esta operación es exactamente la misma que si se utilizara la sustitución

$$x_2 = 100 - (-\tfrac{1}{4}x_1 + \tfrac{1}{2}x_4 - \tfrac{1}{4}x_5)$$

$$x_3 = 230 - (\tfrac{3}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_5)$$

La nueva tabla es por consiguiente

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solución
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	0	20
x_7	$\frac{9}{4}$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	–30

La aplicación del método simplex dual producirá la nueva solución óptima $x_1 = 0, x_2 = 90, x_3 = 230$, y $z = \$1370$ (¡compruébelo!). La solución muestra que agregar la operación 4 reduce los ingresos de \$1350 a \$1330.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5B

1. En el modelo de TOYCO, suponga que las especificaciones de la cuarta operación son las siguientes: La tasa de producción máxima basada en 480 minutos al día es de 120 unidades del producto 1, 480 unidades del producto 2, o 240 unidades del producto 3. Determine la solución óptima, suponiendo que la capacidad diaria está limitada a

*__(a)__ 570 minutos

(b) 548 minutos

2. *Restricciones secundarias*. En lugar de resolver un problema utilizando todas sus restricciones, podemos empezar identificando las llamadas *restricciones secundarias*. Éstas son las restricciones que sospechamos son menos restrictivas en función de la solución óptima. El modelo se resuelve utilizando las restricciones (primarias) restantes. Entonces podemos agregar las restricciones secundarias de una en una. Una restricción secundaria se desecha si satisface la solución óptima disponible. El proceso se repite hasta que se tienen en cuenta todas las restricciones secundarias.

Aplique el procedimiento propuesto a la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 50 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 20 \\ 7x_1 + 6x_2 - 9x_3 &\leq 30 \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 35 \\ 12x_1 + 6x_2 \qquad &\leq 90 \\ x_2 - 9x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

4.5.2 Cambios que afectan la optimalidad

Esta sección considera la realización de cambios de los coeficientes objetivos y la adición de una nueva actividad económica (variable).

Cambios en los coeficientes de la función objetivo. Estos cambios afectan sólo la optimalidad de la solución y requieren que se calculen de nuevo los coeficientes de la fila z (costos reducidos) de acuerdo con el siguiente procedimiento:

1. Calcule los valores duales aplicando el método 2, sección 4.2.3.
2. Sustituya los nuevos valores duales en la fórmula 2, sección 4.2.4, para determinar los nuevos costos reducidos (coeficientes de la fila z).

Si la nueva fila z satisface la condición de optimalidad, la solución no cambia (sin embargo, el valor objetivo óptimo puede cambiar). Si no la satisface, se utiliza el simplex primal para recuperar la optimalidad.

Ejemplo 4.5-3

Situación 1. En el modelo de TOYCO, suponga que la compañía tiene una nueva política de fijación de precios para enfrentar la competencia. Los ingresos unitarios son \$2, \$3 y \$4 por los trenes, camiones y autos de juguete, en ese orden.

La nueva función objetivo es

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

Así,

$$(\text{Nuevos coeficientes objetivo de las variables básicas } x_2, x_3 \text{ y } x_6) = (3, 4, 0)$$

Aplicando el método 2, sección 4.2.3, las nuevas variables duales se calculan como

$$(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0\right)$$

Los coeficientes de la fila z se determinan como la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de las restricciones duales (fórmula 2, sección 4.2.4). No es necesario calcular de nuevo los coeficientes de fila objetivo de las variables básicas (x_2, x_3 y x_6) porque siempre son cero, independientemente de cualquier cambio realizado en los coeficientes objetivo (¡compruébelo!).

$$\text{Costo reducido de } x_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - \mathbf{2} = \tfrac{3}{2} + 3\left(\tfrac{5}{4}\right) + 0 - \mathbf{2} = \tfrac{13}{4}$$

$$\text{Costo reducido de } x_4 = y_1 - 0 = \tfrac{3}{2}$$

$$\text{Costo reducido de } x_5 = y_2 - 0 = \tfrac{5}{4}$$

Observe que el lado derecho de la primera restricción dual es 2, el *nuevo* coeficiente en la función objetivo modificada.

Los cálculos demuestran que la solución actual, $x_1 = 0$ trenes, $x_2 = 100$ camiones y $x_3 = 230$ autos, permanece óptima. El nuevo ingreso correspondiente se calcula como $2 \times 0 + 3 \times 100 + 4 \times 230 = \$1220$. No se recomienda la nueva política de fijación de precios porque disminuye el ingreso.

Situación 2. Suponga ahora que la función objetivo de TOYCO se cambia a

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

¿Cambiará la solución óptima?

Tenemos

$$(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{4}, 0\right)$$

$$\text{Costo reducido de } x_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - \mathbf{6} = \tfrac{3}{2} + 3(\tfrac{5}{4}) + 0 - \mathbf{6} = -\mathbf{\tfrac{3}{4}}$$

$$\text{Costo reducido de } x_4 = y_1 - 0 = \tfrac{3}{2}$$

$$\text{Costo reducido de } x_5 = y_2 - 0 = \tfrac{5}{4}$$

El nuevo costo reducido de x_1 muestra que la solución actual no es óptima.

Para determinar la nueva solución, la fila z se cambia como se resalta en la siguiente tabla:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	1220
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	–2	1	1	20

Los elementos resaltados son los nuevos costos reducidos y el nuevo valor objetivo. Todos los demás elementos son los mismos que aparecen en la tabla óptima original. La nueva solución óptima se determina entonces si x_1 entra y x_6 sale, lo que da la solución $x_1 = 10, x_2 = 102.5, x_3 = 215$ y $z = \$12270.50$ (¡compruébelo!). Aunque la nueva solución recomienda la producción de los tres juguetes, el ingreso óptimo es menor que cuando se fabricaban sólo dos juguetes.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5C

1. Investigue la optimalidad de la solución de TOYCO para cada una de las siguientes funciones objetivo. Donde sea necesario, aplique el análisis postóptimo para determinar el nuevo óptimo (La tabla óptima de TOYCO aparece al inicio de la sección 4.5).
   (a) $z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$
   (b) $z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$
   (c) $z = 8x_1 + 3x_2 + 9x_3$
2. Investigue la optimalidad de la solución de Reddy Miks (ejemplo 4.3-1) para cada una de las siguientes funciones objetivo. Si es necesario, aplique el análisis postóptimo para determinar el nuevo óptimo. (La tabla óptima del modelo se da en el ejemplo 3.3-1).
   *(a)** $z = 3x_1 + 2x_2$

(b) $z = 8x_1 + 10x_2$

(c) $*z = 2x_1 + 5x_2$

3. Demuestre que la regla de optimalidad de 100% (problema 8, conjunto 3.6d, capítulo 3) se deriva de (costos reducidos) ≥ 0 para problemas de maximización y (costos reducidos) ≤ 0 para problemas de minimización.

Adición de una nueva actividad. Una nueva actividad supone agregar una nueva variable al modelo. Por intuición, agregar una nueva actividad es deseable sólo si es rentable. Esta condición puede verificarse aplicando la fórmula 2, sección 4.2.4, para calcular el costo reducido de la nueva variable. La nueva actividad no es rentable si satisface la condición de optimalidad. De lo contrario, la nueva actividad incrementará el ingreso.

Ejemplo 4.5-4

TOYCO reconoce que en la actualidad los trenes de juguete no se están produciendo porque no son rentables. La compañía desea reemplazarlos con un nuevo producto, un camión de bomberos de juguete, que se ensamblará en las instalaciones existentes. TOYCO estima que el ingreso por camión de bomberos de juguete será de $4 y que los tiempos de ensamble por unidad serán de 1 minuto en cada una de las operaciones 1 y 2, y de 2 minutos en la operación 3.

Sea x_7 el nuevo producto de camión de bomberos. Dado que $(y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 0)$ son los valores duales óptimos, tenemos

$$\text{Costo reducido de } x_7 = 1y_1 + 1y_2 + 2y_3 - 4 = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 0 - 4 = -1$$

El resultado muestra que es rentable incluir x_7 en la solución básica óptima. Para obtener el nuevo óptimo, primero calculamos su columna de restricción aplicando la fórmula 1, sección 4.2.4 como

$$\text{Columna de restricciones } x_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

De este modo, la tabla simplex actual debe modificarse como sigue:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_7	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	–1	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	1	–2	1	1	20

El nuevo óptimo se determina si consideramos que x_7 entra en la solución básica, en cuyo caso x_6 debe salir. La nueva solución es $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 125, x_7 = 210$, y $z = \$1465$ (¡compruébelo!), lo cual mejora los ingresos en $115.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 4.5D

*1. En el modelo original de TOYCO, los trenes de juguete no forman parte de la combinación óptima de productos. La compañía reconoce que la competencia del mercado no permitirá elevar el precio unitario del juguete. En su lugar, la compañía desea concentrarse en mejorar la operación de ensamble. Esto implica reducir el tiempo de ensamble por unidad en cada una de las tres operaciones en un porcentaje especificado, $p\%$. Determine el valor de p que hará que los trenes apenas sean rentables. (La tabla óptima del modelo de TOYCO aparece al principio de la sección 4.5).

2. En el modelo de TOYCO, suponga que la compañía reduce los tiempos por unidad en las operaciones 1, 2 y 3 para los trenes de juguete a partir de los niveles actuales de 1, 3 y 1 minutos a .5, 1 y .5 minutos, respectivamente. El ingreso por unidad permanece en $3. Determine la nueva solución óptima.

3. En el modelo de TOYCO, suponga que un juguete (el camión de bomberos) requiere 3, 2 y 4 minutos, en ese orden, en las operaciones 1, 2 y 3. Determine la solución óptima cuando el ingreso por unidad sea de

*(a) $5

(b) $10

4. En el modelo de Reddy Mikks, la compañía está considerando producir una marca más económica de pintura para exteriores cuyos requerimientos de entrada por tonelada incluyen .75 toneladas de cada una de las materias primas $M1$ y $M2$. Las condiciones del mercado siguen dictando que el exceso de pintura exterior sobre la producción de *ambos* tipos de pintura para exteriores se limite a una tonelada diaria. El ingreso por tonelada de la nueva pintura para exteriores es de $3500. Determine la nueva solución óptima. (El modelo se explica en el ejemplo 4.5-1, y su tabla óptima aparece en el ejemplo 3.3-1).

BIBLIOGRAFÍA

Bazaraa, M., J. Jarvis, y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows,* 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.

Bradley, S., A. Hax, y T. Magnanti, *Applied Mathematical Programming,* Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.

Diwckar, *U., Introduction to Applied Optimization,* Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

Nering, E., y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems,* Academic Press, Boston, 1992.

Vanderbei, R., *Linear Programming: Foundation and Extensions*, 3a. ed., Springer, Nueva York, 2008.

CAPÍTULO 5

Modelo de transporte y sus variantes

Aplicación de la vida real. Programación de citas en eventos comerciales australianos

La Comisión de Turismo Australiana (ATC, por sus siglas en inglés) organiza eventos comerciales alrededor del mundo para que sirvan de foro donde se puedan reunir los vendedores australianos con los compradores internacionales de productos turísticos. Durante estos eventos los vendedores se sitúan en cubículos y los compradores los visitan de acuerdo con citas programadas. Debido a la limitación de tiempo disponible en cada evento y al hecho de que la cantidad de compradores y vendedores puede ser muy grande, la ATC procura programar las citas entre vendedor y comprador con anticipación para maximizar las preferencias. El modelo ha resultado muy satisfactorio tanto para los compradores como para los vendedores. (El caso 3 del capítulo 26, en inglés, del sitio web contiene los detalles del estudio).

5.1 DEFINICIÓN DEL MODELO DE TRANSPORTE

La red que aparece en la figura 5.1 representa el problema. Hay m orígenes y n destinos, cada uno representado por un **nodo**. Los **arcos** representan las rutas que unen los orígenes con los destinos. El arco (i, j) que une el origen i con el destino j transporta dos piezas de información: el costo de transporte por unidad, c_{ij} y la cantidad transportada, x_{ij}. La cantidad de la oferta en el origen i es a_i y la cantidad de la demanda en el destino j es b_j. El objetivo del modelo es minimizar el costo de transporte total al mismo tiempo que se satisfacen las restricciones de la oferta y la demanda.

Ejemplo 5.1-1

MG Auto cuenta con tres plantas en Los Ángeles, Detroit y Nueva Orleáns, y dos importantes centros de distribución en Denver y Miami. Las capacidades trimestrales de las tres plantas son 1000, 1500 y 1200 automóviles, y las demandas de los dos centros de distribución durante el mismo periodo son de 2300 y 1400 automóviles. La distancia en millas entre las plantas y los centros de distribución aparece en la tabla 5.1.

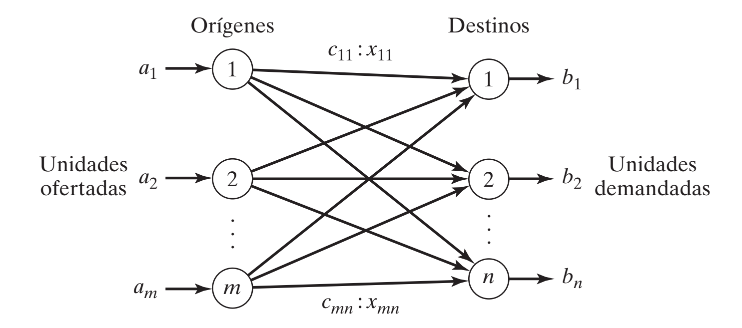


FIGURA 5.1
Representación del modelo de transporte con nodos y arcos

TABLA 5.1 Gráfica de distancia en millas

	Denver	Miami
Los Ángeles	1000	2690
Detroit	1250	1350
Nueva Orleáns	1275	850

La compañía transportista cobra 8 centavos por milla por automóvil. En la tabla 5.2 se dan los costos de transporte por automóvil en las diferentes rutas, redondeados al dólar más cercano.

El modelo de PL del problema es

$$\text{Minimizar } z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} \qquad\qquad\qquad\qquad &= 1000 \text{ (Los Ángeles)} \\
x_{21} + x_{22} \qquad\qquad &= 1500 \text{ (Detroit)} \\
+ x_{31} + x_{32} &= 1200 \text{ (Nueva Orleáns)} \\
x_{11} \quad + x_{21} \quad + x_{31} \qquad &= 2300 \text{ (Denver)} \\
x_{12} \quad + x_{22} \quad + x_{32} &= 1400 \text{ (Miami)} \\
x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, 3, \ j = 1, 2 &
\end{aligned}$$

Todas estas restricciones son ecuaciones porque la oferta total desde los tres orígenes (= 1000 + 1500 + 1200 = 3700 automóviles) es igual a la demanda total en los dos destinos (= 2300 + 1400 = 3700 automóviles).

TABLA 5.2 Costo de transporte por automóvil

	Denver (1)	Miami (2)
Los Ángeles (1)	\$80	\$215
Detroit (2)	\$100	\$108
Nueva Orleáns (3)	\$102	\$68

TABLA 5.3 Modelo de transporte de MG

	Denver	Miami	Oferta
Los Ángeles	80 x_{11}	215 x_{12}	**1000**
Detroit	100 x_{21}	108 x_{22}	**1500**
Nueva Orleáns	102 x_{31}	68 x_{32}	**1200**
Demanda	**2300**	**1400**	

La estructura especial del problema de transporte permite una representación compacta del problema utilizando el formato **tabla de transporte** que aparece en la tabla 5.3. Este formato permite modelar muchas situaciones que no tienen que ver con bienes de transporte, como se demuestra con los ejemplos de la sección 5.2.

La solución óptima en la figura 5.2 (obtenida por TORA[1]) envía 1000 automóviles de Los Ángeles a Denver ($x_{11} = 1000$), 1300 de Detroit a Denver ($x_{21} = 1300$), 200 de Detroit a Miami ($x_{22} = 200$) y 1200 de Nueva Orleáns a Miami ($x_{32} = 1000$). El costo de transporte mínimo asociado se calcula como $1000 \times \$80 + 1300 \times \$100 + 200 \times \$108 + 1200 \times \$68 = \$313.200$.

Balanceo del modelo de transporte. La representación de la tabla de transporte asume que el modelo está balanceado, es decir, que la demanda total es igual a la oferta total. Si el modelo está desbalanceado, podemos agregar un origen o un destino ficticios para restaurar el balance.

Ejemplo 5.1-2

En el modelo de MG, suponga que la capacidad de la planta de Detroit es de 1300 automóviles (en lugar de 1500). La oferta total (= 3500) es menor que la demanda total (= 3700), lo que significa que no se satisfará una parte de la demanda en Denver y Miami.

Como la demanda excede la oferta, se agrega un origen (planta) ficticio con una capacidad de 200 automóviles (= 3700 − 3500) para balancear el modelo de transporte. El costo de transporte por unidad de la planta ficticia a los destinos es cero porque la planta no existe.

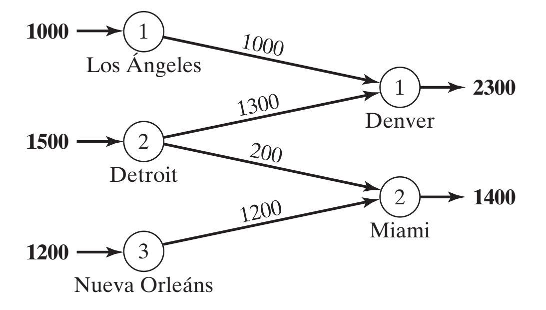


FIGURA 5.2
Solución óptima del modelo de MG Auto

[1]Para utilizar TORA, en el comando Main Menu seleccione la opción Transportation Model. En el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve ⇒ Final solution para obtener un resumen de la solución óptima. En la sección 5.3.3 se da una descripción detallada de la solución iterativa del modelo de transporte.

TABLA 5.4 Modelo de MG con una planta ficticia

	Denver	Miami	Oferta
Los Ángeles	80 **1000**	215	**1000**
Detroit	100 **1300**	108	**1300**
Nueva Orleáns	102	68 **1200**	**1200**
Planta ficticia	0	0 **200**	**200**
Demanda	**2300**	**1400**	

TABLA 5.5 Modelo de MG con un destino ficticio

	Denver	Miami	Ficticio	
Los Ángeles	80 **1000**	215	0	**1000**
Detroit	100 **900**	108 **200**	0 **400**	**1500**
Nueva Orleáns	102	68 **1200**	0	**1200**
Demanda	**1900**	**1400**	**400**	

La tabla 5.4 da el modelo balanceado junto con su solución óptima. La solución muestra que la planta ficticia envía 200 automóviles a Miami, es decir que a Miami le faltarán 200 automóviles para satisfacer su demanda de 1400 automóviles.

Podemos estar seguros de que un destino específico no experimente escasez al asignar un costo de transporte por unidad muy alto desde el origen ficticio a dicho destino. Por ejemplo, una penalización de $1000 en la celda ficticia de Miami evitará que haya escasez en Miami. Desde luego, no podemos utilizar este "artificio" con todos los destinos, porque debe haber escasez en alguna parte.

El caso en que la oferta excede la demanda se puede demostrar asumiendo que la demanda en Denver es de sólo 1900 automóviles. Entonces, tenemos que agregar un centro de distribución ficticio para que "reciba" la oferta excedente. De nuevo, el costo de transporte por unidad al centro de distribución ficticio es cero, a menos que una fábrica "envíe todas sus existencias". En este caso, se asigna un costo alto de transporte por unidad de la fábrica designada al destino ficticio.

La tabla 5.5 da el nuevo modelo y su solución óptima (obtenida por TORA). La solución muestra que la planta de Detroit tendrá un excedente de 400 automóviles.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.1A[2]

1. ¿Cierto o falso?
   (a) Para balancear un modelo de transporte, puede ser necesario agregar tanto un origen como un destino ficticios.
   (b) Las cantidades enviadas a un destino ficticio representan un excedente en el origen que hace el envío.
   (c) Las cantidades enviadas por un origen ficticio representan faltantes en los destinos que reciben el envío.
2. En cada uno de los siguientes casos, determine si debe agregarse un origen ficticio o un destino ficticio para balancear el modelo.
   (a) Oferta: $a_1 = 10,\ a_2 = 5,\ a_3 = 4,\ a_4 = 6$
   Demanda: $b_1 = 10,\ b_2 = 5,\ b_3 = 7,\ b_4 = 9$
   (b) Oferta: $a_1 = 30,\ a_2 = 44$
   Demanda: $b_1 = 25,\ b_2 = 30,\ b_3 = 10$
3. En la tabla 5.4 del ejemplo 5.1-2, donde se agrega una planta ficticia, ¿qué significa la solución cuando la planta ficticia "envía" 150 automóviles a Denver y 50 a Miami?

*4. En la tabla 5.5 del ejemplo 5.1-2, donde se agrega un destino ficticio, suponga que la planta de Detroit debe enviar *toda* su producción. ¿Cómo se puede implementar esta restricción en el modelo?

5. En el ejemplo 5.1-2, suponga que en el caso en que la demanda excede la oferta (tabla 5.4), se aplica una penalización a razón de $200 y $300 por cada automóvil no entregado en Denver y Miami, respectivamente. Además, no se hacen envíos de Los Ángeles al centro de distribución de Miami. Elabore el modelo, y determine el programa de envíos óptimo para el problema.

*6. Tres plantas de energía eléctrica de 25, 40 y 30 millones de kWh abastecen electricidad a tres ciudades. Las demandas máximas en las tres ciudades se estiman en 30, 35 y 25 millones de kWh. El precio por millón de kWh en las tres ciudades se da en la tabla 5.6.

   Durante el mes de agosto la demanda se incrementa 20% en cada una de las tres ciudades, la cual puede satisfacerse adquiriendo electricidad de otra red a un precio más elevado de $1000 por millón de kWh. La red no está enlazada a la ciudad 3. La compañía eléctrica desea determinar el plan más económico para la distribución y compra de energía adicional.
   (a) Formule el problema como un modelo de transporte.
   (b) Determine un plan de distribución óptimo para la compañía eléctrica.
   (c) Determine el costo de la energía adicional adquirida por cada una de las tres ciudades.

7. Resuelva el problema 6, suponiendo que se pierde 10% de la energía que se transmite a través de la red.
8. Tres refinerías con capacidades diarias de 6, 5 y 8 millones de galones, respectivamente, abastecen a su vez a tres áreas de distribución con demandas diarias de 4, 8 y 7 millones

TABLA 5.6 Precio/millón de kWh para el problema 6

		Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3
Planta	1	$600	$700	$400
	2	$320	$300	$350
	3	$500	$480	$450

[2]En este conjunto puede utilizar TORA para determinar la solución óptima. Los modelos del problema de transporte obtenidos con AMPL y Solver se presentarán al final de la sección 5.3.2.

TABLA 5.7 Distancia en millas para el problema 8

		Área de distribución 1	2	3
Refinería	1	120	180	—
	2	300	100	80
	3	200	250	120

de galones, respectivamente. La gasolina se transporta a las tres áreas de distribución a través de una red de oleoductos. El costo de transporte es de 10 centavos por 1000 galones por milla de oleoducto. La tabla 5.7 presenta la distancia en millas entre las refinerías y las áreas de distribución. La refinería 1 no está conectada al área de distribución 3.

(a) Construya el modelo de transporte asociado.
(b) Determine el programa de envíos óptimo en la red.

***9.** En el problema 8, suponga que la capacidad de la refinería 3 es de sólo 6 millones de galones y que el área de distribución debe recibir toda su demanda. Adicionalmente, las cantidades faltantes en las áreas 2 y 3 incurrirán en una penalización de 5 centavos por galón.

(a) Formule el problema como un modelo de transporte.
(b) Determine el programa de envíos óptimo.

10. En el problema 8, suponga que la demanda diaria en el área 3 disminuye a 4 millones de galones. La producción excedente en las refinerías 1 y 2 se envía a otras áreas de distribución por medio de camiones cisterna. El costo de transporte por 100 galones es de $1.50 desde la refinería 1 y de $2.20 desde la refinería 2. La refinería 3 puede enviar su producción excedente a otros procesos químicos dentro de la planta.

(a) Formule el problema como un modelo de transporte.
(b) Determine el programa de envíos óptimo.

11. Tres huertas abastecen a cuatro detallistas con cajas de naranjas. La demanda diaria de los cuatro detallistas es de 150, 150, 400 y 100 cajas, respectivamente. Las ofertas en las tres huertas dependen de la mano de obra regular disponible y se estiman en 150, 200 y 250 cajas diarias. Sin embargo, las huertas 1 y 2 indicaron que podrían abastecer más cajas, si es necesario, recurriendo a mano de obra extra. La huerta 3 no ofrece esta opción. Los costos de transporte por caja de las huertas a los detallistas se dan en la tabla 5.8.

(a) Formule el problema como un modelo de transporte.
(b) Resuelva el problema.
(c) ¿Cuántas cajas deben abastecer las huertas 1 y 2 si utilizan tiempo extra?

12. Tres centros de distribución envían automóviles a cinco concesionarios. El costo de envío depende de la distancia en millas entre los orígenes y los destinos, y es independiente de si el camión hace el viaje con cargas parciales o completas. La tabla 5.9 resume la distancia en millas entre los centros de distribución y los concesionarios junto con las cifras de

TABLA 5.8 Costo de transporte/caja para el problema 11

		Detallista 1	2	3	4
Huerta	1	$1	$2	$3	$2
	2	$2	$4	$1	$2
	3	$1	$3	$5	$3

TABLA 5.9 Distancia en millas, y oferta y demanda para el problema 12

		Concesionario 1	2	3	4	5	Oferta
Centro	1	100	150	200	140	35	**400**
	2	50	70	60	65	80	**200**
	3	40	90	100	150	130	**150**
Demanda		**100**	**200**	**150**	**160**	**140**	

oferta y demanda mensuales dadas en *número* de automóviles. Una carga completa comprende 18 automóviles. El costo de transporte por milla de camión es de $25.

(a) Formule el modelo de transporte asociado.

(b) Determine el programa de envíos óptimo.

13. MG Auto, del ejemplo 5.1-1, produce cuatro modelos de automóviles: $M1$, $M2$, $M3$ y $M4$. La planta de Detroit produce los modelos M_1, $M2$ y $M4$. Los modelos $M1$ y $M2$ también se producen en Nueva Orleáns. La planta de Los Ángeles fabrica los modelos $M3$ y $M4$. Las capacidades de las plantas y las demandas en los centros de distribución aparecen en la tabla 5.10.

La distancia en millas es la misma que la de la gráfica del ejemplo 5.1-1, y la tarifa de transporte se mantiene en 8 centavos por milla de camión para todos los modelos. Además, es posible satisfacer un porcentaje de la demanda de algunos modelos con la oferta de otros de acuerdo con las especificaciones de la tabla 5.11.

(a) Formule el modelo de transporte correspondiente.

(b) Determine el programa de envíos óptimo.

(*Sugerencia:* Agregue cuatro nuevos destinos correspondientes a las nuevas combinaciones [$M1$,$M2$], [$M3$,$M4$], [$M1$,$M2$] y [$M2$,$M4$]. Las demandas en los destinos nuevos se determinan a partir de los porcentajes dados).

TABLA 5.10 Capacidades y demandas para el problema 13

	Modelo.				
	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$	Totales
<u>Planta</u>					
Los Ángeles	—	—	700	300	1000
Detroit	500	600	—	400	1500
Nueva Orleáns	800	400	—	—	1200
<u>Centro de distribución</u>					
Denver	700	500	500	600	2300
Miami	600	500	200	100	1400

TABLA 5.11 Modelos intercambiables para el problema 13

Centro de distribución	Porcentaje de la demanda	Modelos intercambiables
Denver	10	$M1$, $M2$
	20	$M3$, $M4$
Miami	10	$M1$, $M2$
	5	$M2$, $M4$

5.2 MODELOS DE TRANSPORTE NO TRADICIONALES

La aplicación del modelo de transporte no se limita al *transporte* de artículos. Esta sección presenta dos aplicaciones no tradicionales en las áreas de control de producción e inventarios y el servicio de afilado de herramientas.

Ejemplo 5.2-1 (Control de producción e inventarios)

Boralis fabrica mochilas para ciclistas. La demanda de su producto durante el periodo pico de marzo a junio de cada año es de 100, 200, 180 y 300 unidades, respectivamente. La compañía utiliza mano de obra de tiempo parcial para acomodarse a las fluctuaciones de la demanda. Se estima que Boralis puede producir 50, 180, 280 y 270 unidades de marzo a junio. La demanda del mes en curso se puede satisfacer de tres maneras.

1. La producción del mes en curso al costo de $40 por mochila.
2. La producción excedente de un mes anterior a un costo de retención adicional de $.50 por mochila.
3. La producción excedente en un mes posterior (pedido en espera) a un costo de penalización adicional de $2.00 por mochila por mes.

Boralis desea determinar el programa de producción óptimo durante los cuatro meses.

La siguiente tabla resume los paralelismos entre los elementos del problema de producción e inventario y el modelo de transporte:

Transporte	Producción-inventario
1. Origen i	1. Periodo de producción i
2. Destino j	2. Periodo de demanda j
3. Cantidad de abasto en el origen i	3. Capacidad de producción en el periodo i
4. Demanda en el destino j	4. Demanda en el periodo j
5. Costo de transporte por unidad del origen i al destino j	5. Costo unitario (producción + retención + penalización) en el periodo i para el periodo j.

El modelo de transporte resultante se da en la tabla 5.12.

TABLA 5.12 Modelo de transporte para el ejemplo 5.2-1

	1	2	3	4	Capacidad
1	$40.00	$40.50	$41.00	$41.50	**50**
2	$42.00	$40.00	$40.50	$41.00	**180**
3	$44.00	$42.00	$40.00	$40.50	**280**
4	$46.00	$44.00	$42.00	$40.00	**270**
Demanda	**100**	**200**	**180**	**300**	

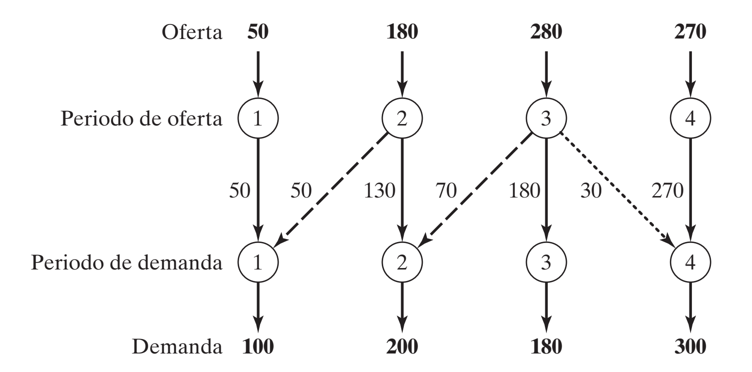


FIGURA 5.3

Solución óptima del modelo de producción e inventario

El costo de "transporte" por unidad del periodo i al periodo j se calcula como

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{Costo de producción en } i, i = j \\ \text{Costo de producción en } i + \text{costo de retención de } i \text{ a } j, i < j \\ \text{Costo de producción en } i + \text{penalización de } i \text{ a } j, i > j \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$c_{11} = \$40.00$$

$$c_{24} = \$40.00 + (\$.50 + \$.50) = \$41.00$$

$$c_{41} = \$40.00 + (\$2.00 + \$2.00 + \$2.00) = \$46.00$$

La solución óptima se resume en la figura 5.3. Las líneas de rayas indican pedidos en espera, las líneas punteadas indican producción para un periodo futuro, y las líneas continuas muestran la producción en un periodo en curso. El costo total es de $31,455.

Ejemplo 5.2-2 (Afilado de herramientas)

Arkansas Pacific opera un aserradero que produce tablas de diferentes tipos de madera. Según el tipo de madera que se esté aserrando, la demanda de hojas de sierra afiladas varía de un día a otro de acuerdo con los siguientes datos de una semana (7 días):

Día	Lun.	Mar.	Mié.	Jue.	Vie.	Sáb.	Dom.
Demanda (hojas de sierra)	24	12	14	20	18	14	22

El aserradero puede satisfacer la demanda diaria de cuatro maneras:

1. Hojas nuevas a $12 cada una.
2. Servicio de afilado nocturno a $6 por hoja.
3. Servicio de afilado en un día a $5 por hoja.
4. Servicio de afiliado en dos días a $3 por hoja.

La situación puede representarse como un modelo de transporte con ocho orígenes y siete destinos. Los destinos representan los 7 días de la semana. Los orígenes del modelo se definen

TABLA 5.13 Problema de afilado de herramientas, expresado como un modelo de transporte.

	1 Lun.	2 Mar.	3 Mié.	4 Jue.	5 Vie.	6 Sáb.	7 Dom.	8 Desecho	
1-Nuevas	$12 **24**	$12 **12**	$12	$12	$12	$12	$12	$0 **88**	**124**
2-Lun.	*M*	$6	$5 **14**	$3 **10**	$3	$3	$3	$0	**24**
3-Mar.	*M*	*M*	$6	$5	$3 **12**	$3	$3	$0	**12**
4-Mié.	*M*	*M*	*M*	$6 **10**	$5 **4**	$3	$3	$0	**14**
5-Jue.	*M*	*M*	*M*	*M*	$6 **2**	$5	$3 **18**	$0	**20**
6-Vie.	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	$6 **14**	$5 **4**	$0	**18**
7-Sáb.	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	$6 **0**	$0 **14**	**14**
8-Dom.	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	*M*	$0 **22**	**22**
	24	**12**	**14**	**20**	**18**	**14**	**22**	**124**	

como sigue: El origen 1 corresponde a la compra de hojas nuevas que, en el caso extremo, pueden satisfacer la demanda de los siete días (= 24 + 12 + 14 + 20 + 18 + 14 + 22 = 124). Los orígenes 2 a 8 corresponden a los 7 días de la semana. La cantidad de oferta de cada uno de estos orígenes es igual a la de hojas utilizadas al final del día asociado. Por ejemplo, el origen 2 (lunes) tendrá una oferta de hojas utilizadas igual a la demanda del lunes. El "costo de transporte" por unidad para el modelo es de $12, $6 o $3, según si la hoja es nueva o se afiló. La columna "desecho" es un destino ficticio para balancear el modelo. El modelo completo y su solución se dan en la tabla 5.13.

La siguiente tabla resume la solución óptima a un costo total de $818 (archivo *toraEx5.2-2.txt*).

	Cantidad de hojas afiladas (por día)				
Periodo	*Nuevas*	*Nocturno*	*1-día*	*2-días*	Desecho
Lun.	24 (Lun.)	0	14 (Mié.)	10 (Jue.)	0
Mar.	12 (Jue.)	0	0	12 (Vie.)	0
Mié.	0	10 (Jue.)	4 (Vie.)	0	0
Jue.	0	2 (Vie.)	0	18 (Dom.)	0
Vie.	0	14 (Sáb.)	4 (Dom.)	0	0
Sáb.	0	0		0	14
Dom.	0	0		0	22

Comentarios. El modelo que aparece en la tabla 5.13 supone sólo una semana de operaciones. Para varias semanas el modelo debe ocuparse de la naturaleza *rotatoria* de los días de la semana, en el sentido de que los días pueden actuar como orígenes para la demanda de la siguiente semana. Una forma de manejar esta situación es asumir que la primera semana de operación se inicia con todas las hojas de sierra nuevas para cada día. De ahí en adelante utilizamos un modelo compuesto de exactamente 7 orígenes y 7 destinos que correspondan a los días de la semana. El nuevo modelo será como el de la tabla 5.13, menos el origen "Nuevas" y el destino "Deshecho". Inclusive, sólo se bloquearán las celdas en las diagonales (costo unitario = M). Las celdas restantes tendrán un costo unitario de $3.00, $5.00 o $6.00.

Intuitivamente, y sin resolver el nuevo modelo de transporte en absoluto, es obvio que el servicio de afilado más barato (2 días) puede usarse para satisfacer toda la demanda a partir de la semana 2. Esta conclusión intuitiva puede confirmarse resolviendo el nuevo modelo (archivo *toraEx5.2-2a.txt*).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.2A[3]

1. En el ejemplo 5.2-1, suponga que el costo de retención por unidad depende del periodo y que es de 40, 30 y 70 centavos en los periodos 1, 2 y 3, respectivamente. La penalización y los costos de producción son los que se dieron en el ejemplo. Determine la solución óptima e interprete los resultados.

***2.** En el ejemplo 5.2-2, suponga que el servicio de afilado es de 3 días a $1 por hoja el lunes y el martes (días 1 y 2). Reformule el problema e interprete la solución óptima.

3. En el ejemplo 5.2-2, si no se utiliza una hoja el día que se afiló, se incurre en un costo de retención de 50 centavos por día. Reformule el modelo e interprete la solución óptima.

4. JoShop desea asignar cuatro categorías diferentes de máquinas a cinco tipos de tareas. La cantidad de máquinas disponibles en las cuatro categorías son 25, 30, 20 y 30. La cantidad de operaciones en las cinco tareas son 20, 20, 30, 10 y 25. A la categoría de la máquina 4 no se le puede asignar la tarea de tipo 4. La tabla 5.14 proporciona el costo unitario (en dólares) de asignar una categoría de máquina a un tipo de tarea. El objetivo del problema es determinar la cantidad óptima de máquinas en cada categoría que se ha de asignar a cada tipo de tarea. Resuelva el problema e interprete la solución.

***5.** La demanda de un artículo perecedero durante los próximos cuatro meses es de 400, 300, 420 y 380 toneladas, en ese orden. La capacidad de abasto para los mismos meses es de 500, 600, 200 y 300 toneladas. El precio de compra por tonelada varía cada mes y se

TABLA 5.14 Costos unitarios para el problema 4

		Tipo de tarea				
		1	2	3	4	5
Categoría de máquina	1	10	2	3	15	9
	2	5	10	15	2	4
	3	15	5	14	7	15
	4	20	15	13	—	8

[3]En este conjunto puede utilizar TORA para determinar la solución óptima. Los modelos resueltos con AMPL y Solver para el problema de transporte se presentarán al final de la sección 5.3.2.

estima en \$100, \$140, \$120 y \$150, respectivamente. Como el artículo es perecedero, el abasto del mes en curso debe consumirse dentro de los 3 meses siguientes (a partir del mes en curso). El costo de almacenamiento por tonelada es de \$3 por mes. La naturaleza del artículo no permite aceptar pedidos en espera. Resuelva el problema como un modelo de transporte y determine el programa de entregas óptimo para el artículo durante los próximos 4 meses.

6. La demanda de un pequeño motor especial durante los próximos cinco trimestres es de 200, 150, 300, 250 y 400 unidades, respectivamente. El fabricante que surte el motor tiene capacidades de producción diferentes estimadas en 180, 230, 430, 300 y 300 para los cinco trimestres. No se aceptan pedidos en espera, pero si es necesario, el fabricante puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda inmediata. La capacidad de tiempo extra en cada periodo es la mitad de la capacidad regular. Los costos de producción por unidad en los cincos periodos son de \$100, \$96, \$116, \$102 y \$106, respectivamente. El costo de producción con tiempo extra por motor es 50% más alto que el costo de producción regular. Si ahora se produce un motor para su uso en periodos posteriores se incurre en un costo de almacenamiento adicional de \$4 por motor por periodo. Formule el problema como un modelo de transporte. Determine la cantidad óptima de motores que se deben producir durante el tiempo regular y el tiempo extra de cada periodo.

7. Se realiza mantenimiento preventivo periódico en motores de avión, donde se debe reemplazar un componente importante. La cantidad de aviones programados para tal mantenimiento durante los siguientes seis meses se estima en 200, 180, 300, 198, 230 y 290, respectivamente. Todo el trabajo de mantenimiento se realiza durante el primer día del mes, donde un componente usado se puede reemplazar por uno nuevo o uno reparado. La reparación de los componentes usados puede hacerse en un taller de reparación local, donde estarán listos para usarse al principio del siguiente mes, o bien se envían a un taller central de reparación, donde se espera una demora de 3 meses (incluido el mes en que ocurre el mantenimiento). El costo de reparación en el taller local es de \$120 por componente, y en el taller central es de sólo \$35 por componente. Un componente reparado utilizado en un mes posterior incurrirá en un costo de almacenamiento adicional de \$1.50 por unidad por mes. Pueden adquirirse componentes nuevos a \$200 cada uno en el mes 1, con un incremento de 5% en el precio cada 2 meses. Formule el problema como un modelo de transporte, y determine el programa óptimo para satisfacer la demanda del componente durante los siguientes seis meses.

8. El Servicio de Parques Nacionales recibe cuatro ofertas para talar tres bosques de pinos en Arkansas. Los tres bosques incluyen 10,000, 20,000 y 30,000 acres. Un solo licitador puede ofrecer ofertas para a lo sumo 50% del total de acres disponible. Las ofertas por acre en los tres bosques se dan en la tabla 5.15. El licitador 2 no desea hacer ofertas en el bosque 1, y el licitador 3 no puede ofertar en el bosque 2.

(a) En la presente situación, tenemos que *maximizar* el ingreso por las ofertas totales para el Servicio de Parques. Muestre cómo puede formularse el problema como un modelo de transporte.

(b) Determine la superficie en acres que se asignará a cada uno de los cuatro licitadores.

TABLA 5.15 Ofertas por acre para el problema 8

		Bosque		
		1	2	3
Licitador	1	\$520	\$210	\$570
	2	—	\$510	\$495
	3	\$650	—	\$240
	4	\$180	\$430	\$710

5.3 ALGORITMO DE TRANSPORTE[4]

Los pasos básicos del algoritmo de transporte son exactamente iguales a los del método simplex (capítulo 3). Sin embargo, en lugar de utilizar la tabla simplex regular, aprovechamos la estructura especial del modelo de transporte para organizar los cálculos en una forma más conveniente.

Paso 1. Determine una solución factible básica *inicial* y vaya al paso 2.

Paso 2. Use la condición de optimalidad del método simplex para determinar la *variable de entrada* de entre todas las variables no básicas. Si se satisfacen las condiciones de optimalidad, deténgase. De lo contrario, avance al paso 3.

Paso 3. Use la condición de factibilidad del método simplex para determinar la *variable de entrada* de entre todas las variables básicas actuales, y halle la nueva solución básica. Regrese al paso 2.

Los detalles del algoritmo se explican en las secciones 5.3.1 y 5.3.2 por medio del siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.3-1 (SunRay Transport)

SunRay Transport Company transporta granos de tres silos a cuatro molinos. La oferta (en camiones cargados) y la demanda (también en camiones cargados) junto con los costos de transporte por unidad por camión cargado en las diferentes rutas, se resumen en la Tabla 5.16. Los costos de transporte por unidad, c_{ij} (que se muestran en la esquina de cada casilla) están en cientos de dólares. El modelo busca el programa de envíos a un costo mínimo entre los silos y los molinos.

TABLA 5.16 Modelo de transporte de SunRay

	Molino 1	Molino 2	Molino 3	Molino 4	Oferta
Silo 1	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	**15**
12 Silo 2	7 x_{21}	9 x_{22}	20 x_{23}	x_{24}	**25**
Silo 3	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

[4]El algoritmo de transporte especial se desarrolló cuando los cálculos manuales eran la norma y los atajos estaban garantizados. En la actualidad, los poderosos códigos de computadora pueden resolver modelos de transporte de cualquier tamaño como una PL regular. De hecho, TORA maneja todos los cálculos necesarios en segundo plano por medio del método simplex y utiliza el formato del modelo de transporte sólo como "filtro". No obstante, el algoritmo de transporte, aparte de su importancia histórica, da una idea de primera mano del uso de las relaciones primales-duales teóricas (que se presentaron en la sección 4.2) para alcanzar un resultado final práctico, el de mejorar los cálculos manuales. El ejercicio es teóricamente intrigante. Además, el formato de tabla de transporte especial facilita el modelado de varias situaciones que no tienen que ver directamente con artículos que se transportan, como lo demuestra la sección 5.2.

5.3.1 Determinación de la solución de inicio

Un modelo de transporte general con m orígenes y n destinos tiene $m + n$ ecuaciones de restricción, una por cada origen y cada destino. Sin embargo, como el modelo de transporte siempre está balanceado (suma de la oferta = suma de la demanda) una de las ecuaciones es redundante, por lo que el modelo se reduce a $m + n - 1$ ecuaciones independientes y $m + n - 1$ variables básicas. En el ejemplo 5.3-1, la solución inicial tiene $3 + 4 - 1 = 6$ variables básicas.

La estructura especial del problema de transporte permite asegurar una solución básica inicial no artificial siguiendo uno de los tres métodos:[5]

1. Método de la esquina noroeste
2. Método del costo mínimo
3. Método de aproximación de Vogel

El primer método es de naturaleza "mecánica", y los dos restantes son heurísticos que buscan una solución inicial de mejor calidad que dé un valor objetivo más pequeño. Por lo general, el método heurístico Vogel es mejor que el heurístico de costo mínimo. Por otra parte, el método de esquina noroeste implica la cantidad mínima de cálculos.

Método de la esquina noroeste. El método se inicia en la celda de la *esquina noroeste* (ruta) de la tabla (variable x_{11}).

Paso 1. Asigne lo más posible a la celda seleccionada, y ajuste las cantidades asociadas de oferta y demanda restando la cantidad asignada.

Paso 2. Tache la columna o fila con oferta o demanda cero para indicar que no se hagan más asignaciones en esa fila o columna. Si una fila y una columna dan cero al mismo tiempo, *tache sólo una*, y deje una oferta (demanda) cero en la fila (columna) no tachada.

Paso 3. Si se deja sin tachar *exactamente una* fila o columna, deténgase. De lo contrario, muévase a la celda a la derecha si acaba de tachar una columna, o abajo si acaba de tachar una fila. Vaya al paso 1.

Ejemplo 5.3-2

La aplicación del procedimiento al modelo del ejemplo 5.3-1 da la solución básica inicial en la tabla 5.17. Las flechas muestran el orden en que se generan las cantidades asignadas.

La solución básica inicial es

$$x_{11} = 5,\ x_{12} = 10$$

$$x_{22} = 5, x_{23} = 15, x_{24} = 5$$

$$x_{34} = 10$$

El costo asociado del programa es

$$z = 5 \times 10 + 10 \times 2 + 5 \times 7 + 15 \times 9 + 5 \times 20 + 10 \times 18 = \$520.$$

---

[5]Los tres métodos se realizan en TORA. Vea el final de la sección 5.3.3.

TABLA 5.17 Solución inicial obtenida con el método de la esquina noroeste

	1	2	3	4	Oferta
1	(10) **5**	(2) **10**	(20)	(11)	**15**
2	(12)	(7) **5**	(9) **15**	(20) **5**	**25**
3	(4)	(14)	(16)	(18) **10**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

Método del costo mínimo. El método del costo mínimo determina una mejor solución inicial al concentrarse en las rutas más económicas. Asigna lo más posible a la celda con el costo unitario mínimo (los empates se rompen arbitrariamente). Luego se tacha la fila o columna satisfecha y se ajustan las cantidades de oferta y demanda como corresponda. Si una fila o una columna se satisfacen al mismo tiempo, *sólo se tacha una*, igual que en el método de la esquina noroeste. A continuación, seleccione la celda no tachada con el costo unitario mínimo y repita el proceso hasta que se deje sin tachar exactamente una fila o columna.

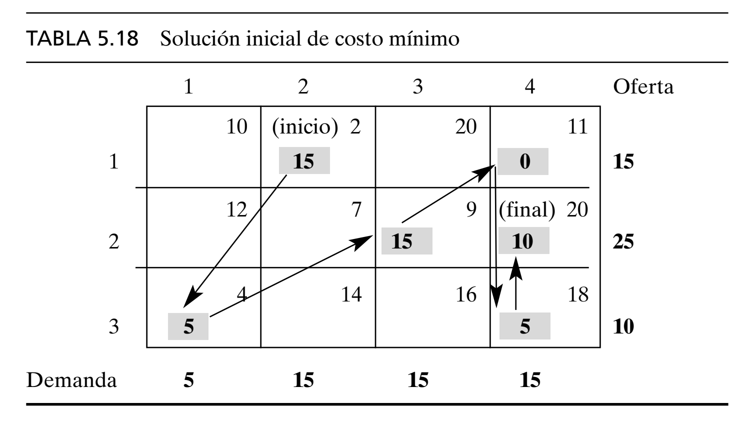
Ejemplo 5.3-3

El método del costo mínimo se aplica al ejemplo 5.3-1.

1. La celda (1,2) tiene el costo unitario mínimo en la tabla (= \$2). Lo máximo que puede enviarse a través de (1,2) es x_{12} = 15 camiones cargados, con lo que se satisfacen tanto la fila 1 como la columna 2. Tachamos arbitrariamente la columna 2 y ajustamos a cero la oferta en la figura 1.
2. La celda (3,1) tiene el costo unitario mínimo no tachado (= \$4). Asigne x_{31} = 5, y tache la columna 1 porque se satisface, y ajuste la demanda de la fila 3 a 10 − 5 = 5 camiones cargados.
3. Continuando de la misma manera, asignamos sucesivamente 15 camiones cargados a la celda (2,3), 0 a la celda (1,4), 5 a la celda (3,4), y 10 a la celda (2,4) (¡compruébelo!).

La solución inicial resultante se resume en la tabla 5.18. Las flechas indican el orden en el cual se hacen las asignaciones. La solución inicial (compuesta de 6 variables básicas) es

TABLA 5.18 Solución inicial de costo mínimo



	1	2	3	4	Oferta
1	(10)	(inicio) (2) **15**	(20)	(11) **0**	**15**
2	(12)	(7)	(9) **15**	(final) (20) **10**	**25**
3	(4) **5**	(14)	(16)	(18) **5**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

$x_{12} = 15, x_{14} = 0, x_{23} = 15, x_{24} = 10, x_{31} = 5, x_{34} = 5$. El valor objetivo asociado es $z = 15 \times 2 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 4 + 5 \times 18 = \$475$, el cual es mejor que la solución obtenida con el método de la esquina noroeste.

Método de aproximación de Vogel (MAV). Este método es una versión mejorada del método del costo mínimo que por lo general, pero no siempre, produce mejores soluciones iniciales.

Paso 1. Para cada fila (columna) determine una *medida de penalización* restando el elemento de costo unitario *mínimo* en la fila (columna) del *siguiente elemento de costo mínimo* en la misma fila (columna).

Paso 2. Identifique la fila o columna con la penalización máxima, que rompa los empates arbitrariamente. Asigne lo más posible a la variable con el costo unitario mínimo en la fila o columna seleccionada. Ajuste la oferta y la demanda, y tache la fila *o* columna satisfecha. Si una fila y una columna se satisfacen al mismo tiempo, sólo se tacha una de las dos, y a la fila restante (columna) se le asigna una oferta (demanda) cero.

Paso 3. **(a)** Si exactamente una fila o columna con oferta o demanda cero permanece sin tachar, deténgase.

(b) Si una fila (columna) con oferta (demanda) *positiva* permanece sin tachar, determine las variables básicas en la fila (columna) mediante el método del costo mínimo. Deténgase.

(c) Si todas las filas y columnas no tachadas tienen oferta y demanda cero (restantes), determine las variables básicas *cero* por el método del costo mínimo. Deténgase.

(d) De lo contrario, vaya al paso 1.

Ejemplo 5.3-4

El método de aproximación de Vogel se aplica al ejemplo 5.3-1. La tabla 5.19 calcula el primer conjunto de penalizaciones.

Como la fila 3 tiene la penalización máxima (= 10) y la celda (3,1) tiene el costo unitario mínimo en esa fila, se asigna la cantidad 5 a x_{31}. Ahora la columna está satisfecha y se debe tachar. Luego se vuelven a calcular nuevas penalizaciones como en la tabla 5.20.

TABLA 5.19 Penalizaciones en filas y columnas con el MAV

	1	2	3	4		Penalización en las filas
1	10	2	20	11	**15**	10 − 2 = 8
2	12	7	9	20	**25**	9 − 7 = 2
3	4 **5**	14	16	18	**10**	14 − 4 = 10
	5	**15**	**15**	**15**		
Penalización en las columnas	10 − 4 = 6	7 − 2 = 5	16 − 9 = 7	18 − 11 = 7		

TABLA 5.20 Primera asignación en el MAV ($x_{31} = 5$)

	1	2	3	4		Penalización en las filas
1	10	2	20	11	**15**	9
2	12	7	9	20	**25**	2
3	4 **5**	14	16	18	**10**	2
Penalización	**5**	**15**	**15**	**15**		
en las columnas	—	5	7	7		

La tabla 5.20 muestra que la fila 1 tiene la penalización máxima (= 9). Por consiguiente, asignamos la cantidad máxima posible a la celda (1,2), la cual da $x_{12} = 15$ y al mismo tiempo satisface tanto a la fila 1 como a la columna 2. Tachamos arbitrariamente la columna 2 y ajustamos a cero la oferta en la fila 1.

Continuando de la misma manera, la fila 2 producirá la penalización máxima (= 11), y asignamos $x_{13} = 15$, la cual tacha la columna 3 y deja 10 unidades en la fila 2. Sólo queda la columna 4, y tiene una oferta positiva de 15 unidades. Aplicando el método del costo mínimo a esa columna, asignamos sucesivamente $x_{14} = 0$, $x_{34} = 5$ y $x_{14} = 10$ (¡compruébelo!). El valor objetivo asociado con esta solución es

$$z = 15 \times 2 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 4 + 5 \times 18 = \$475$$

Sucede que esta solución tiene el mismo valor objetivo que se obtuvo con el método del costo mínimo.

***(a)**

0	2	1	**6**
2	1	5	**7**
2	4	3	**7**
5	**5**	**10**	

(b)

1	2	6	**7**
0	4	2	**12**
3	1	5	**11**
10	**10**	**10**	

(c)

5	1	8	**12**
2	4	0	**14**
3	6	7	**4**
9	**10**	**11**	

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.3A

1. Compare las soluciones iniciales obtenidas con los métodos de esquina noroeste, de costo mínimo y de Vogel para cada uno de los siguientes modelos.

5.3.2 Cálculos iterativos del algoritmo de transporte

Después de determinar la solución inicial (siguiendo alguno de los métodos de la sección 5.3.1), utilizamos el siguiente algoritmo para determinar la solución óptima:

Paso 1. Utilice la condición de *optimalidad* inicial para determinar la *variable de entrada*. Si la condición de optimalidad se satisface, deténgase. De lo contrario, continúe con el paso 2.

Paso 2. Determine la *variable de salida* utilizando la *condición de factibilidad* simplex. Cambie la base, y regrese al paso 1.

Las condiciones de optimalidad y factibilidad no implican las conocidas operaciones de filas utilizadas en el método simplex. En su lugar, la estructura especial del modelo de transporte permite cálculos (manuales) más simples.

TABLA 5.21 Iteración inicial

	1	2	3	4	Oferta
1	10 **5**	2 **10**	20	11	**15**
2	12	7 **5**	9 **15**	20 **5**	**25**
3	4	14	16	18 **10**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

Ejemplo 5.3-5

Resuelva el modelo de transporte del ejemplo 5.3-1, comenzando con la solución de la esquina noroeste.

La tabla 5.21 presenta la solución inicial de la esquina noroeste tal como aparece en la tabla 5.17, ejemplo 5.3-2. La determinación de la variable de entrada de entre las variables no básicas actuales (las que no forman parte de la solución básica inicial) se realiza calculando los coeficientes no básicos en la fila z, por medio del **método de multiplicadores** (el cual, como se muestra en la sección 5.3.3, tiene su raíz en la teoría de dualidad de la PL).

En el método de multiplicadores, asociamos los multiplicadores u_i y v_j con la fila i y la columna j de la tabla de transporte. Para cada variable *básica* actual x_{ij}, los multiplicadores se muestran en la sección 5.3.3 para satisfacer las siguientes ecuaciones:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ para cada } x_{ij} \text{ básica}$$

Como se muestra en la tabla 5.21, la solución inicial tiene 6 variables básicas, lo cual conduce a 6 ecuaciones con 7 incógnitas. Para resolver estas ecuaciones, el método de multiplicadores requiere que cualquiera de ellos se iguale a cero. Arbitrariamente estableceremos $u_1 = 0$, y luego resolveremos las variables restantes como se muestra en la siguiente tabla:

Variable básica	Ecuación (u,v)	Solución
x_{11}	$u_1 + v_1 = 10$	Conjunto $u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 10$
x_{12}	$u_1 + v_2 = 2$	$u_1 = 0 \Rightarrow v_2 = 2$
x_{22}	$u_2 + v_2 = 7$	$v_2 = 2 \Rightarrow u_2 = 5$
x_{23}	$u_2 + v_3 = 9$	$u_2 = 5 \Rightarrow v_3 = 4$
x_{24}	$u_2 + v_4 = 20$	$u_2 = 5 \Rightarrow v_4 = 15$
x_{34}	$u_3 + v_4 = 18$	$v_4 = 15 \Rightarrow u_3 = 3$

Resumiendo, tenemos

$$u_1 = 0,\ u_2 = 5,\ u_3 = 3$$

$$v_1 = 10,\ v_2 = 2,\ v_3 = 4,\ v_4 = 15$$

A continuación, utilizamos u_i y v_j para evaluar las variables no básicas calculando

$$u_i + v_j - c_{ij} \text{ para cada } x_{ij} \textit{ no básica}$$

Los resultados de estas evaluaciones se muestran en la tabla siguiente:

Variable no básica	$u_i + v_j - c_{ij}$
x_{13}	$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 4 - 20 = -16$
x_{14}	$u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 15 - 11 = 4$
x_{21}	$u_2 + v_1 - c_{21} = 5 + 10 - 12 = 3$
x_{31}	$u_3 + v_1 - c_{31} = 3 + 10 - 4 = \mathbf{9}$
x_{32}	$u_3 + v_2 - c_{32} = 3 + 2 - 14 = -9$
x_{33}	$u_3 + v_3 - c_{33} = 3 + 4 - 16 = -9$

La información precedente, junto con el hecho de que $u_i + v_j - c_{ij} = 0$ para x_{ij} no básica, equivale en realidad a calcular la fila z de la tabla simplex, como lo muestra el siguiente resumen:

Básica	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	↓ x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
z	0	0	–16	4	3	0	0	0	9	–9	–9	0

Como el modelo de transporte *minimiza* el costo, la variable de entrada es la que tiene el coeficiente *más positivo* en la fila z, es decir x_{31} es la variable de entrada.

Los cálculos anteriores se suelen hacer directamente en la tabla de transporte como se muestra en la tabla 5.22, lo que implica que no es necesario escribir las ecuaciones (u, v) en forma explícita. En su lugar, comenzamos con $u_1 = 0$.[6] Entonces podemos calcular los valores v de todas las columnas que tienen variables *básicas* en la fila 1, es decir, v_1 y v_2. Luego calculamos u_2 basados en la ecuación (u,v) de la x_{22} básica. Ahora, dada u_2, calculamos v_3 y v_4. Por último, determinamos u_3 aplicando la ecuación básica de x_{33}. El paso siguiente es para evaluar las variables no básicas al calcular $u_i + v_j - c_{ij}$ para cada x_{ij} no básica, como se muestra en la tabla 5.22, en la casilla situada en la esquina sudeste de cada celda.

Con x_{31} identificada como la variable de entrada, tenemos que determinar la variable de salida. Recuerde que si x_{31} entra en la solución para volverse básica, una de las variables básicas actuales debe salir como no básica (en el nivel cero).

TABLA 5.22 Cálculos en la iteración 1

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 = 0$	10 **5**	2 **10**	20 –16	11 4	**15**
$u_2 = 5$	12 3	7 **5**	9 **15**	20 **5**	**25**
$u_3 = 3$	4 9	14 –9	16 –9	18 **10**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

[6]El módulo tutorial de TORA está diseñado para demostrar que si se asigna un valor inicial cero a cualquier u o v se produce la misma $u + v - c$ para todas las variables no básicas. Vea el *Momento de TORA* después de este ejemplo.

La selección de x_{31} como la variable de entrada significa que transportar por esta ruta reduce el costo de transporte total. ¿Cuánto es lo máximo que podemos transportar a través de la nueva ruta? Observe en la tabla 5.22 que si la ruta (3,1) transporta θ unidades (es decir, $x_{31} = \theta$), entonces el valor máximo de θ se determina con base en dos condiciones:

1. Los límites de la oferta y los requerimientos de la demanda permanecen satisfechos.
2. Los transportes a través de todas las rutas permanecen no negativos.

Estas dos condiciones determinan el valor máximo de θ y la variable de salida como sigue: Primero construimos un *lazo cerrado (también conocido como circuito de* θ), que se inicia y termina en la celda de la variable de entrada (3,1). El lazo se compone sólo de segmentos horizontales y verticales conectados (no se permiten diagonales) cuyos elementos de esquina (excluyendo la celda de la variable de entrada) cuyos elementos de esquina deben coincidir con una variable básica actual.[7] La tabla 5.23 muestra el lazo para x_{31}. Existe exactamente un lazo para una variable de entrada dada.

Luego asignamos la cantidad θ a la celda de la variable de entrada (3,1). Para que los límites de la oferta y la demanda permanezcan satisfechos, debemos alternar entre restar y sumar la cantidad θ en las *esquinas* sucesivas del lazo que se muestra en la tabla 5.23 (es indiferente si el lazo se traza en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario). Para $\theta \geq 0$, los nuevos valores de todas las variables permanecen no negativos si

$$x_{11} = 5 - \theta \geq 0$$
$$x_{22} = 5 - \theta \geq 0$$
$$x_{34} = 10 - \theta \geq 0$$

El valor máximo correspondiente de θ es 5, el cual ocurre cuando tanto x_{11} como x_{22} alcanzan un nivel cero. Ya sea que x_{11} o que x_{22} salgan de la solución, y seleccionamos arbitrariamente x_{11} como la variable de salida.

Los valores de las variables básicas en las esquinas del lazo cerrado se ajustan para aceptar $x_{31} = 5$, como se muestra en la tabla 5.24. Como cada unidad transportada por la ruta (3,1) reduce el costo de transporte en \$9 ($= u_3 + v_1 - c_{31}$), el costo total asociado con el nuevo itinerario es $\$9 \times 5 = \$45$ menos que el itinerario anterior. Así, el nuevo costo es $\$520 - \$45 = \$475$.

Dada la nueva solución básica, repetimos el cálculo de los multiplicadores u y v, como se muestra en la tabla 5.24. La variable de entrada es x_{14}. El lazo cerrado muestra que $x_{14} = 10$ y que x_{24} es la variable de salida.

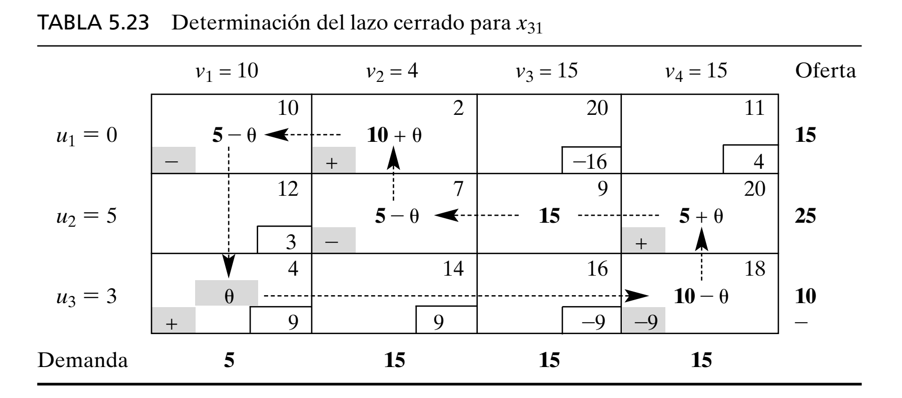
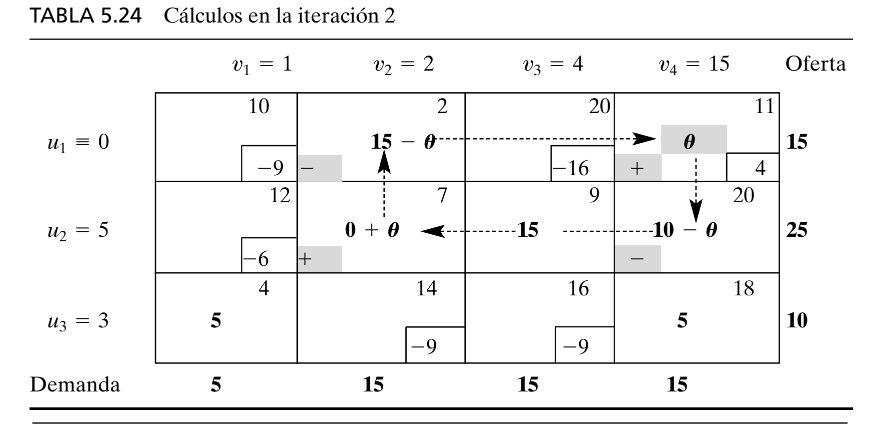


TABLA 5.23 Determinación del lazo cerrado para x_{31}

	$v_1 = 10$	$v_2 = 4$	$v_3 = 15$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 = 0$	10; **5 − θ**; −	2; **10 + θ**; +	20; −16	11; 4	**15**
$u_2 = 5$	12; 3	7; **5 − θ**; −	9; **15**	20; **5 + θ**; +	**25**
$u_3 = 3$	4; θ; +; 9	14; 9	16; −9	18; **10 − θ**; −9	**10**
					−
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

[7]El módulo tutorial de TORA permite determinar, de forma interactiva, las celdas de esquina del *lazo cerrado*, con confirmación inmediata de la validez de sus selecciones. Vea el Momento de TORA en la pág. 196.

TABLA 5.24 Cálculos en la iteración 2



	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	Oferta
$u_1 \equiv 0$	10; −9	2; **15 − θ**; −	20; −16	11; **θ**; +; 4	**15**
$u_2 = 5$	12; −6	7; **0 + θ**; +	9; **15**	20; **10 − θ**; −	**25**
$u_3 = 3$	4; **5**	14; −9	16; −9	18; **5**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

TABLA 5.25 Cálculos en la iteración 3 (óptima)

	$v_1 = -3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 11$	Oferta
$u_1 \equiv 0$	10; −13	2; **5**	20; −16	11; **10**	**15**
$u_2 = 5$	12; −10	7; **10**	9; **15**	20; −4	**25**
$u_3 = 7$	4; **5**	14; −5	16; −5	18; **5**	**10**
Demanda	**5**	**15**	**15**	**15**	

La nueva solución, que se muestra en la tabla 5.25, cuesta $\$4 \times 10 = \$40$ menos que la anterior, y así el nuevo costo es $\$475 - \$40 = \$435$. Los nuevos valores de $u_i + v_j - c_{ij}$ ahora son negativos para todas las x_{ij} no básicas. Por lo tanto, la solución dada en la tabla 5.25 es óptima.

La siguiente tabla resume la solución óptima.

Del silo	Al molino	Cantidad de camiones cargados
1	2	5
1	4	10
2	2	10
2	3	15
3	1	5
3	4	5
	Costo óptimo = \$435	

Modelo de transbordo. El modelo de transporte considera transportes *directos* entre los orígenes y los destinos. Quizá éste no sea el caso en muchas situaciones donde puede ser más barato *transbordar* a través de nodos intermedios antes de llegar al destino final. Puede usarse un artificio de modelado basado en el uso de *zonas*

intermedias para convertir el modelo de transbordo en uno de transporte regular. La idea de la conversión es teóricamente interesante, pero rara vez se pone en práctica porque el modelo de transbordo (y, de hecho, el modelo de transporte mismo) es un caso especial de un modelo de red capacitado de costo mínimo altamente eficiente que se presenta en la sección 22.1 en el sitio web. No obstante, para que quede completo, el modelo de transbordo se presenta como apéndice al final de la sección 22.1.

Momento de TORA.

En el comando Solve/Modify Menu, seleccione las opciones Solve ⇒ Iterations, y luego uno de los tres métodos (esquina noroeste, costo mínimo, Vogel) para iniciar las iteraciones del modelo de transporte. El módulo de iteraciones ofrece dos útiles funciones interactivas:

1. Puede establecer cualquier u o v igual a cero antes de generar la iteración 2 (el valor predeterminado es $u_1 = 0$. Aunque los valores de u_i y v_j cambian, la evaluación de las celdas no básicas ($= u_i + v_j - c_{ij}$) no cambia.
2. Puede someter a prueba su comprensión de por qué selecciona el *lazo cerrado,* haciendo clic (en cualquier orden) en las celdas de *esquina* que comprenden la ruta. Si su selección es correcta, la celda cambiará de color (verde para la variable de entrada, roja para la variable de salida, y gris si no corresponde).

Momento de Solver.

La figura 5.4 muestra la plantilla de Excel Solver para el ejemplo 5.3-1 (archivo *solverEx5.3-1.xls*), junto con todas las fórmulas y la definición de los nombres de intervalos.

En la sección de entrada, los datos incluyen la matriz de costo unitario (celdas B4:E6), los nombres de los orígenes (celdas A4:A6), nombres de los destinos (celdas B3:E3), oferta (celdas F4:F6), y demanda (celdas B7:E7). En la sección de salida, las celdas B11:E13 proporcionan la solución óptima en forma de matriz. La fórmula del costo total se encuentra en la celda A10.

Momento de AMPL.

Los archivos *amplEx5.3-1a.txt* y *amplEx5.3-1b.txt* proporcionan el modelo de AMPL para el ejemplo 5.3-1. Los detalles del modelo se explican en la sección C.9 en el sitio web.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.3B

1. Considere los modelos de transporte que aparecen en la tabla 5.26.
   (a) Siga el método de la esquina noroeste para determinar la solución inicial.
   (b) Desarrolle las iteraciones que conducen a la solución óptima.
   (c) *Experimento con TORA.* Utilice el módulo de iteraciones de TORA para comparar el efecto de utilizar la regla de la esquina noroeste, el método del costo mínimo y el método de Vogel en la cantidad de iteraciones que conducen a la solución óptima.
   (d) *Experimento con Solver.* Resuelva el problema modificando el archivo *solverEx5.3-1.xls*.
   (e) *Experimento con AMPL.* Resuelva el problema modificando el archivo *amplEx5.3-1b.txt.*

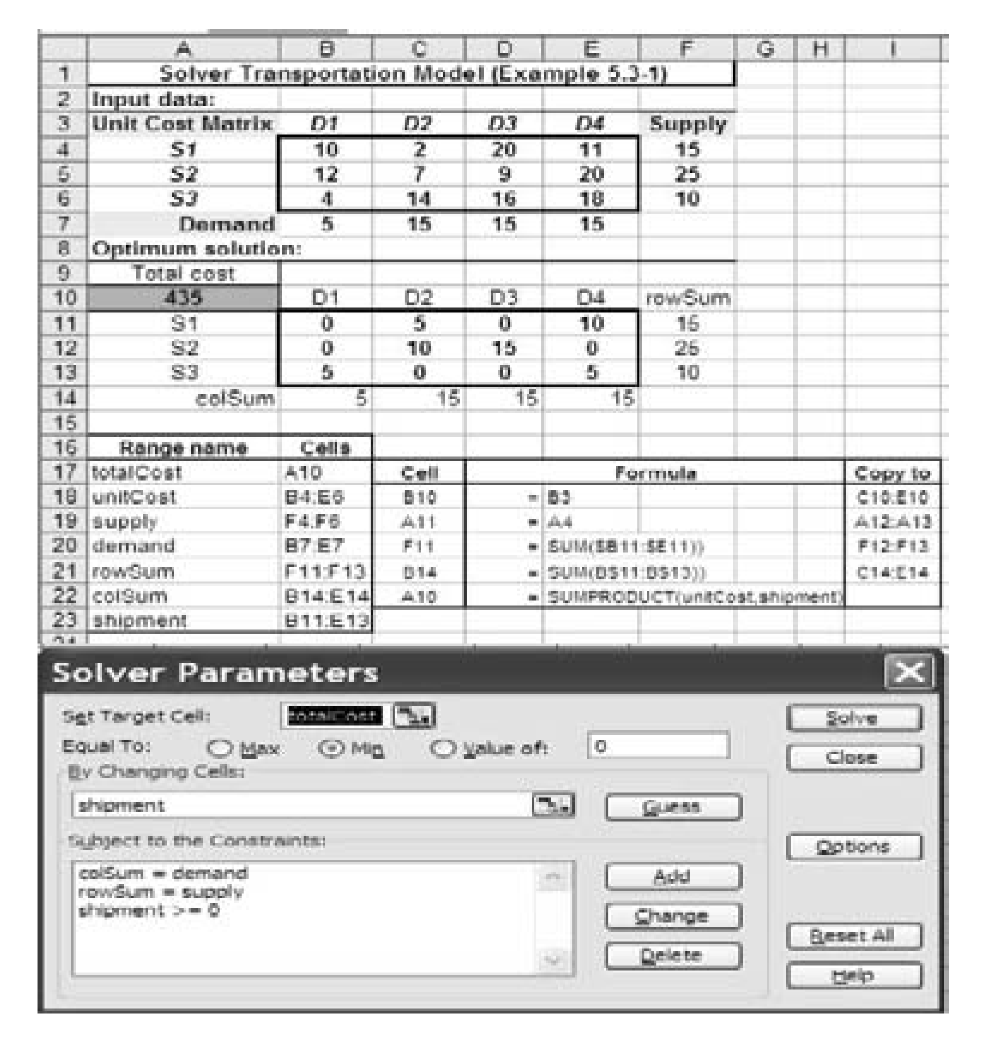


FIGURA 5.4
Solución obtenida con Excel Solver del modelo de transporte del ejemplo 5.3-1 (Archivo *solverEx5.3-1.xls*)

TABLA 5.26 Modelos de transporte para el problema 1

(i)					(ii)					(iii)			
$0	$2	$1	**6**		$10	$4	$2	**8**		—	$3	$5	**4**
$2	$1	$5	**9**		$2	$3	$4	**5**		$7	$4	$9	**7**
$2	$4	$3	**5**		$1	$2	$0	**6**		$1	$8	$6	**19**
5	**5**	**10**			**7**	**6**	**6**			**5**	**6**	**19**	

TABLA 5.27 Datos para el problema 2

$5	$1	$7	**10**
$6	$4	$6	**80**
$3	$2	$5	**15**
75	**20**	**50**	

2. En el problema de transporte que se muestra en la tabla 5.27, la demanda total excede la oferta total. Suponga que los costos de penalización por unidad de la demanda no satisfecha son $5, $3 y $2 para los destinos 1, 2 y 3, respectivamente. Aplique la solución inicial de costo mínimo, y calcule las iteraciones que conducen a la solución óptima.

3. En el problema 2, suponga que no hay costos de penalización, pero que la demanda en el destino 3 debe ser satisfecha por completo.

(a) Encuentre la solución óptima.

(b) *Experimento con Solver*. Resuelva el problema modificando el archivo *solverEx5.3-1.xls*.

(c) *Experimento con AMPL*. Resuelva el problema modificando el archivo *amplEx5.3-1.xls*.

4. En el problema de transporte desbalanceado de la tabla 5.28, si no se transporta una unidad de un origen (a cualquiera de los destinos) se incurre en un costo de almacenamiento a razón de $5, $4 y $3 por unidad para los orígenes 1, 2 y 3, respectivamente. Además, toda la oferta del origen 2 se debe transportar en su totalidad para que haya espacio para un nuevo producto. Aplique la solución inicial de Vogel, y determine todas las iteraciones que conducen al programa de transporte óptimo.

***5.** En un problema de transporte de 3×3, sea x_{ij} la cantidad transportada del origen i al destino j, y c_{ij} el costo de transporte por unidad correspondiente. Las cantidades de la oferta en los orígenes 1, 2 y 3, son 15, 30 y 85 unidades, respectivamente, y las demandas en los destinos 1, 2 y 3 son 20, 30 y 80 unidades, respectivamente. Suponga que la solución inicial de esquina noroeste es óptima y que los valores asociados de los multiplicadores se dan como $u_1 = -2, u_2 = 3, u_3 = 5, v_1 = 2, v_2 = 5$, y $v_3 = 10$.

(a) Encuentre el costo óptimo asociado.

(b) Determine el valor mínimo de c_{ij} para cada variable no básica que mantendrá la optimalidad de la solución de la esquina noroeste.

6. El problema de transporte que se muestra en la tabla 5.29 da la solución básica *degenerada* indicada (es decir, al menos una de las variables básicas es cero). Suponga que los

TABLA 5.28 Datos para el problema 4

$1	$2	$1	**20**
$3	$4	$5	**40**
$2	$3	$3	**30**
30	**20**	**20**	

TABLA 5.29 Datos para el problema 6

10			**10**
	20	**20**	**40**
10	**20**	**20**	

TABLA 5.30 Datos para el problema 7

\$1	\$1	\$2	**5**
\$6	\$5	\$1	**6**
2	**7**	**1**	

multiplicadores asociados con esta solución son $u_1 = 1, u_2 = -1, v_1 = 2, v_2 = 2$ y $v_3 = 5$ y que el costo unitario para todas as variables x_{ij} *cero* (básicas y no básicas) es

$$c_{ij} = i + j\theta, -\infty < \theta < \infty$$

(a) Si la solución dada es óptima, determine el valor óptimo asociado de la función objetivo.

(b) Determine el valor de θ que garantizará la optimalidad de la solución dada. (*Sugerencia:* Localice la variable básica cero.).

7. Considere el problema

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq a_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ todas las } i \text{ y } j$$

Quizá parezca lógico suponer que la solución óptima requerirá que el primer (segundo) conjunto de desigualdades sea reemplazado con ecuaciones si $\Sigma a_i \geq \Sigma b_j$ ($\Sigma a_i \leq \Sigma b_j$). El ejemplo contrario que aparece en la tabla 5.30 muestra que esta suposición no es correcta.

Demuestre que la aplicación del procedimiento sugerido da la solución $x_{11} = 2, x_{12} = 3, x_{22} = 4$, y $x_{23} = 2$, con $z = \$27$, la cual es peor que la solución factible $x_{11} = 2, x_{12} = 7$ y $x_{23} = 6$, con $z = \$15$.

5.3.3 Explicación del método de los multiplicadores con el método simplex

La relación entre el método de los multiplicadores y el método simplex puede explicarse con base en las relaciones primal-dual (sección 4.2). Por la estructura especial de la programación lineal que representa el modelo de transporte (vea el ejemplo 5.1-1 para una ilustración), el problema dual asociado se escribe como

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

sujeto a

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \text{ para toda } i \text{ y } j$$

$$u_i \text{ y } v_j \text{ irrestrictas}$$

donde

a_i = Oferta en el origen i
b_j = Demanda en el destino j
c_{ij} = Costo de transporte por unidad del origen i al destino j
u_i = Variable dual de la restricción asociada con el origen i
v_j = Variable dual de la restricción asociada con el destino j

De acuerdo con la fórmula 2, sección 4.2.4, los coeficientes de la función objetivo (costos reducidos) de la variable x_{ij} son iguales a la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de la restricción dual correspondiente; es decir, $u_i + v_j - c_{ij}$. Sin embargo, sabemos que esta cantidad debe ser igual a cero para cada *variable básica*, lo que produce el siguiente resultado:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ para cada variable básica } x_{ij}$$

Hay $m + n - 1$ ecuaciones como esas cuya solución (después de suponer un valor arbitrario $u_1 = 0$) dan por resultado los multiplicadores u_i y u_j. Una vez calculados estos multiplicadores, la variable de entrada se determina a partir de todas las variables *no básicas* como la que tiene el máximo valor positivo $u_i + v_j - c_{ij}$.

La asignación de un valor arbitrario a una de las variables duales (es decir, $u_1 = 0$) puede parecer inconsistente con la forma en que se calculan las variables duales siguiendo el método 2 de la sección 4.2.3. En otras palabras, para una solución básica dada (y, por consiguiente, la inversa), los valores duales deben ser únicos. El problema 2, conjunto 5.3c, aborda este punto.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.3C

1. Escriba el problema dual para la programación lineal del problema del transporte del ejemplo 5.3-5 (tabla 5.21). Calcule el valor objetivo *dual* óptimo asociado utilizando los valores duales óptimos dados en la tabla 5.25, y demuestre que es igual al costo óptimo dado en el ejemplo.
2. En el modelo de transporte, una de las variables duales asume un valor arbitrario. Esto quiere decir que para la misma solución básica, los valores de las variables duales asociadas no son únicos. El resultado parece contradecir la teoría de programación lineal, donde los valores duales se determinan como el producto del vector de los coeficientes objetivo de las variables básicas y la matriz básica inversa asociada (vea el método 2, sección 4.2.3). Demuestre que para el modelo de transporte, aunque la base inversa es única, el vector de los coeficientes objetivo *básicos* no tiene que ser así. Específicamente, demuestre que si c_{ij} se cambia a $c_{ij} + k$ para toda i y j, donde k sea una constante, entonces los valores óptimos de x_{ij} no cambiarán. Por consiguiente, el uso de un valor arbitrario para una variable dual es implícitamente equivalente a asumir que se agrega una constante específica k a todas las c_{ij}.

5.4 MODELO DE ASIGNACIÓN

El modelo de asignación clásico se ocupa de compaginar a los trabajadores (con diversas habilidades) con los trabajos. Presumiblemente, la variación de la habilidad afecta el costo de completar un trabajo. La meta es determinar la asignación de costo mínimo de los trabajadores a los trabajos. El modelo de asignación general con n trabajadores y n trabajos está representado en la tabla 5.31. El elemento c_{ij} representa el costo de asignar el trabajador i al trabajo j ($i,j = 1, 2,\ldots,n$). No se pierde la generalidad al suponer que la cantidad de trabajadores y la de los trabajos son iguales, porque siempre podemos agregar trabajadores o trabajos ficticios para satisfacer esta suposición.

TABLA 5.31 Modelo de asignación

		Trabajos 1	2	...	n	
Trabajador	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	**1**
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	**1**
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	N	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nn}	**1**
		1	**1**	...	**1**	

El modelo de asignación es un caso especial del modelo de transporte, donde los trabajadores representan los orígenes y los trabajos representan los destinos. La oferta (demanda) en cada origen (destino) es igual a 1. El costo de "transportar" al trabajador i al trabajo j es c_{ij}. De hecho, el modelo de asignación puede resolverse de forma directa como un modelo de transporte (o como una PL regular). Sin embargo, el hecho de que la oferta y la demanda sean iguales a 1 conduce al desarrollo de un algoritmo de solución simple llamado **método húngaro**. Aunque el nuevo método de solución parece totalmente ajeno al modelo de transporte, en realidad el algoritmo tiene su origen en el método simplex, al igual que el modelo de transporte.

5.4.1 Método húngaro[8]

Utilizaremos dos ejemplos para presentar la mecánica del nuevo algoritmo. La siguiente sección proporciona una explicación del procedimiento basada en simplex.

Ejemplo 5.4-1

Los tres hijos de Joe Klyne, John, Karen y Terri, desean ganar algún dinero para sus gastos personales. El señor Klyne eligió tres tareas para sus hijos: podar el césped, pintar la puerta de la cochera y lavar los automóviles de la familia. Para evitar la competencia anticipada entre los hermanos, les pide que presenten licitaciones individuales (secretas) por lo que consideren un pago

TABLA 5.32 Problema de asignación del señor Klyne

	Podar	Pintar	Lavar
John	\$15	\$10	\$9
Karen	\$9	\$15	\$10
Terri	\$10	\$12	\$8

[8]Como con el método de transporte, el método húngaro clásico (diseñado principalmente para cálculos *manuales*) es algo del pasado, y se presenta aquí por razones históricas. En la actualidad no se requiere ese tipo de cálculos, ya que el problema puede resolverse mediante códigos de computadora de PL altamente eficientes. Tal vez el beneficio de estudiar estas técnicas clásicas es que están basadas en una teoría compleja que reduce los pasos de solución a reglas simples adecuadas para cálculos manuales.

TABLA 5.33 Aplicación del método húngaro al problema de asignación del ejemplo 5.4-1

Paso 1:

	Podar	Pintar	Lavar	Fila mín.
John	15	10	9	$p_1 = 9$
Karen	9	15	10	$p_2 = 9$
Terri	10	12	8	$p_3 = 8$

⇒

Paso 2:

	Podar	Pintar	Lavar
John	6	1	0
Karen	0	6	1
Terri	2	4	0
Columna máx.	$q_1 = 0$	$q_2 = 1$	$q_3 = 0$

⇒

Paso 3:

	Podar	Pintar	Lavar
John	6	**0**	0
Karen	**0**	5	1
Terri	2	3	**0**

justo por cada una de las tres tareas. La tabla 5.32 resume las licitaciones recibidas. Los niños respetarán la decisión de su padre con respecto a la asignación de las tareas.

El problema de asignación se resolverá por el método húngaro.

Paso 1. Determine p_i, el elemento de costo mínimo en la fila i de la matriz de costos original, y réstelo de todos los elementos de la fila i, $i = 1, 2, 3$.

Paso 2. Para la matriz creada en el paso 1, determine q_j, el elemento de costo mínimo de la columna j, y réstelo de todos los elementos de la columna j, $j = 1, 2, 3$.

Paso 3. A partir de la matriz del paso 2, intente determinar una asignación *factible* entre todas las entradas cero resultantes.

3a. Si puede hallarse esa asignación, es óptima.

3b. De lo contrario, se requieren más cálculos (como se explicará en el ejemplo 5.4-2).

La tabla 5.33 demuestra la aplicación de los dos pasos al problema actual.

Las celdas con entradas cero subrayadas en el paso 3 dan la solución óptima (factible): John obtiene el trabajo de pintar, Karen el de podar el césped, y Terri obtiene el de lavar los automóviles de la familia. El costo total para el señor Klyne es $9 + 8 + 8 = \$27$. Esta cantidad siempre será igual $(p_1 + p_2 + p_3) + (q_1 + q_2 + q_3) = (9 + 9 + 8) + (0 + 1 + 0) = \$27$. (Una justificación de este resultado se da en la siguiente sección.)

Como se indica en el paso 3 del método húngaro, los ceros creados por los pasos 1 y 2 pueden no dar una solución factible de forma directa. En este caso, se necesitan más pasos para determinar la asignación óptima (factible). El siguiente ejemplo demuestra esta situación.

Ejemplo 5.4-2

Suponga que la situación analizada en el ejemplo 5.4-1 se amplía a cuatro niños y cuatro tareas. La tabla 5.34 resume los elementos de costo del problema.

TABLA 5.34 Modelo de asignación

		Tarea 1	2	3	4
Niño	1	\$1	\$4	\$6	\$3
	2	\$9	\$7	\$10	\$9
	3	\$4	\$5	\$11	\$7
	4	\$8	\$7	\$8	\$5

TABLA 5.35 Matriz de asignaciones reducida

		Tarea 1	2	3	4
Niño	1	**0**	3	2	2
	2	2	**0**	**0**	2
	3	**0**	1	4	3
	4	3	2	**0**	**0**

La aplicación de los pasos 1 y 2 a la matriz de la tabla 5.34 (con $p_1 = 1, p_2 = 7, p_3 = 4, p_4 = 5, q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 3$ y $q_4 = 0$) da por resultado la matriz reducida de la tabla 5.35 (¡compruébelo!).

Las ubicaciones de las entradas cero no permiten asignar tareas únicas a todos los niños. Por ejemplo, si asignamos al niño 1 la tarea 1, entonces se eliminará la columna 1, y el niño tres no tendrá una entrada cero en las tres columnas restantes. Este obstáculo puede superarse agregando el siguiente paso al procedimiento dado en el ejemplo 5.4-1:

Paso 3b. Si no pueden encontrarse asignaciones de elemento cero factibles,

(i) Trace el *mínimo* de líneas horizontales y verticales en la última matriz reducida para cubrir *todas* las entradas cero.

(ii) Seleccione la entrada *mínima no cubierta* y réstela de cada entrada no cubierta, y luego súmela a cada entrada en la intersección de dos líneas.

(iii) Si no puede determinar una asignación factible entre las entradas cero resultantes, repita el paso 3a.

La aplicación del paso 3b a la última matriz produce las celdas sombreadas en la tabla 5.36. La entrada mínima no sombreada (que se muestra subrayada) es igual a 1. Esta entrada se suma a la celda de intersección y se resta de las celdas sombreadas restantes para producir la matriz de la tabla 5.37, y la solución óptima indicada por los ceros subrayados.

TABLA 5.36 Aplicación del paso 3b

		Tarea 1	2	3	4
Niño	1	0	3	2	2
	2	**2**	0	0	2
	3	0	<u>1</u>	4	3
	4	**3**	2	0	0

TABLA 5.37 Asignación óptima

		Tarea 1	2	3	4
Niño	1	**0**	2	1	1
	2	3	0	**0**	2
	3	0	**0**	3	2
	4	4	2	0	**0**

Momento de AMPL.

El archivo *amplEx5.4-2.txt* proporciona el modelo AMPL para el modelo de asignación. El modelo es parecido al del modelo de transporte.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 5.4A

1. Resuelva los modelos de asignación de la tabla 5.38.
   - **(a)** Resuélvalos por el método húngaro.
   - **(b)** *Experimento con TORA*. Exprese el problema como una PL y resuélvalo con TORA.
   - **(c)** *Experimento con TORA.* Utilice TORA para resolver el problema como un modelo de transporte.
   - **(d)** *Experimento con Solver*. Modifique el archivo *solverEx5.3-1.xls* para resolver el problema.
   - **(e)** *Experimento con AMPL*. Modifique el archivo *amplEx5.3b-1.txt* para resolver el problema.
2. JoShop necesita asignar 4 trabajos a 4 trabajadores. El costo de realizar un trabajo es una función de las habilidades de los trabajadores. La tabla 5.39 resume el costo de las asignaciones. El trabajador 1 no puede realizar el trabajo 3, y el trabajador 3 no puede realizar el trabajo 4. Determine la asignación óptima siguiendo el método húngaro.

TABLA 5.38 Datos del problema 1

(i)

\$3	\$8	\$2	\$10	\$3
\$6	\$5	\$2	\$7	\$5
\$6	\$4	\$2	\$7	\$5
\$8	\$4	\$2	\$3	\$5
\$7	\$8	\$6	\$7	\$7

(ii)

\$3	\$9	\$2	\$2	\$7
\$6	\$1	\$5	\$6	\$6
\$9	\$4	\$7	\$10	\$3
\$2	\$5	\$4	\$2	\$1
\$9	\$6	\$2	\$4	\$6

TABLA 5.39 Datos del problema 2

		Trabajo 1	2	3	4
Trabajador	1	\$50	\$50	—	\$20
	2	\$70	\$40	\$20	\$30
	3	\$90	\$30	\$50	—
	4	\$70	\$20	\$60	\$70

TABLA 5.40 Datos para el problema 5

Fecha de partida de Dallas	Fecha de regreso a Dallas
Lunes, 3 de junio	Viernes, 7 de junio
Lunes, 10 de junio	Miércoles, 12 de junio
Lunes, 17 de junio	Viernes, 21 de junio
Martes, 25 de junio	Viernes, 28 de junio

3. En el modelo de JoShop del problema 2, suponga que se dispone de un (quinto) trabajador más para realizar las cuatro tareas a los costos respectivos de $60, $45, $30 y $80. ¿Es económico reemplazar a uno de los cuatro trabajadores actuales con el nuevo?

4. En el modelo del problema 2, suponga que JoShop acaba de recibir un quinto trabajo y que los costos respectivos de realizarlo por los cuatro trabajadores actuales son $20, $10, $20 y $80. ¿Debe tener la prioridad el nuevo trabajo sobre cualquiera de los cuatro trabajos que ya tiene JoShop?

5. *Un ejecutivo de negocios debe hacer los cuatro viajes redondos que se muestran en la tabla 5.40 entre la oficina principal en Dallas y una sucursal en Atlanta.

El precio del boleto de viaje redondo saliendo de Dallas es de $400. Se ofrece un descuento de 25% si las fechas de llegada y partida de un boleto cubren una semana (sábado y domingo). Si la estancia en Atlanta dura más de 21 días, el descuento se incrementa a 30%. Un boleto de viaje sencillo entre Dallas y Atlanta (en cualquier dirección) cuesta $250. ¿Cómo debe comprar los boletos el ejecutivo?

***6.** La figura 5.5 muestra la distribución esquemática de un taller con sus centros de trabajo existentes designados por los cuadrados 1, 2, 3 y 4. Se tienen que agregar cuatro nuevos

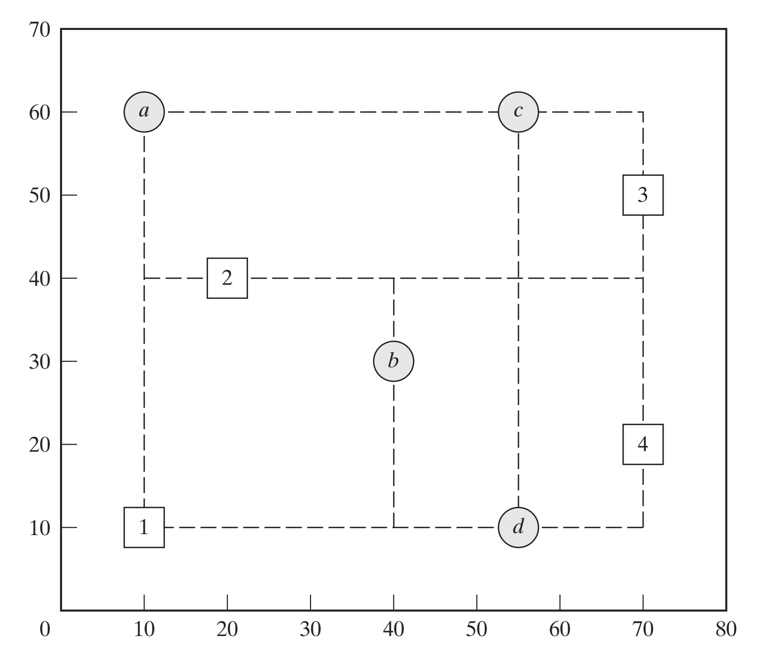


FIGURA 5.5
Distribución del taller para el problema 6, conjunto 5.4a

TABLA 5.41 Datos para el problema 6

		Centro nuevo			
		I	II	III	IV
	1	10	2	4	3
Centro	2	7	1	9	5
existente	3	0	8	6	2
	4	11	4	0	7

centros de trabajo, I, II, III y IV, al taller en los lugares designados por los círculos *a*, *b*, *c* y *d*. El objetivo es asignar los nuevos centros a los lugares propuestos para minimizar el tráfico total de manejo de materiales entre los centros existentes y los propuestos. La tabla 5.41 resume la frecuencia de los viajes entre los centros nuevos y los anteriores. El equipo de manejo de materiales viaja a lo largo de los pasillos rectangulares que se cortan en las ubicaciones de los centros. Por ejemplo, la distancia del viaje en un sentido (en metros) entre el centro 1 y la ubicación *b* es 30 + 20 = 50 m.

7. En el Departamento de Ingeniería Industrial en la Universidad de Arkansas, INEG 4904 es un curso de diseño culminante pensado para que equipos de estudiantes apliquen el conocimiento y las habilidades aprendidas en el programa de estudios de licenciatura a un problema práctico. Los miembros de cada equipo seleccionan un director de proyecto, identifican el alcance apropiado de su proyecto, redactan y presentan una propuesta, realizan las tareas necesarias para satisfacer los objetivos del proyecto, y redactan y presentan un informe final. El profesor del curso identifica proyectos potenciales y proporciona hojas de información apropiadas a cada uno, incluyendo el contacto en la organización patrocinadora, el resumen del proyecto y las habilidades potenciales necesarias para completar el proyecto. Se requiere que cada equipo de diseño presente un informe que justifique la selección de los miembros y del director del equipo. El informe también proporciona una clasificación de cada proyecto en orden de preferencia, incluida una justificación con respecto a la compaginación apropiada de las habilidades del equipo con los objetivos del proyecto. En un semestre específico se identificaron los siguientes proyectos: Boeing F-15, Boeing F-18, Boeing Simulation, Cargil, Cobb-Vantress, ConAgra, Cooper, DaySpring (diseño), DaySpring (manejo de materiales), J.B. Hunt, Raytheon, Tyson South, Tyson East, Wallmart y Yellow Transportation. Los proyectos de Boeing y Raytheon requieren que todos los miembros del equipo sean ciudadanos estadounidenses. De los once equipos de diseño disponibles en este semestre, cuatro no cumplen con este requisito.

Idee un procedimiento para asignar proyectos a equipos, y justifique los argumentos que proponga para llegar a una conclusión.

5.4.2 Explicación del método húngaro con simplex

El problema de asignación en el cual se determinan *n* trabajadores a *n* trabajos puede representarse como un modelo de PL como sigue: Sea c_{ij} el costo de asignar el trabajador *i* al trabajo *j*, y defina

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el trabajador } i \text{ es asignado al trabajo } j \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Entonces el modelo de PL se da como

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ o } 1$$

La solución óptima del modelo de PL anterior no cambia si se agrega una constante a o se resta de cualquier fila o columna de la matriz de costos (c_{ij}). Para probar este punto, sean p_i y q_i las constantes restadas de la fila i y la columna j. Por lo tanto, el elemento de costo c_{ij} cambia a

$$c'_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$$

Ahora

$$\sum_i \sum_j c'_{ij}x_{ij} = \sum_i \sum_j (c_{ij} - p_i - q_j)x_{ij} = \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} - \sum_i p_i\Big(\sum_j x_{ij}\Big) - \sum_j q_j\Big(\sum_i x_{ij}\Big)$$

$$= \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} - \sum_i p_i(1) - \sum_j q_j(1)$$

$$= \sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij} - \text{constante}$$

Como la nueva función objetivo difiere de la original por una constante, los valores óptimos de x_{ij} son los mismos en ambos casos. El desarrollo muestra que los pasos 1 y 2 del método húngaro, el cual pide restar p_i de la fila i y luego restar q_i de la columna j, produce un modelo de asignación equivalente. A este respecto, si puede hallarse una solución factible entre las entradas cero de la matriz de costos creada por los pasos 1 y 2, entonces debe ser óptima (porque el costo en la matriz modificada no puede ser menor que cero).

Si las entradas cero creadas no pueden dar una solución factible (como el ejemplo 5.4-2 lo demuestra), entonces debe aplicarse el paso 2a (que tiene que ver con la cobertura de las entradas cero). La validez de este procedimiento tiene de nuevo su raíz en el método simplex de programación lineal y puede explicarse por la teoría de la dualidad (capítulo 4) y el teorema de holgura complementaria (capítulo 7). No presentaremos aquí los detalles de la comprobación porque son un tanto complicados.

La razón por la que $(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) + (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$ da por resultado el valor objetivo óptimo es que representa la función objetivo dual de modelo de asignación. Este resultado puede verse mediante una comparación con la función objetivo dual del modelo de transporte dado en la sección 5.3.3. [Para los detalles, vea Bazaraa and Associates (2009)].

BIBLIOGRAFÍA

Bazaraa, M., J. Jarvis, y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows,* 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.

Dantzig, G., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

Hansen, P., y R. Wendell, "A Note on Airline Commuting", *Interfaces*, vol. 12, núm. 1, págs. 85-87, 1982.

Murty, K., *Network Programming*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1992.

CAPÍTULO 6

Modelo de redes

Aplicación de la vida real. Ahorro de recursos federales para viáticos

Las oficinas del gobierno federal de Estados Unidos están localizadas en la mayoría de las ciudades en los Estados Unidos, y se requiere que los empleados federales asistan a conferencias de desarrollo y cursos de capacitación que se ofrecen por todo el país. La ubicación de la ciudad donde se efectuarán las conferencias y eventos de capacitación puede impactar los viáticos. El objetivo del estudio es determinar la ubicación óptima de la ciudad anfitriona de una conferencia o evento de entrenamiento programado. Se estima que para el año fiscal de 1997, el modelo desarrollado ahorró al menos $400,000. El caso 4 del capítulo 26 en el sitio web proporciona los detalles.

6.1 ALCANCE Y DEFINICIÓN DE MODELOS DE REDES

Muchas situaciones de investigación de operaciones pueden modelarse y resolverse como redes (nodos conectados por ramas); a continuación tenemos algunos ejemplos de aplicación:

1. Diseño de una red de oleoductos para gas natural a una determinada distancia de la costa para conectar los cabezales de los pozos en el Golfo de México a un punto de distribución costero con el objetivo de minimizar el costo de construcción de los oleoductos.
2. Determinación de la ruta más corta entre dos ciudades en una red existente de carreteras.
3. Determinación de la capacidad máxima (en toneladas por año) de una red de oleoductos para lodos de carbón que unen minas de carbón en Wyoming con plantas eléctricas en Houston (los oleoductos para lodos transportan carbón al bombear agua a través de tuberías especialmente diseñadas).
4. Determinación del cronograma (fechas de inicio y terminación) para las actividades de un proyecto de construcción.
5. Determinación del itinerario de flujo de costo mínimo desde campos petroleros hasta refinerías a través de una red de oleoductos.

La solución de estas situaciones se logra por medio de varios algoritmos de optimización de redes. Este capítulo presenta cuatro de estos algoritmos.

1. Árbol de mínima expansión (situación 1)
2. Algoritmo de la ruta más corta (situación 2)
3. Algoritmo de flujo máximo (situación 3)
4. Algoritmo de la ruta crítica (CPM) (situación 4)

Para la quinta situación, el algoritmo de red capacitada de costo mínimo se presenta en la sección 22.1 en el sitio web.

Definiciones de red. Una red se compone de un conjunto de **nodos** unidos por **arcos** (o **ramas**). La notación para describir una red es (N, A), donde N es el conjunto de nodos, y A es el conjunto de arcos. Aguisa de ilustración, la red de la figura 6.1, se describe como

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5)\}$$

Asociado con cada red hay un **flujo** (por ejemplo, los productos de petróleo fluyen por un oleoducto y el tráfico de automóviles fluye por las carreteras). El flujo máximo en una red puede ser finito o infinito, según la capacidad de sus arcos.

Se dice que un arco está **dirigido** u **orientado** si permite el flujo positivo sólo en una dirección. Una **red dirigida** tiene todos los arcos dirigidos.

Una **ruta** es un conjunto de arcos que unen dos nodos distintos, y que pasan a través de otros nodos en la red. Por ejemplo, en la figura 6.1 los arcos (1,2), (2,3), (3,4) y (4,5) forman una ruta entre los nodos 1 y 5. Una ruta forma un **ciclo** o un **bucle** si conecta un nodo de vuelta a sí mismo a través de otros nodos. En la figura 6.1, los arcos (2,3), (3,4) y (4,2) forman un ciclo.

Se dice que una red está **conectada** si cada dos nodos distintos están conectados en al menos una ruta. La red en la figura 6.1 muestra este tipo de red. Un **árbol** es una red conectada *libre de ciclos* compuesta de un *subconjunto* de todos los nodos, y un **árbol de expansión** es un árbol que une *todos* los nodos de la red. La figura 6.2 proporciona ejemplos de un árbol y un árbol de expansión de la red de la figura 6.1.

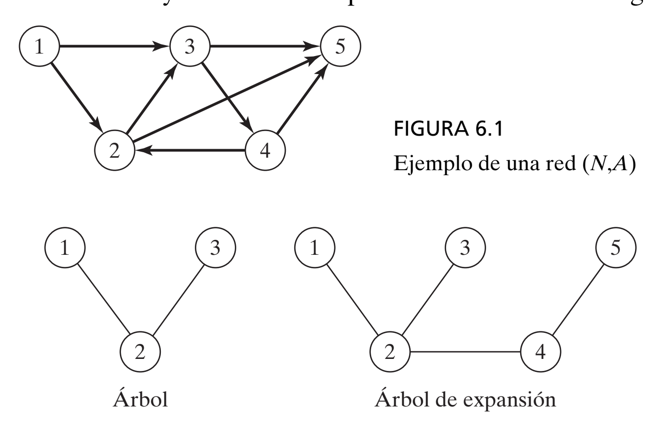


FIGURA 6.1
Ejemplo de una red (N,A)

FIGURA 6.2
Ejemplos de un árbol y un árbol de expansión

Ejemplo 6.1-1 (Puentes de Königsberg)

La ciudad prusiana de Königsberg (actualmente Kaliningrado en Rusia) fue fundada en 1254 en las riberas del río Pregel con siete puentes que conectan sus cuatro secciones (designadas *A*, *B*, *C,* y *D*) como se muestra en la figura 6.3. Surgió una pregunta sobre si podría construirse un *viaje redondo* para visitar las cuatro secciones de la ciudad, cruzando cada puente exactamente una vez. Una sección podría ser visitada varias veces, si fuese necesario.

A mediados del siglo XVIII, el afamado matemático Leonhard Euler desarrolló un argumento de "construcción de rutas" para demostrar que sí era posible construir semejante viaje. Más tarde, a principios del siglo XIX, el mismo problema se resolvió presentando de nuevo la situación como una red con nodos que representan las secciones y arcos (distintos) que representan los puentes, como se muestra en la figura 6.4.

La representación en forma de red implica el hallazgo de una respuesta a la pregunta planteada. El número de arcos incidentes en cada nodo es *impar*. Esto hace posible entrar y salir de todas las secciones utilizando puentes distintos. Por consiguiente, el viaje redondo deseado no puede construirse.[1]

FIGURA 6.3

Puentes de Königsberg

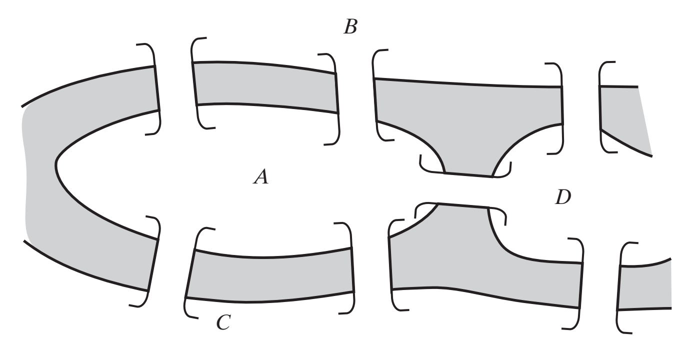
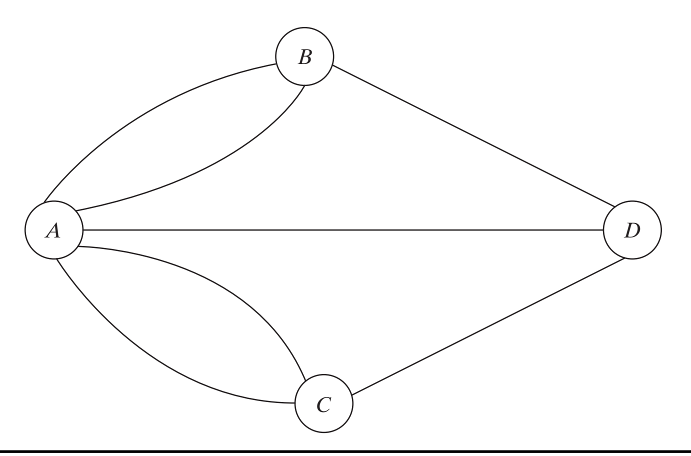


FIGURA 6.4

Representación en forma de red del problema de Königsberg



[1]Solución general: Existe un recorrido que se inicia y termina en un nodo si el número de arcos incidentes en cada nodo es *par*. Hay un viaje que se inicia en un nodo y termina en *otro* si el número de arcos incidentes en estos dos nodos es *impar*. De lo contrario, no hay solución. Vea B. Hopkins y R. Wilson, "The Truth about Königsberg", *College Math Journal*, Vol. 35, núm. 3, págs. 198-207, 2004.

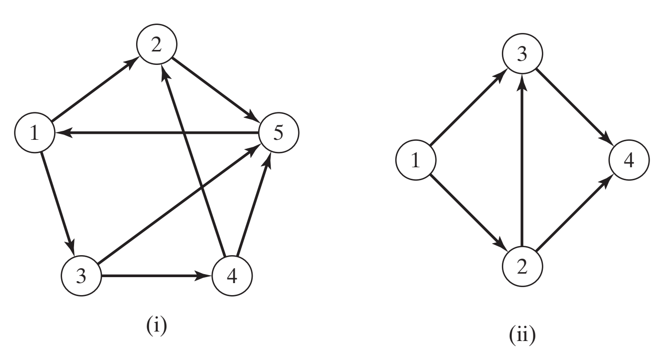


FIGURA 6.5

Redes para el problema 1, conjunto 6.1a

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.1A

*1. Para cada red de la figura 6.5, determine (a) una ruta, (b) un ciclo, (c) un árbol, y (d) un árbol de expansión.

2. Determine los conjuntos N y A para las redes de la figura 6.5.

3. Trace la red definida por

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 6), (5, 2), (5, 6)\}$$

4. En el ejemplo 6.1-1, especifique la cantidad mínima y las ubicaciones de los puentes adicionales que se requieren para construir un viaje redondo. Construya la red resultante, y determine los tramos del viaje.

*5. Considere ocho cuadrados iguales dispuestos en tres filas, con dos cuadrados en la primera fila, cuatro en la segunda, y dos en la tercera. Los cuadrados de cada fila están acomodados simétricamente alrededor del eje vertical. Marque los cuadros con números distintos del 1 al 8, de modo que dos cuadrados *adyacentes* verticales, horizontales o diagonales no tengan números consecutivos. Use una representación de red para hallar una solución de una forma sistemática.

6. Tres reclusos escoltados por dos guardias deben ser transportados por un bote desde tierra firme hasta una isla penitenciaria para que cumplan sus sentencias. El bote no puede transferir más de dos personas en ambas direcciones. Es seguro que los reclusos dobleguen a los guardias si los superan en número en cualquier parte y en cualquier momento. Desarrolle un modelo de red que diseñe los viajes del bote de modo que garantice el traslado seguro de los reclusos.

6.2 ALGORITMO DEL ÁRBOL DE MÍNIMA EXPANSIÓN

Este árbol vincula los nodos de una red valiéndose de la longitud mínima total de las ramas de conexión. Una aplicación común se presenta en la pavimentación de carreteras que unen poblaciones, o de forma directa, o que pasan por otras poblaciones. La solución del árbol de mínima expansión proporciona el diseño del sistema de carreteras.

Sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de nodos de la red y defina

C_k = Conjunto de nodos que han estado conectados de manera permanente en la iteración k

$\overline{C}_k$ = Conjunto de nodos que se construirán permanentemente después de la iteración k.

Los siguientes pasos describen al algoritmo del árbol de mínima expansión:

Paso 0. Establezca $C_0 = \varnothing$ y $\overline{C}_0 = N$.

Paso 1. Inicie con *cualquier* nodo i en el conjunto no conectado $\overline{C}_0$ y establezca $C_1 = \{i\}$, lo que produce $\overline{C}_1 = N - \{i\}$. Establezca $k = 2$.

Paso general *k*. Seleccione un nodo, j^*, en el conjunto no conectado $\overline{C}_{k-1}$, que produzca el arco más corto a un nodo en el conjunto $C_{k\text{-}1}$ conectado. Vincule j^* permanentemente a C_{k-1} y elimínelo de $\overline{C}_{k-1}$ para obtener C_k y $\overline{C}_k$, respectivamente. Deténgase si $\overline{C}_k$ está vacío; de lo contrario, establezca $k = k + 1$ y repita el paso.

Ejemplo 6.2-1

Midwest TV Cable Company va a proporcionar servicio de cable a cinco desarrollos habitacionales. La figura 6.6 ilustra las posibles conexiones de TV a las cinco áreas, con las millas de cable anexadas a cada arco. El objetivo es determinar la red de cables más económica.

El algoritmo se inicia en el nodo 1 (en realidad, cualquier otro nodo puede ser un punto de inicio), el cual da por resultado

$$C_1 = \{1\} \text{ y } \overline{C}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Las iteraciones del algoritmo se resumen en la figura 6.7. Los arcos delgados proporcionan todos los candidatos entre C y $\overline{C}$. Los arcos gruesos son los vínculos permanentes del conjunto conectado C, y el arco de rayas es el nuevo vínculo (permanente) agregado en cada iteración. Por ejemplo, en la iteración 1, la rama (1, 2) es el vínculo más corto (= 1 milla) entre todas las ramas candidatas del nodo 1 a los nodos 2, 3, 4, 5 y 6 en el conjunto no conectado $\overline{C}_1$. De ahí que el vínculo (1, 2) se hace permanente y $j^* = 2$, de lo cual resulta

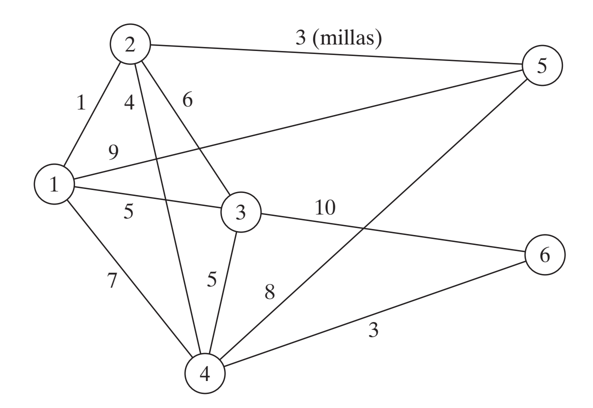
$$C_2 = \{1, 2\}, \overline{C}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$$

El árbol de mínima expansión que se muestra en la iteración 6 de la figura 6.7 da la solución. Las millas de cable mínimas resultantes que se necesitan para proporcionar el servicio de cable deseado son $1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16$ millas.

Comentarios. En teoría, un árbol de mínima expansión puede formularse y resolverse como un programa lineal. Sin embargo, la PL no es una opción práctica porque deben agregarse numerosas restricciones para excluir todos los ciclos y el resultado es una PL enorme, aun para redes pequeñas.

FIGURA 6.6

Conexiones de cable para Midwest TV Company



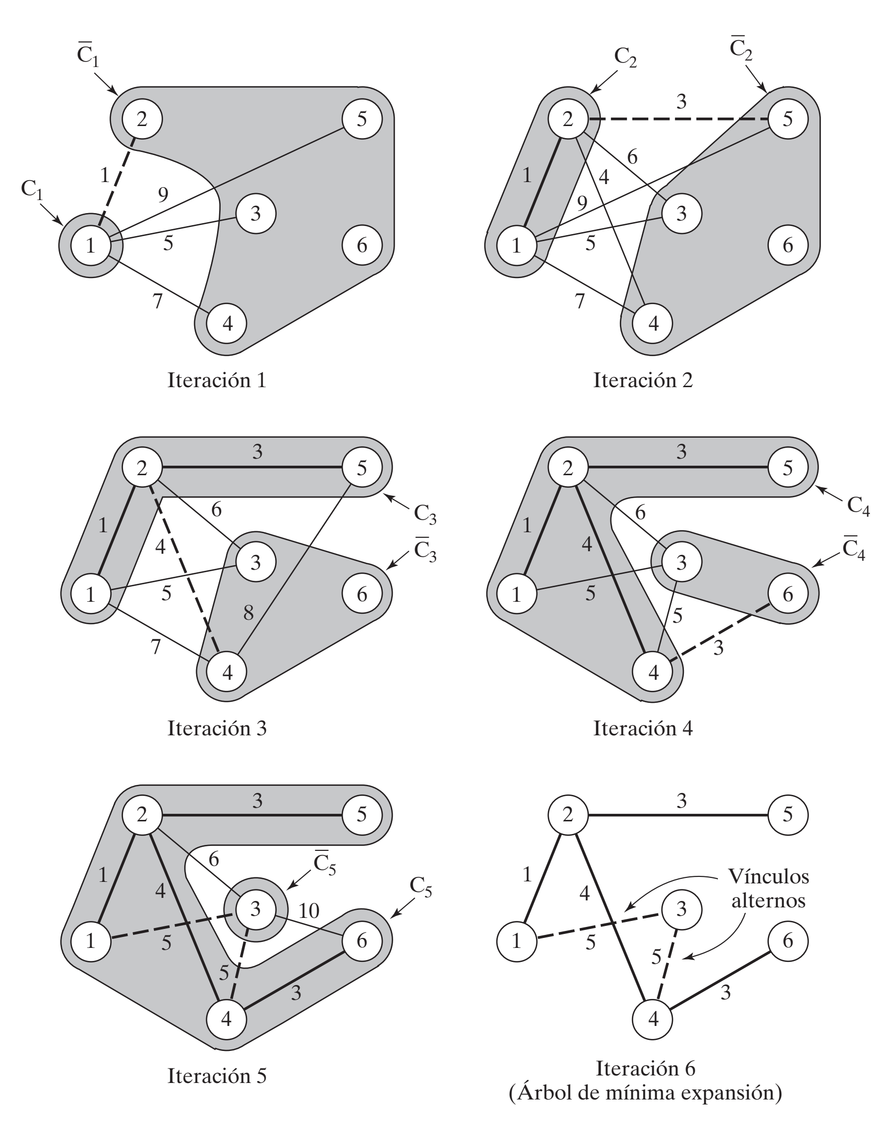


FIGURA 6.7

Iteraciones para determinar la solución para Midwest TV Company

Momento de TORA

Puede utilizar TORA para generar las iteraciones del árbol de mínima expansión. En la barra de Main Menu, seleccione las opciones Network models ⇒ Minimal spanning tree. Luego, en el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve problem ⇒ Go to output screen. En la pantalla de resultados seleccione Starting node, luego utilice las opciones Next iteration o bien All iterations para generar las iteraciones sucesivas. Puede reiniciar las iteraciones seleccionando un nuevo nodo de inicio Starting Node. El archivo *toraEx6.2-1.txt* da los datos para el ejemplo 6.2-1.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.2A

1. Resuelva el ejemplo 6.2-1 iniciando en el nodo 5 (en lugar de en el nodo 1), y demuestre que el algoritmo produce la misma solución.

2. Determine el árbol de mínima expansión de la red del ejemplo 6.2-1 conforme cada una de las siguiente condiciones distintas:

*(a) Los nodos 5 y 6 están unidos por un cable de 2 millas.

(b) Los nodos 2 y 5 no pueden unirse.

(c) Los nodos 2 y 6 están unidos por un cable de 4 millas.

(d) El cable entre los nodos 1 y 2 es de 8 millas de largo.

(e) Los nodos 3 y 5 están unidos por un cable de 2 millas.

(f) El nodo 2 no puede unirse directamente a los nodos 3 y 5.

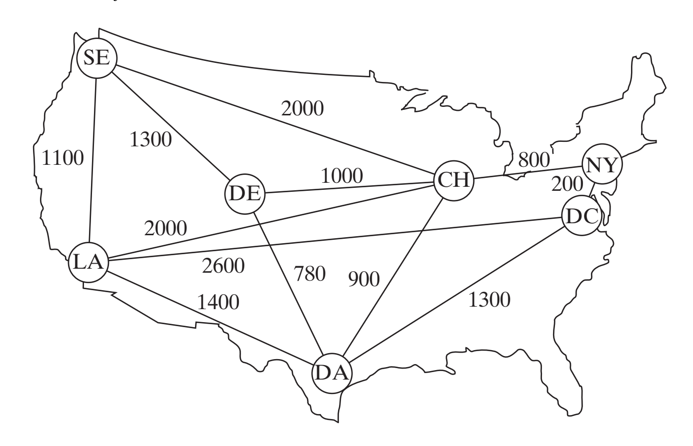
3. En el transporte intermodal, los camiones de remolque cargados se transportan entre terminales ferroviarias sobre plataformas especiales. La figura 6.8 muestra la ubicación de las principales terminales ferroviarias en los Estados Unidos y las vías de ferrocarril existentes. El objetivo es decidir qué vías deben ser "revitalizadas" para manejar el tráfico intermodal. En particular, la terminal de Los Ángeles (LA) debe vincularse directamente a Chicago (CH) para acomodar el tráfico pesado esperado. Aparte de esa, todas las terminales restantes pueden vincularse directa o indirectamente, de modo que la longitud total (en millas) de las vías seleccionadas se minimice. Determine los segmentos de las vías ferroviarias que deben incluirse en el programa de revitalización.

4. La figura 6.9 da la distancia en millas de los vínculos factibles que conectan nueve cabezales de pozos de gas natural localizados a una cierta distancia de la costa con un punto de distribución costero. Como el cabezal del pozo 1 es el más cercano a la costa, dispone de una suficiente capacidad de bombeo y almacenamiento para bombear la producción de los ocho pozos restantes al punto de distribución. Determine la red de oleoductos mínima que vincule los cabezales de los pozos al punto de distribución.

***5.** En la figura 6.9 del problema 4, suponga que los cabezales de los pozos pueden dividirse en dos grupos según la presión del gas: un grupo de alta presión que incluye los pozos 2, 3, 4 y 6, y un grupo de baja presión que incluye los pozos, 5, 7, 8 y 9. Debido a la diferencia de presión, no es posible vincular los pozos de los dos grupos. Al mismo tiempo,

FIGURA 6.8

Red para el problema 3, conjunto 6.2a



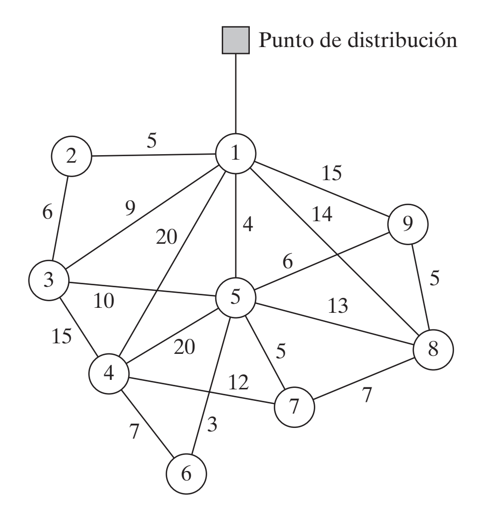


FIGURA 6.9
Red para el problema 4, conjunto 6.2a

ambos grupos deben conectarse al punto de distribución a través del pozo 1. Determine la red de oleoductos mínima para esta situación.

6. Electro produce 15 piezas electrónicas en 10 máquinas. La compañía desea agrupar las máquinas en celdas para minimizar las "disparidades" entre las piezas procesadas en cada celda. Una medida de "disparidad", d_{ij}, entre las piezas procesadas con las máquinas i y j puede expresarse como

$$d_{ij} = 1 - \frac{n_{ij}}{n_{ij} + m_{ij}}$$

donde n_{ij} es la cantidad de piezas compartidas entre las máquinas i y j, y m_{ij} es la cantidad de piezas procesadas o por la máquina i o por la máquina j únicamente.

La siguiente tabla asigna las piezas a las máquinas:

Máquina	Piezas asignadas
1	1, 6
2	2, 3, 7, 8, 9, 12, 13, 15
3	3, 5, 10, 14
4	2, 7, 8, 11, 12, 13
5	3, 5, 10, 11, 14
6	1, 4, 5, 9, 10
7	2, 5, 7, 8, 9, 10
8	3, 4, 15
9	4, 10
10	3, 8, 10, 14, 15

(a) Exprese el problema como un modelo de red.

(b) Demuestre que la determinación de las celdas puede basarse en la solución del árbol de mínima expansión.

(c) Para los datos dados en la tabla anterior, construya las soluciones de dos y tres celdas.

6.3 PROBLEMA DE LA RUTA MÁS CORTA

Este problema determina la ruta más corta entre un origen y un destino en una red de transporte. El mismo modelo puede representar otras situaciones, como se ilustra con los siguientes ejemplos.

6.3.1 Ejemplos de aplicaciones de la ruta más corta

Ejemplo 6.3-1 (Reemplazo de equipo)

RentCar está desarrollando una política de reemplazo para su flotilla de automóviles en un horizonte de planeación de 4 años. Al inicio de cada año, un automóvil se reemplaza o se conserva en operación durante un año más. Un automóvil debe estar en servio de 1 a 3 años. La siguiente tabla proporciona el costo de reemplazo como una función del año en que se adquiere un automóvil y los años en operación.

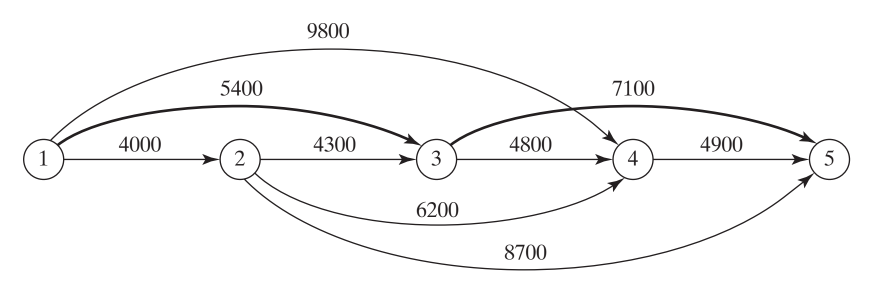
Equipo adquirido al inicio del año	Costo de reemplazo ($) para años dados en operación		
	1	*2*	*3*
1	4000	5400	9800
2	4300	6200	8700
3	4800	7100	—
4	4900	—	—

El problema puede formularse como una red en la que los nodos 1 a 5 representan el inicio de los años 1 a 5. Los arcos a partir del nodo 1 (año 1) pueden llegar a los nodos 2, 3 y 4 porque un automóvil puede estar en operación de 1 a 3 años. Los arcos a partir de los demás nodos pueden interpretarse del mismo modo. La longitud de cada arco es igual al costo de reemplazo. La solución del problema es equivalente a determinar la ruta más corta entre los nodos 1 y 5.

La figura 6.10 muestra la red resultante. Utilizando TORA,[2] la ruta más corta es $1 \to 3 \to 5$. La solución indica que un automóvil adquirido al inicio del año 1 (nodo 1) debe reemplazarse después de 2 años al inicio del año 3 (nodo 3). El automóvil de reemplazo se mantendrá enton-

FIGURA 6.10

Problema de reemplazo de equipo como un modelo de la ruta más corta



[2]En la barra de menús Main, seleccione las opciones Network models ⇒ Shortest route. En el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve problem ⇒ Shortest routes.

ces en servicio hasta finales del año 4. El costo total de esta política de reemplazo es de $12,500 (= $5400 + $7100).

Ejemplo 6.3-2 (Ruta más confiable)

I. Q. Smart va en auto diariamente al trabajo. Habiendo completado un curso de análisis de redes, Smart es capaz de determinar la ruta más corta al trabajo. Por desgracia, la ruta seleccionada está fuertemente patrullada por la policía, y con todas las multas pagadas por exceso de velocidad, la ruta más corta puede no ser la mejor opción. Smart ha decidido por lo tanto elegir una ruta que maximice la probabilidad de *no* ser detenido por la policía.

La red en la figura 6.11 muestra las posibles rutas de la casa al trabajo y la probabilidad asociada de no ser detenido en cada segmento. La probabilidad de no ser detenido en la ruta es el producto de las probabilidades de sus segmentos. Por ejemplo, la probabilidad de no ser multado en la ruta $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7$ es $.9 \times .3 \times .25 = .0675$. El objetivo de Smart es seleccionar la ruta que *maximice* la probabilidad de no ser multado.

El problema puede formularse como un modelo de la ruta más corta por medio de una transformación logarítmica para convertir el producto de las probabilidades en la suma de los logaritmos de las probabilidades, esto es, $p_{1k} = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ se transforma en $\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \ldots + \log p_k$.

Las dos funciones p_{1k} y $\log p_{1k}$ son monótonas y decrecen en k, así pues, maximizar p_{1k} es equivalente a maximizar $\log p_{1k}$, lo que a su vez equivale a *minimizar* $\log p_{1k}$. Por lo tanto, al reemplazar p_j con $\log p_j$ para todas las j en la red, el problema se convierte en la red de la ruta más corta en la figura 6.12.

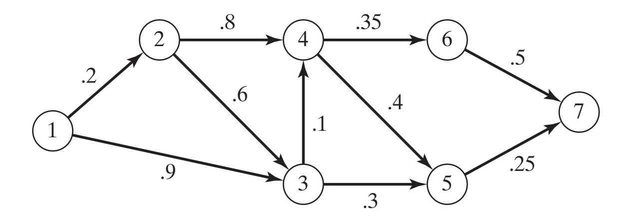
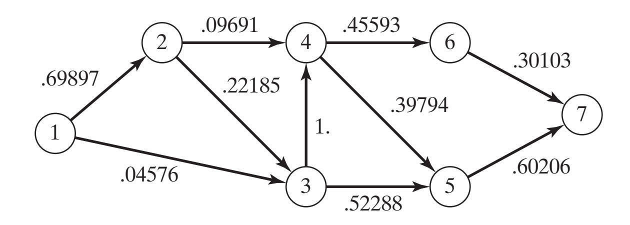


FIGURA 6.11

Modelo de red de la ruta más confiable

FIGURA 6.12

Representación de la ruta más confiable como un modelo de la ruta más corta



Utilizando TORA, la ruta más corta en la figura 6.12 pasa por los nodos 1, 3, 5 y 7 con una "longitud" correspondiente de 1.1707, o log $p_{17} = -1.1707$. Así, la probabilidad máxima de no ser detenido es $p_{17} = 10^{-1.1707} = .0675$, ¡una noticia no muy alentadora para Smart!

Ejemplo 6.3-3 (Acertijo de las tres jarras)

Una jarra de 8 galones está llena de líquido. Dado que hay dos jarras vacías de 5 y 3 galones, divida los 8 galones de líquido en dos partes iguales utilizando sólo las tres jarras. ¿Cuál es el mínimo de transferencias (decantaciones) necesarias para obtener este resultado?

Probablemente pueda resolver este acertijo mediante inspección. No obstante, el proceso de solución puede ser sistematizado al representar la cuestión como un problema de la ruta más corta.

Se define un nodo mediante un subíndice triple que representa las cantidades de líquido en las jarras de 8, 5 y 3 galones, respectivamente. Esto quiere decir que la red se inicia con el nodo (8,0,0) y termina con la solución deseada (4,4,0). Se genera un nuevo nodo a partir del nodo actual decantando líquido de una jarra a otra.

La figura 6.13 muestra las diferentes rutas que llevan del nodo de inicio (8,0,0) al nodo final (4,4,0). El arco entre dos nodos sucesivos representa una sola transferencia, y de ahí que podemos suponer que tenemos una longitud de una unidad. El problema se reduce por lo tanto a determinar la ruta más corta entre el nodo (8,0,0) y el nodo (4,4,0).

La solución óptima dada por la ruta de la figura 6.13 requiere 7 decantaciones.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3A

*1. Reconstruya el modelo de reemplazo de equipo del ejemplo 6.3-1 suponiendo que un automóvil debe mantenerse en servicio al menos durante 2 años con una vida de servicio máxima de 4. El horizonte de planificación abarca desde el principio del año 1 hasta finales del año 5. La siguiente tabla proporciona los datos necesarios.

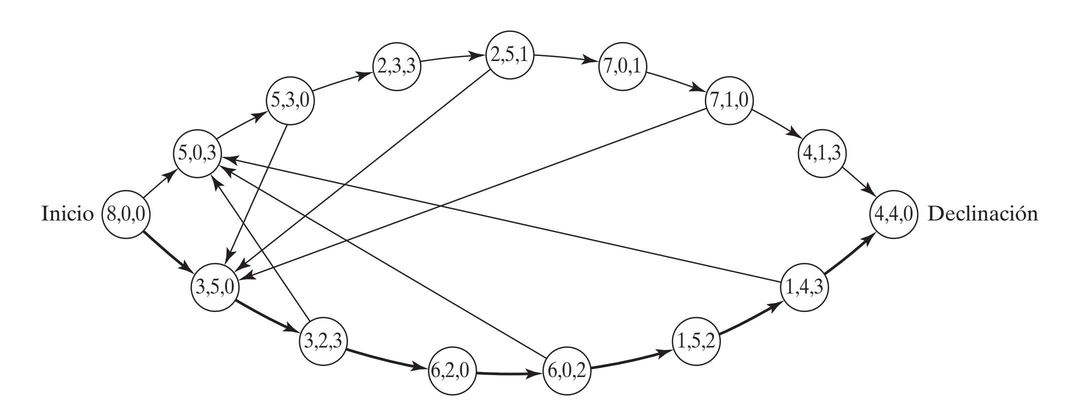


FIGURA 6.13

Representación del acertijo de las tres jarras como un modelo de la ruta más corta

	Costo de reemplazo ($) para años dados en operación		
Año de adquisición	*2*	*3*	*4*
1	3800	4100	6800
2	4000	4800	7000
3	4200	5300	7200
4	4800	5700	—
5	5300	—	—

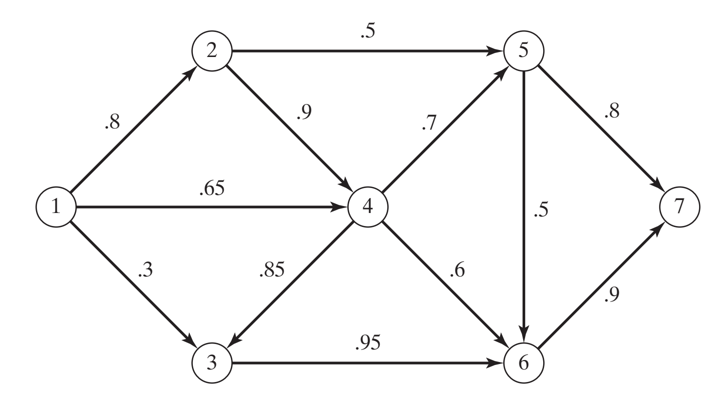
2. La figura 6.14 muestra la red de comunicación entre dos estaciones, 1 y 7. La probabilidad de que un enlace en la red opere sin fallas se muestra en cada arco. Se envían mensajes de la estación 1 a la estación 7, y el objetivo es determinar la ruta que maximice la probabilidad de una transmisión exitosa. Formule la situación como un modelo de la ruta más corta, y determine la solución óptima.

3. *Planificación de la producción*. DirectCo vende mercancía cuyas demandas a lo largo de los próximos 4 meses son 100, 140, 210 y 180 unidades, respectivamente. La compañía puede mantener existencias suficientes para satisfacer la demanda de cada mes, o bien tener existencias de más para satisfacer la demanda de dos o más meses consecutivos. En el último caso, se carga un costo de retención de $1.20 por cada unidad de más por mes. Direct Co estima que los precios de compra unitarios durante los siguientes 4 meses deben ser de $15, $12, $10 y $14, respectivamente. Se incurre en un costo de preparación de $200 cada vez que se coloca un pedido de compra. La compañía desea desarrollar un plan de compra que minimice los costos totales de colocar un pedido, comprar y retener la mercancía en existencia. Formule el problema como un modelo de la ruta más corta, y use TORA para determinar la solución óptima.

***4.** *Problema de Knapsack*. Un ciclista utiliza una mochila de 5 pies^3 y tiene que decidir sobre los artículos más valiosos que hay que llevar en un viaje. Hay tres artículos a escoger. Sus volúmenes son de 2, 3 y 4 pies^3; el ciclista estima que sus valores asociados en una escala del 0 al 100 son 30, 50 y 70, respectivamente. Exprese el problema como una red de la ruta más larga, y determine la solución óptima. (*Sugerencia:* Un nodo en la red puede definirse como $[i,v]$, donde i es el número del artículo considerado para empacarse y v es el volumen restante inmediatamente antes de decidir sobre i. Para resolverlo con

FIGURA 6.14

Red para el problema 2, conjunto 6.3a



TORA, convierta el problema de ruta más larga en uno de ruta más corta, utilizando una longitud de arco negativa.)

5. Un tostador eléctrico antiguo tiene dos puertas de gozne accionadas por resorte. Las dos puertas se abren hacia afuera en direcciones opuestas lejos del elemento calefactor. Una rebanada de pan se tuesta por un lado a la vez, al empujar una de las puertas para que se abra y colocar la rebanada con la otra mano. Después de que se tuesta un lado, se le da vuelta a la rebanada para tostar el otro lado. El objetivo es determinar la secuencia de operaciones (colocar, tostar, dar vuelta y sacar) necesarias para tostar las tres rebanadas de pan en el menor tiempo posible. Formule el problema como un modelo de ruta más corta, aplicando los siguientes tiempos elementales de las diferentes operaciones:

Operación	Tiempo (segundos)
Colocar una rebanada en cualquier lado del tostador	3
Tostar un lado	30
Darle vuelta a la rebanada que ya está en el tostador	1
Sacar la rebanada de cualquier lado del tostador	3

6.3.2 Algoritmos de la ruta más corta

Esta sección presenta dos algoritmos para resolver tanto redes cíclicas (es decir, que contienen bucles) como redes acíclicas:

1. El algoritmo de Dijkstra para determinar las rutas más cortas entre el nodo origen y los demás nodos en la red.
2. El algoritmo de Floyd para determinar la ruta más corta entre dos nodos *cualesquiera* en la red.

En esencia, el algoritmo de Floyd incluye a Dijkstra.

Algoritmo de Dijkstra. Sea u_i la distancia más corta del nodo origen 1 al nodo i, y defina d_{ij} (≥ 0) como la longitud del arco (i,j). El algoritmo define la etiqueta para un nodo j que sigue inmediatamente como

$$[u_j, i] = [u_i + d_{ij}, i],\ d_{ij} \geq 0$$

La etiqueta para el nodo de inicio es [0, 2], que indica que el nodo no tiene predecesor.

Las etiquetas de nodo en el algoritmo de Dijkstra son de dos tipos: *temporales* y *permanentes*. Una etiqueta temporal en un nodo se modifica si puede hallarse una ruta más corta al nodo. De lo contrario, el estado temporal cambia a permanente.

Paso 0. Etiquete el nodo de origen (nodo 1) con la etiqueta *permanente* [0, −]. Establezca $i = 1$.

Paso general *i*:

(a) Calcule las etiquetas *temporales* $[u_i + d_{ij}, i]$ para cada nodo j con $d_{ij} > 0$, *siempre que j no esté etiquetado permanentemente*. Si el nodo j ya tiene una etiqueta temporal existente $[u_j, k]$ hasta otro nodo k y si $u_i + d_{ij} < u_j$, reemplace $[u_j, k]$ con $[u_i + d_{ij}, i]$.

(b) Si *todos* los nodos tienen etiquetas *permanentes* deténgase. De lo contrario, seleccione la etiqueta $[u_r, s]$ que tenga la distancia más corta $(= u_r)$ entre todas las etiquetas *temporales* (rompa los empates arbitrariamente). Establezca $i = r$ y repita el paso i.

Ejemplo 6.3-4

La red de la figura 6.15 da las rutas permisibles y sus longitudes en millas entre la ciudad 1 (nodo 1) y las otras cuatro ciudades (nodos 2 a 5). Determine las rutas más cortas entre la ciudad 1 y cada una de las cuatro ciudades restantes.

Iteración 0. Asigne una etiqueta *permanente* [0, −] al nodo 1.

Iteración 1. Se puede llegar a los nodos 2 y 3 desde el nodo 1 (el último etiquetado permanentemente). Así, la lista de nodos etiquetados (temporales y permanentes) es

Nodo	Etiqueta	Estado
1	**[0, −]**	**Permanente**
2	[0 + 100, 1] = [100, 1]	Temporal
3	[0 + 30, 1] = [30, 1]	Temporal

Para las dos etiquetas temporales [100,1] y [30,1], el nodo 3 da la distancia mínima ($u_3 = 30$). De este modo, el estado del nodo 3 cambia a permanente.

Iteración 2. Se puede llegar a los nodos 4 y 5 desde el nodo 3, y la lista de los nodos etiquetados es

Nodo	Etiqueta	Estado
1	[0, −]	Permanente
2	[100, 1]	Temporal
3	**[30, 1]**	**Permanente**
4	[30 + 10, 3] = [40, 3]	Temporal
5	[30 + 60, 3] = [90, 3]	Temporal

La etiqueta temporal [40,3] en el nodo 4 ahora es permanente ($u_4 = 40$).

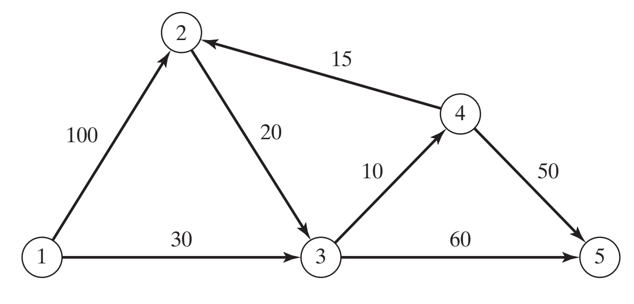


FIGURA 6.15
Ejemplo de red para el algoritmo de la ruta más corta de Dijkstra

Iteración 3. Desde el nodo 4 se puede llegar a los nodos 2 y 5 Así, la lista de los nodos etiquetados se actualiza como

Nodo	Etiqueta	Estado
1	[0, —]	Permanente
2	[40 + 15, 4] = [55, 4]	Temporal
3	[30, 1]	Permanente
4	**[40, 3]**	**Permanente**
5	[90, 3] o	
	[40 + 50, 4] = [90, 4]	Temporal

En el nodo 2, la nueva etiqueta [55,4] reemplaza a la etiqueta temporal [100,1] de la iteración 1 porque proporciona una ruta más corta. Además, en la iteración 3 el nodo 5 tiene dos etiquetas alternativas con la misma distancia ($u_5 = 90$). La etiqueta temporal [55,4] en el nodo 2 ahora es permanente ($u_2 = 55$).

Iteración 4. Sólo el nodo 3 permanentemente etiquetado puede ser alcanzado desde el nodo 2. Por consiguiente el nodo 3 no puede ser reetiquetado. La nueva lista de etiquetas permanece como estaba en la iteración 3 excepto que la etiqueta en el nodo 2 ahora es permanente. Esto deja al nodo 5 como la única etiqueta temporal. Como el nodo 5 no conduce a otros nodos, su etiqueta se hace permanente, y el proceso termina.

Los cálculos del algoritmo pueden realizarse directamente en la red, como lo demuestra la figura 6.16.

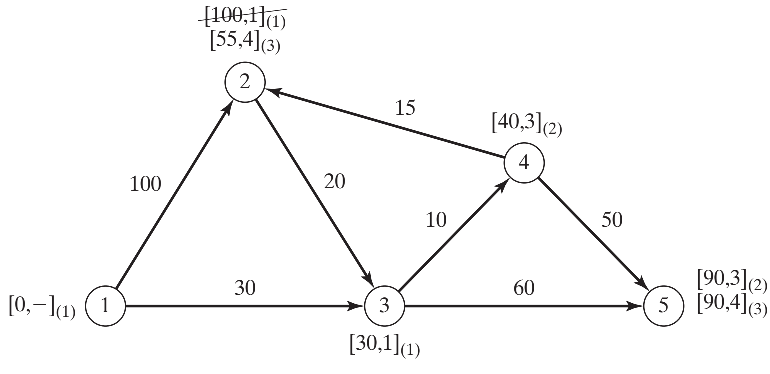
La ruta más corta entre el nodo 1 y cualquier otro nodo en la red se determina partiendo del nodo destino deseado y retrocediendo hasta el nodo de inicio utilizando la información en las etiquetas permanentes. Por ejemplo, la siguiente secuencia determina la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2:

$$(\mathbf{2}) \rightarrow [55, \mathbf{4}] \rightarrow (\mathbf{4}) \rightarrow [40, \mathbf{3}] \rightarrow (\mathbf{3}) \rightarrow [30, \mathbf{1}] \rightarrow (\mathbf{1})$$

Por lo tanto, la ruta deseada es $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ con una distancia total de 55 millas.

FIGURA 6.16

Procedimiento de etiquetado en el algoritmo de Dijkstra



Momento de TORA

Puede usarse TORA para generar las iteraciones de Dijkstra. En el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve problem ⇒ Iterations ⇒ Dijkstra's algorithm. El archivo *toraEx3-4.txt* proporciona los datos para el ejemplo 6.3-4.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3B

1. La red de la figura 6.17 presenta las distancias en millas entre pares de ciudades 1,2,…,8. Use el algoritmo de Dijkstra para determinar la ruta más corta entre las siguientes ciudades:

(a) Ciudades 1 y 8

(b) Ciudades 1 y 6

*__(c)__ Ciudades 4 y 8

(d) Ciudades 2 y 6

2. Utilice el algoritmo de Dijkstra para hallar la ruta más corta entre el nodo 1 y cualquier otro nodo en la red de la figura 6.18.

3. Utilice el algoritmo de Dijkstra para determinar la solución óptima de cada uno de los siguientes problemas:

(a) Problema 1, conjunto 6.3a.

(b) Problema 2, conjunto 6.3a.

(c) Problema 4, conjunto 6.3a.

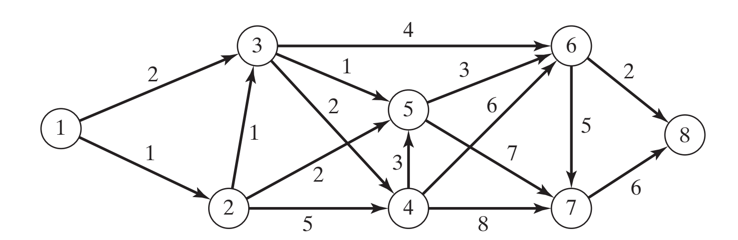


FIGURA 6.17

Red para el problema 1, conjunto 6.3b

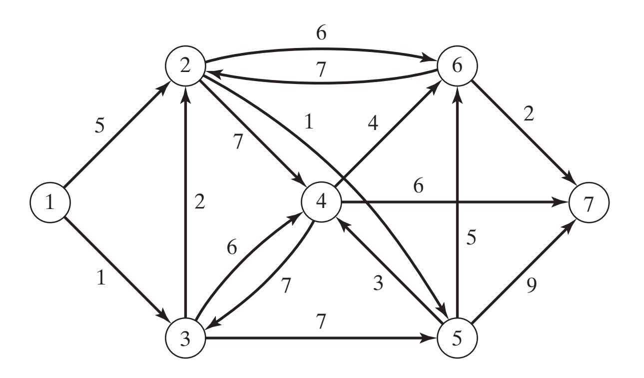


FIGURA 6.18

Red para el problema 2, conjunto 6.3b

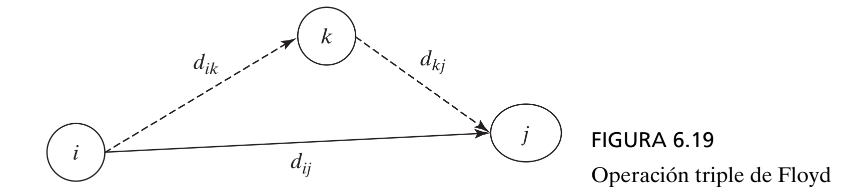


FIGURA 6.19
Operación triple de Floyd

Algoritmo de Floyd. Este algoritmo es más general que el Dijkstra porque determina la distancia entre dos nodos *cualesquiera* en la red. El algoritmo representa una red de n nodos como una matriz cuadrada con n filas y n columnas. La entrada (i,j) de la matriz da la distancia d_{ij} del nodo i al nodo j, la cual es finita si i está vinculado directamente a j, e infinita en caso contrario.

La idea del algoritmo de Floyd es simple. Dados tres nodos, i, j y k en la figura 6.19 con las distancias de conexión que se muestran en los tres arcos, es más corto llegar de j a i pasando por k si

$$d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$$

En este caso es óptimo reemplazar la ruta directa de $i \rightarrow j$ con la ruta indirecta $i \rightarrow k \rightarrow j$. Este intercambio de **operación triple** se aplica a la matriz de distancias por medio de los siguientes pasos:

Paso 0. Defina la matriz de la distancia de inicio D_0 y la matriz de secuencia de nodos S_0 (todos los elementos en las diagonales están bloqueados). Establezca $k = 1$.

$D_0 =$

	1	2	…	j	…	n
1	—	d_{12}	…	d_{ij}	…	d_{1n}
2	d_{21}	—	…	d_{2j}	…	d_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
I	d_{i1}	d_{i2}	…	d_{ij}	…	d_{in}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	D_{n1}	d_{n2}	…	d_{nj}	…	–

$S_0 =$

	1	2	…	j	…	n
1	—	2	…	j	…	n
2	1	—	…	j	…	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	1	2	…	j	…	n
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	1	2	…	j	…	—

Paso general k. Defina la fila k y la columna k como *fila pivote* y *columna pivote*. Aplique la *operación triple* a cada elemento d_{ij} en D_{k-1}, para todas las i y j. Si la condición

$$d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}, (i \neq k, j \neq k, \text{y } i \neq j)$$

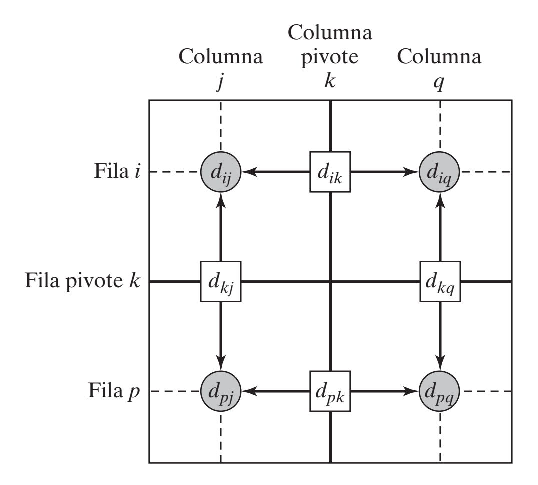


FIGURA 6.20
Implementación de la operación triple en forma de matriz

se satisface, realice los siguientes cambios:

a. Cree D_k reemplazando d_{ij} en D_{k-1} con $d_{ik} + d_{kj}$.

b. Cree S_k reemplazando s_{ij} en S_{k-1} con k. Establezca $k = k + 1$. Si $k = n + 1$, deténgase: de lo contrario repita el paso k.

El paso k del algoritmo puede explicarse representando D_{k-1} como se muestra en la figura 6.20. Aquí, la fila k y la columna k definen la fila y columna pivote actuales. La fila i representa cualquiera de las filas $1, 2, \ldots,$ y $k - 1$, y la fila p representa cualquiera de las filas $k + 1, k + 2, \ldots,$ y n. Asimismo, la columna j representa cualquiera de las columnas $1, 2, \ldots,$ y $k - 1$, y la columna q representa cualquiera de las columnas $k + 1, k + 2, \ldots,$ y n. La *operación triple* puede aplicarse como sigue: Si la suma de los elementos en la fila pivote y la columna (mostrados por cuadrados) es menor que el elemento de intersección asociado (mostrado por un círculo), entonces es óptimo reemplazar la distancia de intersección por la suma de las distancias pivote.

Después de n pasos, podemos determinar la ruta más corta entre los nodos i y j a partir de las matrices D_n y S_n aplicando las siguientes reglas:

1. d_{ij}, a partir de D_n, da la ruta más corta entre los nodos i y j.

2. A partir de S_n, determine el nodo intermedio $k = s_{ij}$ que da en resultado la ruta $i \rightarrow k \rightarrow j$. Si $s_{ik} = k$ y $s_{kj} = j$, deténgase; todos los nodos intermedios de la ruta han sido encontrados. De lo contrario, repita el procedimiento entre los nodos i y k y entre los nodos k y j.

Ejemplo 6.3-5

Para la red de la figura 6.21, halle las rutas más cortas entre cada dos nodos. Las distancias (en millas) se dan en los arcos. El arco (3,5) es direccional, es decir, no se permite el tráfico del nodo 5 al nodo 3. Todos los demás arcos permiten el tráfico en dos direcciones.

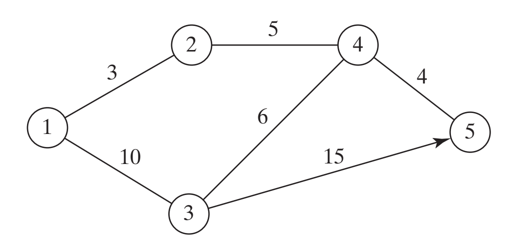


FIGURA 6.21
Red para el ejemplo 6.3-5

Iteración 0. Las matrices D_0 y S_0 dan la representación inicial de la red. D_0 es simétrica, excepto que $d_{53} = \infty$ porque no se permite tráfico del nodo 5 al nodo 3.

D_0

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	∞	5	∞
3	10	∞	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_0

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	3	4	5
3	1	2	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iteración 1. Establezca $k = 1$. La fila y columna pivotes se muestran por la primera fila y la primera columna ligeramente sombreadas en la matriz D_0. Las celdas más oscuras, d_{23} y d_{32}, son las únicas que la *operación triple* puede mejorar. Por lo tanto, D_1 y S_1 se obtienen desde D_0 y S_0 como sigue:

1. Reemplace d_{23} con $d_{21} + d_{13} = 3 + 10 = 13$ y establezca $s_{23} = 1$.

2. Reemplace d_{32} con $d_{31} + d_{12} = 10 + 3 = 13$ y establezca $s_{32} = 1$.

Estos cambios se muestran en negritas en las matrices D_1 y S_1.

D_1

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	∞	∞
2	3	—	**13**	5	∞
3	10	**13**	—	6	15
4	∞	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_1

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	4	5
2	1	—	**1**	4	5
3	1	**1**	—	4	5
4	1	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iteración 2. Establezca $k = 2$, como se muestra mediante la fila y columna ligeramente sombreada en D_1. La *operación triple* se aplica a las celdas más oscuras en D_1 y S_1. Los cambios resultantes se muestran en negritas en D_2 y S_2.

D_2

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	**8**	∞
2	3	—	13	5	∞
3	10	13	—	6	15
4	**8**	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_2

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	**2**	5
2	1	—	1	4	5
3	1	1	—	4	5
4	**2**	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iteración 3. Establezca $k = 3$, como se muestra por la fila y columna sombreadas en D_2. Las nuevas matrices son D_3 y S_3.

D_3

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	**25**
2	3	—	13	5	**28**
3	10	13	—	6	15
4	8	5	6	—	4
5	∞	∞	∞	4	—

S_3

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	**3**
2	1	—	1	4	**3**
3	1	1	—	4	5
4	2	2	3	—	5
5	1	2	3	4	—

Iteración 4. Establezca $k = 4$, como se muestra por la fila y columna sombreadas en D_3. Las nuevas matrices son D_4 y S_4.

D_4

	1	2	3	4	5
1	—	3	10	8	**12**
2	3	—	**11**	5	**9**
3	10	**11**	—	6	**10**
4	8	5	6	—	**4**
5	**12**	**9**	**10**	4	—

S_4

	1	2	3	4	5
1	—	2	3	2	**4**
2	1	—	**4**	4	**4**
3	1	**4**	—	4	**4**
4	2	2	3	—	5
5	**4**	**4**	**4**	4	—

Iteración 5. Establezca $k = 5$, como se muestra mediante la fila y columna sombreadas en D_4. No son posibles más mejoras en esta iteración.

Las matrices finales D_4 y S_4 contienen toda la información necesaria para determinar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera en la red. Por ejemplo, desde D_4, la distancia más corta del nodo 1 al nodo 5 es $d_{15} = 12$ millas. Para determinar la ruta asociada, recordemos que un segmento (i,j) representa un vínculo directo sólo si $s_{ij} = j$. De lo contrario, i y j están vinculados por al menos otro nodo intermedio. Como $s_{15} = 4 \neq 5$, la ruta inicialmente se da como $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$. Ahora, como $s_{14} = 2 \pi 4$, el segmento (1,4) no es un vínculo *directo*, y $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ reemplaza a $1 \rightarrow 4$, y la ruta $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ ahora se vuelve $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$. Luego, como $s_{12} = 2$, $s_{24} = 4$, y $s_{45} = 5$, no se requieren más "disecciones", y $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ define la ruta más corta.

Momento de TORA

Como en el algoritmo de Dijkstra, TORA puede usarse para generar las iteraciones de Floyd. En el menú SOLVE/MODIFY seleccione las opciones Solve problem ⇒ Iterations ⇒ Floyd's algorithm. El archivo *toraEx6.3-5.txt* proporciona los datos para el ejemplo 6.3-5.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3C

1. En el ejemplo 6.3-5, use el algoritmo de Floyd para determinar las rutas más cortas entre cada uno de los siguientes pares de nodos:

*__(a)__ Del nodo 5 al nodo 1.

(b) Del nodo 3 al nodo 5.

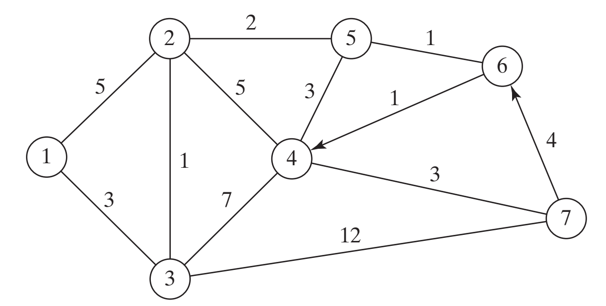


FIGURA 6.22
Red para el problema 2, conjunto 6.3c

(c) Del nodo 5 al nodo 3.
(d) Del nodo 5 al nodo 2.

2. Aplique el algoritmo de Floyd a la red de la figura 6.22. Los arcos (7,6) y (6,4) son unidireccionales, y todas las distancias están en millas. Determine la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:
(a) Del nodo 1 al nodo 7.
(b) Del nodo 7 al nodo 1.
(c) Del nodo 6 al nodo 7.

3. La compañía de telefonía celular Tell-All da servicio a seis áreas geográficas. Las distancias de satélite (en millas) entre las seis áreas se dan en la figura 6.23. Tell-All necesita determinar las rutas más eficientes para enviar los mensajes que deban establecerse entre cada dos áreas en la red.

***4.** Seis niños, Joe, Kay, Jim, Bob, Rae y Kim juegan una variante del juego infantil de *las escondidas*. Sólo algunos de los niños conocen el escondite de un niño. Luego un niño hace pareja con otro con el objetivo de encontrar el escondite del compañero. Esto puede lograrse mediante una cadena de otros niños que finalmente permitirá descubrir el escondite del niño designado. Por ejemplo, suponga que Joe tiene que encontrar a Kim y que Joe sabe dónde está escondido Jim, quien a su vez sabe dónde está escondido Kim. Por lo tanto, Joe puede encontrar a Kim si halla primero a Jim, quien a su vez conducirá a Joe al escondite de Kim. La siguiente lista proporciona los paraderos de los niños:

Joe conoce los escondites de Bob y Kim.
Kay conoce los escondites de Bob, Jim y Rae.
Jim y Bob conocen sólo el escondite de Kay.
Rae conoce el escondite de Kim.
Kim conoce los escondites de Joe y Bob.

Idee un plan para que cada niño encuentre a todos los demás niños utilizando el número mínimo de contactos. ¿Cuál es el número máximo de contactos?

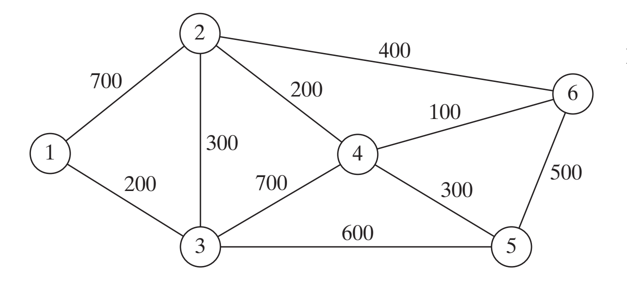


FIGURA 6.23
Red para el problema 3, conjunto 6.3c

6.3.3 Formulación de programación lineal del problema de la ruta más corta

Esta sección proporciona un modelo de PL para el problema de la ruta más corta. El modelo es general en el sentido de que puede utilizarse para determinar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera en la red. Al respecto, es equivalente al algoritmo de Floyd.

Deseamos determinar la ruta más corta entre cualquiera de dos nodos s y t en una red de n nodos. La PL asume que una unidad de flujo entra a la red por el nodo s y que sale por el nodo t.

Defina

$$x_{ij} = \text{cantidad de flujo en el arco } (i, j)$$
$$= \begin{cases} 1, \text{ si el arco } (i, j) \text{ está en la ruta más corta} \\ 0, \text{ de lo contrario} \end{cases}$$
$$c_{ij} = \text{longitud del arco } (i, j)$$

Por lo tanto, la función objetivo del programa lineal es

$$\text{Minimizar } z = \sum_{\substack{\text{todos los arcos} \\ \text{definidos } (i, j)}} c_{ij} x_{ij}$$

Las restricciones representan la **ecuación de la conservación del flujo** en cada nodo:

$$\text{Flujo de entrada total} = \text{Flujo de salida total}$$

Matemáticamente, esto se traduce así para el nodo j

$$\begin{pmatrix} \textit{Entrada} \text{ externa} \\ \text{al nodo } j \end{pmatrix} + \sum_{\substack{i \\ \text{todos los arcos} \\ \text{definidos } (i, j)}} x_{ij} = \begin{pmatrix} \textit{Salida} \text{ externa} \\ \text{del nodo } j \end{pmatrix} + \sum_{\substack{k \\ \text{todos los arcos} \\ \text{definidos } (j, k)}} x_{jk}$$

Ejemplo 6.3-6

En la red del ejemplo 6.3-4, supongamos que deseamos determinar la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2; es decir, $s = 1$ y $t = 2$. La figura 6.24 muestra cómo entra la unidad de flujo en el nodo 1 y sale en el nodo 2.

En la red podemos ver que la ecuación de la conservación del flujo da por resultado

Nodo 1: $1 = x_{12} + x_{13}$
Nodo 2: $x_{12} + x_{42} = x_{23} + 1$
Nodo 3: $x_{13} + x_{23} = x_{34} + x_{35}$
Nodo 4: $x_{34} = x_{42} + x_{45}$
Nodo 5: $x_{35} + x_{45} = 0$

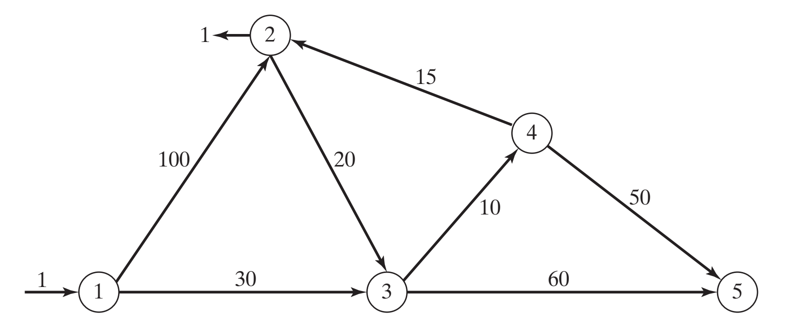


FIGURA 6.24
Inserción de un flujo unitario para determinar la ruta más corta entre el nodo $s = 1$ y el nodo $t = 2$

La PL completa se expresa como

	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{34}	x_{35}	x_{42}	x_{45}	
Minimizar $z =$	100	30	20	10	60	15	50	
Nodo 1	1	1						= 1
Nodo 2	−1		1			−1		= −1
Nodo 3		−1	−1	1	1			= 0
Nodo 4				−1		1	1	= 0
Nodo 5					−1		−1	= 0

Observe que la columna x_{ij} tiene exactamente un "1" en la fila i y un "−1" en la fila j, una propiedad típica de una PL de red.

La solución óptima (obtenida por TORA, archivo *toraEx6.3-6.txt*) es

$$z = 55, x_{13} = 1, x_{34} = 1, x_{42} = 1$$

Esta solución ofrece la ruta más corta del nodo 1 al nodo 2 como $1 \to 3 \to 4 \to 2$, y la distancia asociada es $z = 55$ (millas).

Comentarios. En la PL dada, la restricción del nodo 5 indica que $x_{15} = x_{45} = 0$. El tamaño de la PL puede reducirse si se eliminan las columnas x_{35} y x_{45} (lo cual elimina automáticamente la restricción del nodo 5).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3D

1. En el ejemplo 6.3-6, use programación lineal para determinar la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:

*__(a)__ Nodo 1 al nodo 5.

(b) Nodo 2 al nodo 5.

Momento de Solver

La figura 6.25 proporciona la hoja de cálculo Excel Solver para encontrar la ruta más corta entre el nodo N1 de *inicio* y el nodo N2 de *terminación* del ejemplo 6.3-6 (archivo *solverEx6.3.xls*). Los datos de entrada del modelo son la matriz de distancias en las celdas B3:E6. El nodo N1 no tiene ninguna columna porque no tiene arcos de entrada, y el nodo 5 no tiene ninguna fila porque no tiene arcos de salida. Una celda en blanco representa un segmento de ruta no existente (es decir, un arco de longitud infinita). (En breve veremos cómo se reconoce la presencia de celdas en blanco en las fórmulas de la hoja de cálculo.) Los nodos N1 y N2 se designan como nodos de *inicio* y *terminación* ingresando un 1 en F3 y B7, respectivamente. Estas designaciones pueden cambiarse como se desee. Por ejemplo, para determinar la ruta más corta del nodo N2 al nodo N4, ingrese 1 en F4 y D7.

Como se explica en la PL del ejemplo 6.3-6, las restricciones del problema tienen la forma general:

$$\text{(Flujo de salida neto)} - \text{(Flujo de entrada neto)} = 0$$

Esta definición se adapta al diseño de la hoja de cálculo al incorporar el flujo unitario externo directamente al *flujo de salida neto* y al *flujo de entrada neto* de la ecuación, es decir,

$$\left[\begin{pmatrix}\text{flujo de arcos de}\\ \textit{salida}\text{ de Ni a todos}\\ \text{los demás nodos}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{flujo de}\\ \textit{entrada}\text{ externo}\\ \text{a Ni}\end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix}\text{flujo de arcos de}\\ \textit{entrada}\text{ a Ni de todos}\\ \text{los demás nodos}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{flujo de}\\ \textit{salida}\text{ externo}\\ \text{de Ni}\end{pmatrix}\right]$$

En la hoja de cálculo, B3:E6 designa la matriz de *distancias de entrada*, B9:E12 designa las celdas de *solución*, F3:F6 designa el flujo unitario de *salida* (externo), y B7:E7 designa el flujo unitario de *entrada* (externo). Por lo tanto,

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Solver Shortest-Route Model (Example 6.3-6)							
2	distance	N2	N3	N4	N5		Range	Cells
3	N1	100	30			1	distance	B3:E6
4	N2		20				solution	B9:E12
5	N3			10	60		netFlow	H9:H13
6	N4	15			50		totalDist	G14
7		1						
8	solution	N2	N3	N4	N5	outFlow	inFlow	netFlow
9	N1	0	1	0	0	4.6E-12	0	4.6E-12
10	N2	0	0	0	0	0	5E-12	-5E-12
11	N3	0	0	1	0	1	1	0
12	N4	1	0	0	0	1	1	0
13	N5					0	0	0
14		5E-12	1	1	0	totalDist=	55	

Solver Parameters

Set Target Cell: totalDist

Equal To: Max Min

By Changing Cells:

solution

Subject to the Constraints:

netFlow = 0
solution >= 0

Cell	Formula	Copy to
B8	= B2	C8:E8
A9	= A3	A10:A12
F9	= SUMIF(B3:E3,">0",B9:E9)-F3	F10:F12
B14	= SUMIF(B3:B6,">0",B9:B12)-B7	C14:E14
G10	= OFFSET(A$14,0,ROW(A1))	G11:G13
H9	= F9-G9	H10:H13
G14	= SUMPRODUCT(distance,solution)	

FIGURA 6.25

Solución obtenida con Excel Solver de la ruta más corta entre los nodos 1 y 2 en el ejemplo 6.3-6 (archivo *solverEx6.3-6.xls*)

Ecuación del nodo N1: [SUM(B9:E9) − F3] − [0 − 0] = 0

Ecuación del nodo N2: [SUM(B10:E10) − F4] − [SUM(B9:B12) − B7] = 0

Ecuación del nodo N3: [SUM(B11:E11) − F5] − [SUM(C9:C12) − C7] = 0

Ecuación del nodo N4: [SUM(B12:E12) − F6] − [SUM(D9:D12) − D7] = 0

Ecuación del nodo N5: [0 − 0] − [SUM(E9:E12) − E7] = 0

La suposición de esta hoja de cálculo es que las celdas en blanco en la matriz de distancias B3:E6 representan rutas bloqueadas. Podemos utilizar SUMIF en lugar de SUM, para tener en cuenta de forma automática esta condición.[3] Las dos instrucciones siguientes muestran cómo se ingresan las fórmulas modificadas en la hoja de cálculo.

1. Ingrese = `SUMIF(B3:E3,">0",B9:E9)-F3` en la celda F9 y cópielo en las celdas F10:F12.
2. Ingrese = `SUMIF(B3:B6,">0",B9:B12)-B7` en la celda B14 y cópiela en las celdas C14:E14.

El resto de las fórmulas de la hoja de cálculo se ingresan como sigue:

1. Ingrese = `OFFSET(A$14,0,ROW(A1))` en la celda G10 y cópiela en las celdas G11:G13 para transponer el flujo de entrada a la columna G.
2. Ingrese 0 en G9 y F13 para indicar que N1 no tiene arcos de *entrada* ni flujo unitario de *salida* externo y que N5 no tiene arcos de *salida* o flujo de *entrada* unitario externo.
3. Ingrese = `F9-G9` en la celda H9 y cópiela en las celdas H10:H13 para calcular el flujo neto.
4. Para la función objetivo, ingrese en la celda G14 `=SUMPRODUCT(B3:E6,B9:E12)` o, de forma equivalente, `=SUMPRODUCT(distance,solution)`.

La hoja de cálculo ya está lista para la aplicación de Solver en la figura 6.25. Las celdas B9:E12 representan la solución del modelo. Si la celda (Ni,Nj) = 1, entonces el segmento (Ni,Nj) está en la ruta más corta. La pantalla de resultados en la figura 6.25 da la solución (N1 − N3 = 1, N3 − N4 = 1 y N4 − N2 = 1). La ruta óptima es $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, con una distancia total de 55 millas.[4]

Comentarios. En la mayoría de los libros de texto, los arcos explícitos (nodo *i*, nodo *j*, distancia) definen la red como un modelo incómodo de manejar, sobre todo cuando la cantidad de arcos es grande. Nuestro modelo está controlado por la matriz de distancias compacta (B3:E6) y sus flujos externos (E3:E6) y B7:E7). Se puede argumentar, sin embargo, que nuestro modelo podría manejar una cantidad mucho más grande de variables. Digamos que el ejemplo 6.3-6 tiene 7 arcos y por consiguiente 7 variables, en contraste con $4 \times 4 = 16$ variables en nuestra formulación. Tenga en cuenta que si se utiliza SUMIF, las restricciones del flujo son *exactamente las mismas* que en otras presentaciones. Esto quiere decir que las 9 variables adicionales aparecen sólo en la función objetivo y con coeficientes cero (entradas en blanco en B3:B6). En consecuencia, los *pre-resolvedores* en paquetes de software comerciales detectarán esta "peculiaridad" y de forma automática excluirán las variables adicionales de la función objetivo antes de resolver el problema, con lo que producirán el *mismo modelo* como en otras presentaciones.

---

[3]La idea es que la hoja de cálculo trata una celda en blanco como un valor cero. Si sucede que un problema tiene una distancia cero entre nodos, la distancia cero puede reemplazarse con un valor positivo muy pequeño.

[4]La solución del modelo presenta una curiosa ocurrencia. Si la restricción *netFlow* = 0 se reemplaza con *outFlow* = *inFlow* en el cuadro de diálogo **Solver Parameters**, Solver no determina una solución factible, incluso si se ajusta la *precisión* en el cuadro de diálogo **Solver Option**. (Para reproducir esta experiencia, las celdas de *solución* B9:E12 deben ser cero o estar vacías.) Aún más curioso, si las restricciones se reemplazan con *inFlow* = *outFlow*, se encuentra la solución óptima. No está claro por qué ocurre esta peculiaridad, pero el problema puede estar relacionado con error de redondeo.

Momento de AMPL

El archivo *amplEx6.3-6a.txt* proporciona el modelo para resolver el ejemplo 6.3-6. El modelo es general en el sentido de que puede usarse para determinar la ruta más corta entre dos nodos cualesquiera en un problema de cualquier tamaño. El modelo se explica en la sección C.9 en el sitio web.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.3E

1. Modifique el archivo *solverEx6.3-6.xls* para determinar la ruta más corta entre los siguientes pares de nodos:
   (a) Nodo 1 a nodo 5.
   (b) Nodo 4 a nodo 3.

2. Adapte el archivo *amplEx6.3-6b.txt* para el problema 2, conjunto 6.3a, para hallar la ruta más corta entre el nodo 1 y el nodo 7. Los datos de entrada deben ser las probabilidades puras. Use las funciones de programación para imprimir y visualizar en pantalla la ruta de transmisión óptima y su probabilidad de éxito.

6.4 MODELO DE FLUJO MÁXIMO

Considere una red de oleoductos que transporta petróleo crudo desde pozos hasta refinerías. Se instalan estaciones intermedias de reforzamiento y bombeo a distancias apropiadas para mover el crudo en la red. Cada segmento de tubería tiene una velocidad de descarga finita (o capacidad) de flujo de crudo. Un segmento de tubería puede ser unidireccional o bidireccional, según su diseño. La figura 6.26 muestra una red de oleoductos típica. El objetivo es determinar la capacidad de flujo máxima de la red.

La solución del problema propuesto requiere agregar una sola fuente y un solo sumidero o vertedero, utilizando arcos de capacidad infinita unidireccionales, como se muestra mediante los arcos de rayas en la figura 6.26.

Para el arco (i,j), la notación $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$ proporciona las capacidades de flujo en las dos direcciones $i \to j$ y $j \to i$. Para eliminar la ambigüedad, colocamos a $\overline{C}_{ij}$ junto al nodo i y a $\overline{C}_{ji}$ junto al nodo j, como se muestra en la figura 6.27.

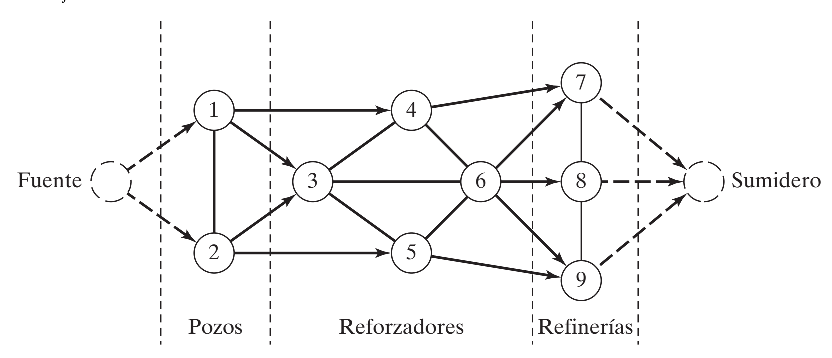


FIGURA 6.26

Red capacitada que conecta los pozos y las refinerías por medio de estaciones reforzadoras

6.4.1 Enumeración de cortes

Un corte define un conjunto de arcos cuya eliminación de la red interrumpe el flujo entre los nodos fuente y sumidero. La **capacidad de corte** es igual a la suma de las capacidades de su conjunto de arcos. Entre *todos* los cortes posibles en la red, el corte con la *capacidad mínima* es el cuello de botella que determina el flujo máximo en la red.

Ejemplo 6.4-1

Considere la red de la figura 6.28. Las capacidades bidireccionales se muestran en los arcos respectivos por medio de la convención utilizada en la figura 6.27. Por ejemplo, el límite de flujo para el arco (3,4) es de 10 unidades de 3 a 4, y de 5 unidades de 4 a 3.

La figura 6.28 ilustra tres cortes con las siguientes capacidades:

Corte	Arcos asociados	Capacidad
1	(1, 2), (1, 3), (1, 4)	20 + 30 + 10 = 60
2	(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 5)	30 + 10 + 40 + 30 = 110
3	(2, 5), (3, 5), (4, 5)	30 + 20 + 20 = 70

La única información de los tres cortes es que el flujo máximo en la red no puede exceder de 60 unidades. Para determinar el flujo máximo es necesario enumerar *todos* los cortes, una tarea difícil para la red general. Por lo tanto, la necesidad de un algoritmo eficiente es imperativa.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.4A

***1.** Para la red de la figura 6.28, determine dos cortes más y encuentre sus capacidades.

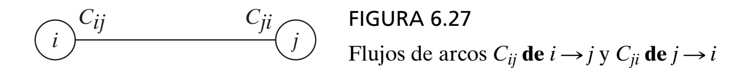


FIGURA 6.27

Flujos de arcos C_{ij} **de** $i \rightarrow j$ y C_{ji} **de** $j \rightarrow i$

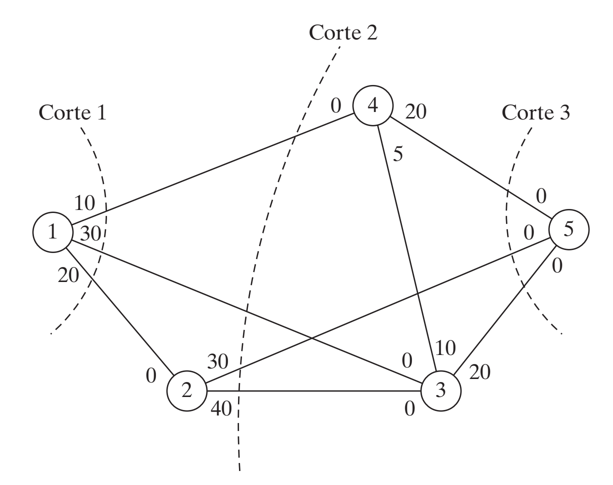


FIGURA 6.28

Ejemplos de cortes en redes de flujo

6.4.2 Algoritmo de flujo máximo

Este algoritmo se basa en el hallazgo de **rutas de avance** con flujo *positivo* entre los nodos fuente y sumidero. Cada ruta destina una parte de o todas las capacidades de sus arcos al flujo total en la red.

Considere el arco (i, j) con las capacidades bidireccionales (de diseño) $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$. Como algunas partes de estas capacidades se destinan al flujo en el arco, los **residuos** (capacidades no utilizadas, o flujo remanente) del arco se actualizan. Utilizamos la notación (c_{ij}, c_{ji}) para representar los residuos.

Para un nodo j que recibe flujo del nodo i, anexamos la etiqueta $[a_j,i]$ donde a_j es el flujo del nodo i al nodo j.

Paso 1. Para todos los arcos, iguale la capacidad residual a la capacidad de diseño, esto es $(c_{ij}, c_{ji}) = (\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$. Sea $a_1 = \infty$, y etiquete el nodo fuente con $[\infty, -]$. Designe $i = 1$, y continúe con el paso 2.

Paso 2. Determine S_i, el conjunto de nodos no etiquetados j al que se puede llegar directamente desde i por medio de arcos con residuos *positivos* (es decir, $c_{ij} > 0$ para todas las $j \in S_i$). Si $S_i \neq \emptyset$, continúe con el paso 3. De lo contrario, una ruta parcial termina en el nodo i. Continúe con el paso 4.

Paso 3. Determine $k \in S_i$ de modo que

$$c_{ik} = \max_{j \varepsilon S_i}\{c_{ij}\}$$

Designe $a_k = c_{ik}$ y etiquete el nodo k con $[a_k, i]$. Si $k = n$, el nodo sumidero ha sido etiquetado, y se ha encontrado una *ruta de avance*, continúe con el paso 5. De lo contrario, designe $i = k$, y vaya al paso 2.

Paso 4. **(Retroceso)**. Si $i = 1$, no es posible avanzar; continúe con el paso 6. De lo contrario, sea r el nodo (en la ruta parcial) que se etiquetó *inmediatamente* antes del nodo actual i, y elimine i del conjunto de nodos adyacentes a r. Designe $i = r$, y regrese al paso 2.

Paso 5. **(Determinación de los residuos)**. Defina los nodos de la ruta de avance p-ésima del nodo 1 al nodo n como $N_p = (1, k_1, k_2, \ldots, n)$. Entonces el flujo máximo a lo largo de la ruta se calcula como

$$f_p = \min\{a_1, a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_n\}$$

La capacidad residual de cada arco a lo largo de la ruta de avance se reduce en f_p en la dirección del flujo, y se *incrementa* en f_p en la dirección inversa; es decir, para los nodos i y j en la ruta, el flujo residual cambia del actual (c_{ij}, c_{ji}) a

(a) $(c_{ij} - f_p, c_{ji} + f_p)$ si el flujo es de i a j

(b) $(c_{ij} + f_p, c_n + f_p)$ si el flujo es de j a i

Restaure los nodos que se eliminaron en el paso 4. Designe $i = 1$, y regrese al paso 2.

Paso 6. **(Solución).**

(a) Dado que se determinaron m rutas de avance, el flujo máximo en la red es

$$F = f_1 + f_2 + \cdots + f_m$$

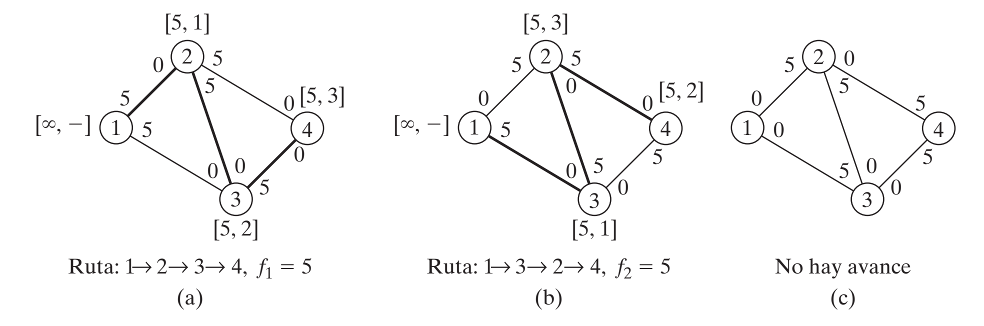


FIGURA 6.29
Uso de los residuos para calcular el flujo máximo

(b) Utilizando las *capacidades de diseño* (iniciales) y los *residuos* finales del arco (i,j), $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$, y (c_{ij}, c_{ji}), respectivamente, el flujo óptimo en el arco (i,j) se determina calculando $(\alpha, \beta) = (\overline{C}_{ij} - c_{ij}, \overline{C}_{ji} - c_{ji})$. Si $\alpha > 0$, el flujo óptimo de i a j es α. Por otra parte, si $\beta > 0$, el flujo óptimo de j a i es β. (Es imposible que α y β sean positivos al mismo tiempo.)

El proceso de retroceso del paso 4 se invoca cuando el algoritmo termina en un nodo intermedio. El ajuste del flujo en el paso 5 puede explicarse mediante la red de flujo simple de la figura 6.29. La red (a) proporciona la primera ruta de avance $N_1[1, 2, 3, 4]$ con su flujo máximo $f_1 = 5$. Por lo tanto, los residuos de cada uno de los arcos (1, 2), (2, 3) y (3, 4) cambian de (5, 0) a (0, 5), de acuerdo con el paso 5. La red (b) da ahora la segunda ruta de avance $N_2 = [1, 2, 3, 4]$ con $f_2 = 5$. Después de hacer los ajustes del flujo necesarios, obtenemos la red (c), donde ya no son posibles más rutas de avance. Lo que sucedió en la transición de (b) a (c) no fue sino una cancelación del flujo previamente comprometido en la dirección $2 \rightarrow 3$, y en esencia ello permite el flujo sólo en las rutas $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ y $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ (flujo máximo $= 5 + 5 = 10$.). El algoritmo "recuerda" que un flujo de 2 a 3 se comprometió previamente debido a un ajuste anterior de la capacidad en la dirección inversa (de acuerdo con el paso 5.)

Ejemplo 6.4-2

Determine el flujo máximo en la red del ejemplo 6.4-1 (figura 6.28). La figura 6.30 proporciona un resumen gráfico de las iteraciones del algoritmo. Verá que es útil comparar la descripción de las iteraciones con el resumen gráfico.

Iteración 1. Iguale los residuos iniciales (c_{ij}, c_{ji}) a las capacidades iniciales $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$.

Paso 1. Establezca $a_1 = \infty$ y etiquete el nodo 1 con $[\infty, -]$. Establezca $i = 1$.

Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$ $(\neq \emptyset)$.

Paso 3. $k = 3$, porque $c_{13} = máx\ [c_{12}, c_{13}, c_{14}] = \text{máx}\ [20, 30, 10]$. Establezca $a_3 = c_{13} = 30$ y etiquete el nodo 3 con [30,1]. Establezca $i = 3$ y repita el paso 2.

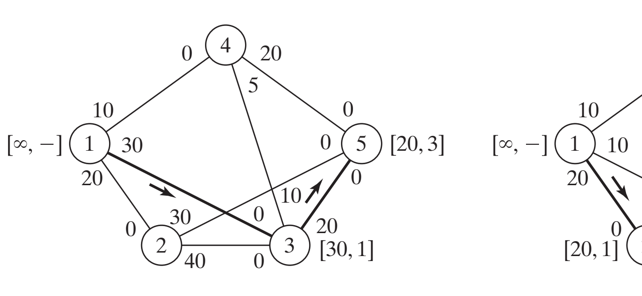
Paso 2. $S_3 = (4, 5)$.

Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{35} = máx\,[10, 20] = 20$. Etiquete el nodo 5 con [20, 3]. Se logra el avance. Continúe con el paso 5.

Paso 5. La ruta de avance se determina a partir de las etiquetas iniciando en el nodo 5 y regresando al nodo 1; es decir (**5**) → [20, **3**] → (**3**) → [30, **1**] → (**1**). De este modo, $N_1 = [1, 3, 5]$ y $f_1 = mín\{a_1, a_3, a_5\} = \{\infty, 30, 20\} = 20$. Las capacidades residuales a lo largo de la ruta N_1 son

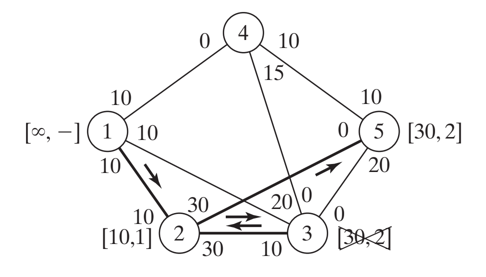
$$(c_{13}, c_{31}) = (30 - 20, 0 + 20) = (10, 20)$$

$$(c_{35}, c_{53}) = (20 - 20, 0 + 20) = (0, 20)$$

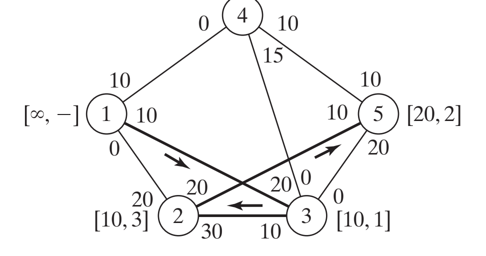


(Iteración 1) $f_1 = 20$

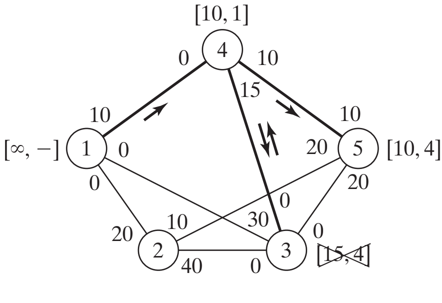
(Iteración 2) $f_2 = 10$



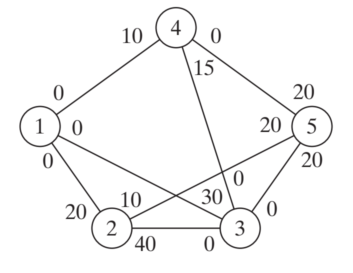
(Iteración 3) $f_3 = 10$



(Iteración 4) $f_4 = 10$



(Iteración 5) $f_5 = 10$



(Iteración 6) No hay ruta de avance

FIGURA 6.30

Iteraciones del algoritmo de flujo máximo del ejemplo 6.4-2

Iteración 2.

Paso 1. Establezca $a_1 = \infty$, y etiquete el nodo 1 con $[\infty, -]$. Establezca $i = 1$.
Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$.
Paso 3. $k = 2$ y $a_2 = c_{12} = máx \{20,10,10\}$. Establezca $i = 2$, y repita el paso 2.
Paso 2. $S_2 = \{3,5\}$.
Paso 3. $k = 3$ y $a_3 = c_{23} = 40$. Etiquete el nodo 3 con [40,2]. Designe $i = 3$ y repita el paso 2.
Paso 2. $S_3 = \{4\}$ (observe que $c_{35} = 0$, de ahí que el nodo 5 no pueda incluirse en S_3).
Paso 3. $k = 4$ y $a_4 = c_{34} = 10$. Etiquete el nodo 4 con [10,3]. Establezca $i = 4$, y repita el paso 2.
Paso 2. $S_4 = \{5\}$ (observe que los nodos 1 y 3 ya están etiquetados, por lo tanto, no pueden incluirse en S_4).
Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{45} = 20$. Etiquete el nodo 5 con [20,4]. Se logró una ruta de avance. Vaya al paso 5.
Paso 5. $N_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $f_2 = \text{mín}\{\infty, 20, 40,10,20\} = 10$. Los residuos a lo largo de la ruta de N_2 son

$$(c_{12}, c_{21}) = (20 - 10,\ 0 + 10) = (10,10)$$

$$(c_{23}, c_{32}) = (40 - 10,\ 0 + 10) = (30,10)$$

$$(c_{34}, c_{43}) = (10 - 10, 5 + 10) = (0,15)$$

$$(c_{45}, c_{54}) = (20 - 10, 0 + 10) = (10, 10)$$

Iteración 3.

Paso 1. Establezca $a_1 = \infty$, y etiquete el nodo 1 con $[\infty, -]$. Establezca $i = 1$.
Paso 2. $S_1 = \{2, 3, 4\}$.
Paso 3. $k = 2$ y $a_2 = c_{12} = máx \{10,10,10\}$. (Aunque los empates se rompen arbitrariamente, TORA siempre selecciona el nodo empatado con el índice menor. Utilizaremos esta convención a lo largo del ejemplo.) Etiquete el nodo 2 con [10,1]. Haga $i = 2$, y repita el paso 2.
Paso 2. $S_2 = \{3,5\}$.
Paso 3. $k = 3$ y $a_3 = c_{23} = 30$. Etiquete el nodo 3 con [30,2]. Establezca $i = 3$, y repita el paso 2.
Paso 2. $S_3 = \varnothing$ (porque $c_{34} = c_{35} = 0$). Vaya al paso 4 para retroceder
Paso 4. *Retroceso.* La etiqueta [30,2] en el nodo 3 da el nodo inmediatamente anterior $r = 2$. Elimine el nodo 3 tachándolo para ya no considerarlo *en esta iteración*. Establezca $i = r = 2$, y repita el paso 2.
Paso 2. $S_2 = \{5\}$ (observe que el nodo 3 se eliminó en el paso de retroceso).
Paso 3. $k = 5$ y $a_5 = c_{25} = 30$. Etiquete el nodo 5 con [30,2]. Se logró una ruta de avance. Vaya al paso 5.
Paso 5. $N_2 = \{1, 2,5\}$ y $c_5 = \text{mín}\{\infty,10,30\} = 10$. Los residuos a lo largo de la ruta de N_3 son

$$(c_{12},\ c_{21}) = (10 - 10,10 + 10) = (0, 20)$$

$$(c_{25},\ c_{52}) = (30 - 10, 0 + 10) = (20,10)$$

Iteración 4.

Esta iteración da $N_4 = \{1,3,2,5\}$ con $f_4 = 10$ (¡compruébelo!).

Iteración 5.

Esta iteración da por resultado $N_5 = \{1,4,5\}$ con $f_5 = 10$ (¡compruébelo!).

Iteración 6.

Todos los arcos que parten del nodo 1 tienen residuos cero. Por lo tanto, no son posibles más rutas de avance. Procedemos al paso 6 para determinar la solución.

Paso 6. El flujo máximo en la red es $F = f_1 + f_2 + \ldots + f_5 = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$ unidades. El flujo en los arcos individuales se calcula restando los últimos residuos (c_{ij}, c_{ji}) en la iteración 6 de las capacidades de diseño $(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji})$, como lo muestra la siguiente tabla.

Arco	$(\overline{C}_{ij}, \overline{C}_{ji}) - (c_{ij}, c_{ji})_6$	Cantidad de flujo	Dirección
(1, 2)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$1 \rightarrow 2$
(1, 3)	$(30, 0) - (0, 30) = (30, -30)$	30	$1 \rightarrow 3$
(1, 4)	$(10, 0) - (0, 10) = (10, -10)$	10	$1 \rightarrow 4$
(2, 3)	$(40, 0) - (40, 0) = (0, 0)$	0	—
(2, 5)	$(30, 0) - (10, 20) = (20, -20)$	20	$2 \rightarrow 5$
(3, 4)	$(10, 5) - (0, 15) = (10, -10)$	10	$3 \rightarrow 4$
(3, 5)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$3 \rightarrow 5$
(4, 3)	$(5, 10) - (15, 0) = (-10, 10)$	0	—
(4, 5)	$(20, 0) - (0, 20) = (20, -20)$	20	$4 \rightarrow 5$

Momento de TORA

Podemos utilizar TORA para resolver el modelo de flujo máximo en un modo automático una iteración a la vez. Seleccione el menú SOLVE/MODIFY y la opción Solve Problem. Después de especificar el formato de salida, vaya a la pantalla de resultados y seleccione la opción Maximum Flows o Iterations. El archivo *toraEx6.4-2.txt* contiene los datos para el ejemplo 6.4-2.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.4B

***1.** En el ejemplo 6.4-2.
- **(a)** Determine las capacidades excedentes para todos los arcos.
- **(b)** Determine la cantidad de flujo a través de los nodos 2, 3, y 4.
- **(c)** ¿Puede incrementarse el flujo a través de la red si se aumentan las capacidades en las direcciones $3 \rightarrow 5$ y $4 \rightarrow 5$?

2. Determine el flujo máximo y el flujo óptimo en cada arco para la red de la figura 6.31.

3. Tres refinerías envían un producto de gasolina a dos terminales de distribución a través de una red de oleoductos. Cualquier demanda que no puede ser satisfecha por medio de

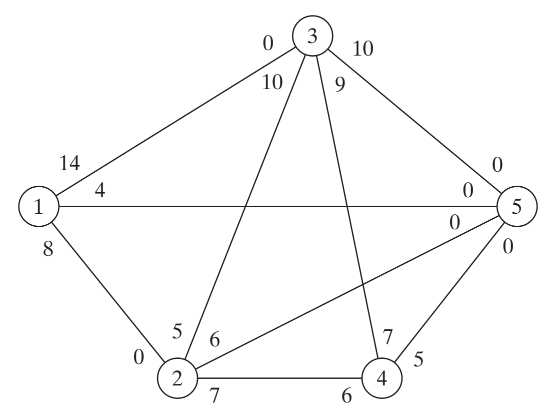


FIGURA 6.31
Red para el problema 2, conjunto 6.4b

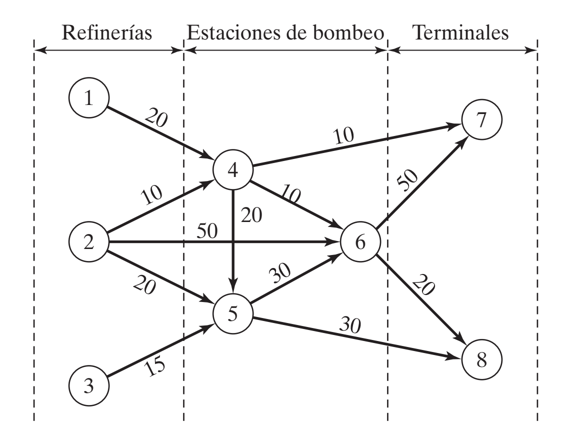


FIGURA 6.32
Red para el problema 3, conjunto 6.4b

la red se adquiere de otras fuentes. Tres estaciones de bombeo le dan servicio a la red, como se muestra en la figura 6.32. El producto fluye en la red en la dirección indicada por las flechas. La capacidad de cada segmento de ducto (mostrada directamente en los arcos) está en millones de barriles por día. Determine lo siguiente:

(a) La producción diaria en cada refinería que iguala la capacidad máxima de la red.

(b) La demanda diaria en cada terminal que iguala la capacidad máxima de la red.

(c) La capacidad diaria de cada bomba que iguala la capacidad máxima de la red.

4. Suponga que la capacidad diaria máxima de la bomba 6 en la red de la figura 6.33 está limitada a 50 millones de barriles por día. Remodele la red para incluir esta restricción. Luego determine la capacidad máxima de la red.

5. Se transporta alimento para gallinas por medio de camiones desde tres silos hasta cuatro granjas. Algunos de los silos no pueden mandar los envíos directamente a algunas de las granjas. Las capacidades de las demás rutas están limitadas por la cantidad de camiones

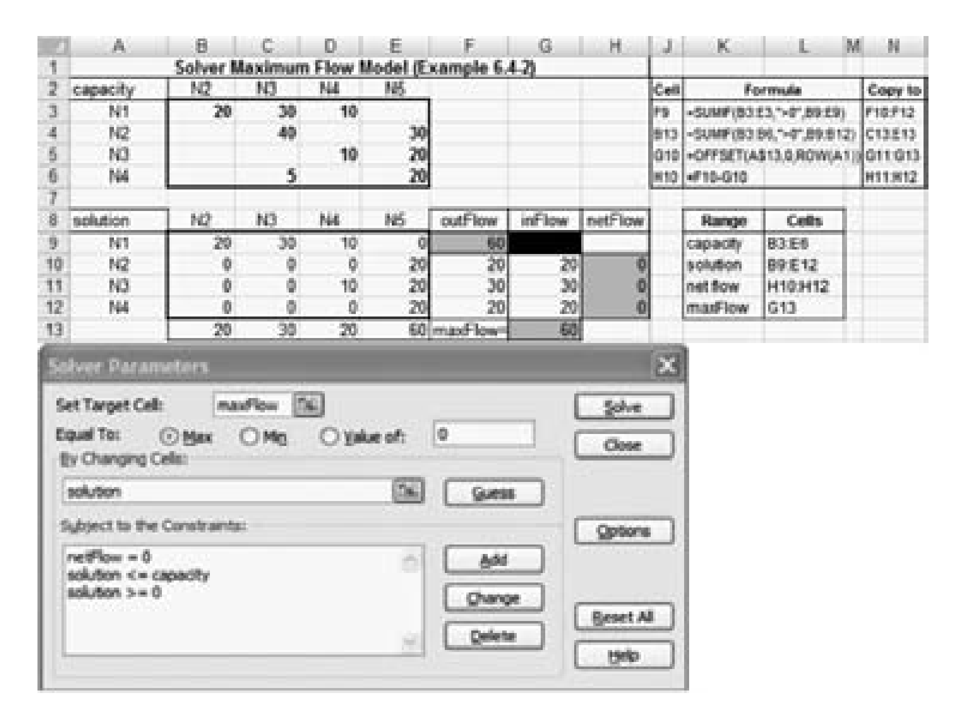


FIGURA 6.33

Solución obtenida con Excel Solver del modelo de flujo máximo del ejemplo 6.4-2 (archivo *solverEx4.2.xls*)

disponibles y el número de viajes realizados diariamente. La siguiente tabla muestra las cantidades diarias de abasto en los silos y la demanda en las granjas (en miles de libras). Las entradas en las celdas de la tabla especifican las capacidades diarias de las rutas asociadas.

		Granja				
		1	2	3	4	
	1	30	5	0	40	**20**
Silo	2	0	0	5	90	**20**
	3	100	40	30	40	**200**
		200	**10**	**60**	**20**	

(a) Determine el programa que satisface la demanda máxima.

(b) ¿Satisfará el programa propuesto toda la demanda de la granja?

6. En el problema 5, suponga que se permite el transbordo entre los silos 1 y 2 y los silos 2 y 3. Suponga además que se permite el transbordo entre las granjas 1 y 2, 2 y 3, y 3 y 4. La capacidad diaria en dos direcciones máxima en las rutas de transbordo propuestas es de 50 (mil) lb. ¿Cuál es el efecto del transbordo en las demandas no satisfechas en las granjas?

***7.** Un padre tiene cinco hijos (adolescentes) y cinco tareas domésticas que encomendarles. La experiencia pasada ha demostrado que obligar a un hijo a que realice una tarea es contraproducente. Con esto en mente, el padre les pide a sus hijos que enumeren sus preferencias entre las cinco tareas, como lo muestra la siguiente tabla:

Hijo	Tarea preferida
Rif	3, 4 o 5
Mai	1
Ben	1 o 2
Kim	1, 2 o 5
Ken	2

El objetivo del padre ahora es terminar la mayor parte posible de tareas, al tiempo que respeta las preferencias de sus hijos.

8. Cuatro fábricas producen cuatro tipos de juguetes. La siguiente tabla da una lista de los juguetes que cada fábrica puede producir.

Fábrica	Combinación de producciones de juguetes
1	1, 2, 3
2	2, 3
3	1, 4
4	3, 4

Todos los juguetes requieren de alguna manera la misma mano de obra y material por unidad. Las capacidades diarias de las cuatro fábricas son de 250, 180, 300 y 100 juguetes, respectivamente. Las demandas diarias de los cuatro juguetes son 200, 150, 350 y 100 unidades, respectivamente. Determine los programas de producción de las fábricas que más satisfarán las demandas de los cuatro juguetes.

9. El consejo académico en la Universidad de Arkansas está buscando representantes entre seis estudiantes que estén afiliados a sociedades honoríficas. La representación ante el consejo académico incluye tres áreas: matemáticas, arte e ingeniería. Cuando mucho dos estudiantes de cada área pueden estar en el consejo. La siguiente tabla muestra la membresía de los seis estudiantes en las cuatro sociedades honoríficas:

Sociedad	Estudiantes afiliados
1	1, 2, 3
2	1, 3, 5
3	3, 4, 5
4	1, 2, 4, 6

Los estudiantes calificados en las áreas de matemáticas, arte e ingeniería se muestran en la siguiente tabla:

Área	Estudiantes calificados
Matemáticas	1, 2, 4
Arte	3, 4
Ingeniería	4, 5, 6

Un estudiante capacitado en más de un área debe ser asignado exclusivamente a sólo un área. ¿Pueden estar representadas las cuatro sociedades honoríficas en el consejo?

10. *Flujo máximo/mínimo en redes con límites inferiores.* El algoritmo de flujo máximo dado en esta sección asume que todos los arcos tienen límites inferiores de cero. En algunos modelos los límites inferiores pueden ser estrictamente positivos, y podemos estar interesados en determinar el flujo máximo o mínimo en la red (vea el caso 6-3 en el apéndice E). La presencia del límite inferior plantea una dificultad porque puede que la red no tenga un flujo factible en absoluto. El objetivo de este ejercicio es demostrar que cualquier modelo de flujo máximo o mínimo con límites inferiores positivos puede ser resuelto siguiendo dos pasos.

Paso 1. Determine una solución factible para la red con límites inferiores positivos.

Paso 2. Con la solución factible del paso 1, determine el flujo máximo o mínimo en la red original.

(a) Demuestre que un arco (i,j) con flujo limitado por $l_{ij} \leq x_{ij}\ u_{ij}$ puede estar representado de forma equivalente por un *sumidero* con demanda mínima l_{ij} en el nodo i y una *fuente* con abasto l_{ij} en el nodo j con flujo limitado por $0 \leq u_{ij} - l_{ij}$.

(b) Demuestre que hallar una solución factible para la red original equivale a determinar el flujo máximo x'_{ij} en la red después de (1) modificar los límites en x_{ij} a $0 \leq x'_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij}$, (2) "concentrar" todas las fuentes resultantes en una súper fuente con capacidades de arco salientes l_{ij}; (3) "concentrar" todos los sumideros resultantes en un súper sumidero con capacidades de arco entrantes l_{ij}, y (4) conectar el nodo terminal t al nodo fuente s en la red original mediante un arco de capacidad infinita de retorno. Existe una solución factible si el flujo máximo en la nueva red es igual a la suma de los límites inferiores en la red original. Aplique el procedimiento a la siguiente red y encuentre una solución de flujo factible:

Arco (i, j)	(l_{ij}, u_{ij})
(1, 2)	(5, 20)
(1, 3)	(0, 15)
(2, 3)	(4, 10)
(2, 4)	(3, 15)
(3, 4)	(0, 20)

(c) Use la solución factible de la red en (b) junto con el algoritmo de flujo máximo para determinar el flujo *mínimo* en la red original. (*Sugerencia:* Primero calcule la red residuo dada la solución factible inicial. Luego determine el flujo máximo *del nodo final al nodo inicial.* Esto equivale a determinar el flujo máximo que se debe cancelar del nodo inicial al nodo final. Ahora, combinando las soluciones factible y de flujo máximo se obtiene el flujo mínimo en la red original.)

(d) Use la solución factible de la red en (b) junto con el modelo de *flujo máximo* para determinar el flujo máximo en la red original. (*Sugerencia:* Como en (c), inicie con la red residuo. Luego aplique el algoritmo de avance a la red residuo resultante, exactamente como en el modelo de flujo máximo regular.)

6.4.3 Formulación de programación lineal en el modo de flujo máximo

Defina x_{ij} como la cantidad de flujo en el arco (i,j) con capacidad C_{ij}. El objetivo es determinar x_{ij} para toda i y j que maximice el flujo entre el nodo de inicio s y el nodo terminal t sujeto a restricciones de flujo (flujo de entrada = flujo de salida) en todos excepto en los nodos s y t.

Ejemplo 6.4-3

En el modelo de flujo máximo de la figura 6.30 (ejemplo 6.4-2), $s = 1$ y $t = 5$. La siguiente tabla resume la PL asociada con dos funciones objetivo diferentes, pero equivalentes, según si maximizamos la salida del modo de inicio 1 ($= z_1$) o la entrada al nodo terminal 5 ($= z_2$).

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{43}	x_{45}	
Maximizar $z_1 =$	1	1	1							
Maximizar $z_2 =$					1		1		1	
Nodo 2	1			− 1	− 1					= 0
Nodo 3		1		1		− 1	− 1	1		= 0
Nodo 4			1			1		− 1	− 1	= 0
Capacidad	20	30	10	40	30	10	20	5	20	

La solución óptima utilizando una u otra función objetiva es

$$x_{12} = 20, x_{13} = 30, x_{14} = 10, x_{25} = 20, x_{34} = 10, x_{35} = 20, x_{45} = 20$$

El flujo máximo asociado es $z_1 = z_2 = 60$.

Momento de Solver

La figura 6.33 proporciona el modelo de flujo máximo del ejemplo 6.4-2 (archivo *solverEx6.4-2.xls*). La idea general es parecida a la del modelo de la ruta más corta, que se detalla siguiendo el ejemplo 6.3-6. Las diferencias principales incluyen las siguientes: (1) no hay ecuaciones de flujo para el nodo inicial 1 y el nodo final 5, y (2) el objetivo es maximizar el flujo de salida total en el nodo inicial 1 (F9) o, de forma equivalente, el flujo de entrada total en el nodo terminal 5 (G13). El archivo *solverEx6.4-2* utiliza *G*13 como celda objetivo. Trate de ejecutar el modelo con G13 reemplazando a F9.

Momento de AMPL

El archivo *amplEx6.4-2.txt* proporciona el modelo para el problema de flujo máximo entre cualquiera de los dos nodos en la red del ejemplo 6.4-2. El modelo se aplica a cualquier cantidad de nodos. La explicación del modelo se detalla en la sección C.9 en el sitio web.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.4C

1. Modele cada uno de los siguientes problemas como un programa lineal, luego resuélvalo utilizando Solver o AMPL.
  - **(a)** Problema 2, conjunto 6.4b.
  - **(b)** Problema 5, conjunto 6.4b.
  - **(c)** Problema 9, conjunto 6.4b.

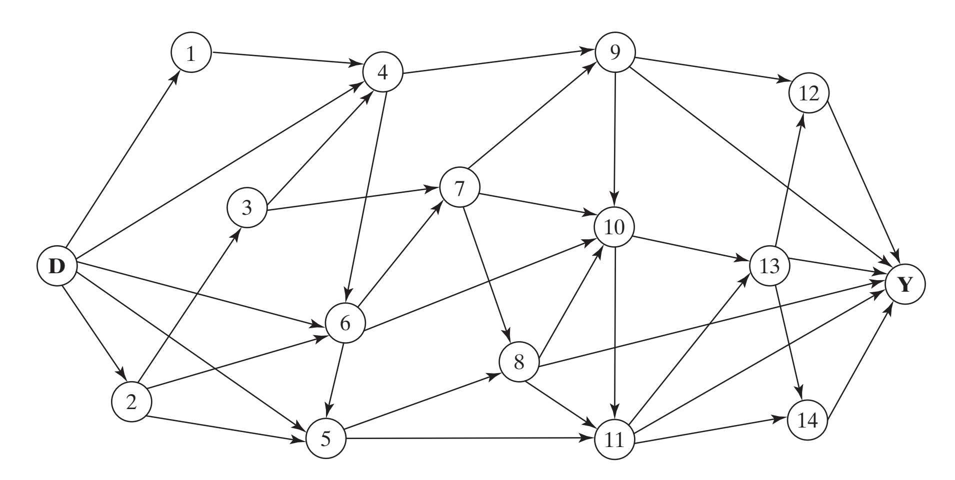
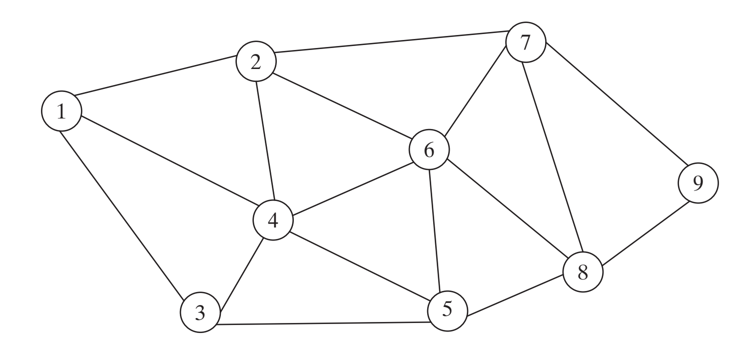


FIGURA 6.34
Red para el problema 2, conjunto 6.4c

2. Jim vive en Denver, Colorado, y le gustar pasar sus vacaciones anuales en el Parque Nacional de Yellowstone en Wyoming. Por ser un amante de la naturaleza, Jim toma una ruta escénica diferente cada año. Después de consultar los mapas apropiados, Jim representó sus rutas preferidas entre Denver (D) y Yellowstone (Y) por medio de la red de la figura 6.34. Los nodos 1 a 14 representan ciudades intermedias. Aunque la distancia de manejo no es un factor, la estipulación de Jim es que las rutas seleccionadas entre D y Y no incluyan ciudades comunes. Determine (por medio de AMPL o Solver) todas las rutas distintas disponibles para Jim. (*Sugerencia:* Modifique el modelo de programación lineal de flujo máximo para determinar el máximo de rutas únicas entre D y Y.)
3. (Guéret and Associates, 2002, sección 12.1) En la figura 6.35 se aparece un sistema de telecomunicación militar que conecta 9 sitios . Los sitios 4 y 7 deben continuar comunicándo-

FIGURA 6.35
Red para el problema 3, conjunto 6.4c



se incluso si otros tres sitios son destruidos por acciones enemigas. ¿Satisface este requisito la red de comunicaciones actual? Utilice AMPL y Solver para resolver el problema.

6.5 CPM Y PERT

El método de la ruta crítica (CPM, por sus siglas en inglés) y la técnica de evaluación y revisión de programas (PERT, por sus siglas en inglés) son métodos basados en redes diseñados para ayudar a planificar, programar y controlar proyectos. Un proyecto se define como un conjunto de actividades interrelacionadas donde cada actividad consume tiempo y recursos. El objetivo de CPM y PERT es idear herramientas analíticas para programar las actividades. La figura 6.36 resume los pasos de las técnicas. Primero definimos las actividades del proyecto, sus relaciones de precedencia y sus requerimientos de tiempo. Luego se modelan las relaciones de precedencia entre las actividades como una red. El tercer paso implica cálculos específicos para desarrollar el cronograma. Durante la fase de ejecución real, es posible que la ejecución de las actividades no discurra como se planeó, en el sentido de que algunas de las actividades pueden ser despachadas o demoradas. Cuando esto sucede, el programa se actualiza para reflejar las realidades en el terreno. Ésta es la razón por la que se incluye un bucle de retroalimentación en la figura 6.36.

Las dos técnicas, CPM y PERT, se desarrollaron de forma independiente. Difieren en que CPM asume duraciones de actividad determinísticas y PERT supone duraciones probabilísticas.

6.5.1 Representación en forma de red

Cada actividad está representada por un arco que apunta en la dirección del avance del proyecto. Los nodos de la red establecen las relaciones de precedencia entre las diferentes actividades. Se dispone de tres reglas para construir la red.

Regla 1. *Cada actividad está representada por uno, y sólo un arco.*

Regla 2. *Cada actividad debe estar identificada por dos nodos terminales distintos*.

La figura 6.37 muestra cómo puede usarse una **actividad ficticia** para representar de forma única dos actividades concurrentes, A y B. Por definición, una actividad ficticia (representada por líneas de rayas) no consume tiempo ni recursos. La inserción de

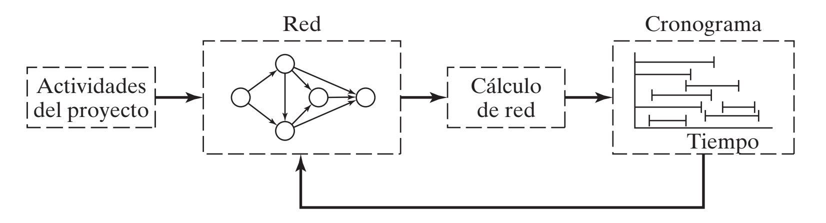


FIGURA 6.36

Fases para la planificación de un proyecto con CMP-PERT

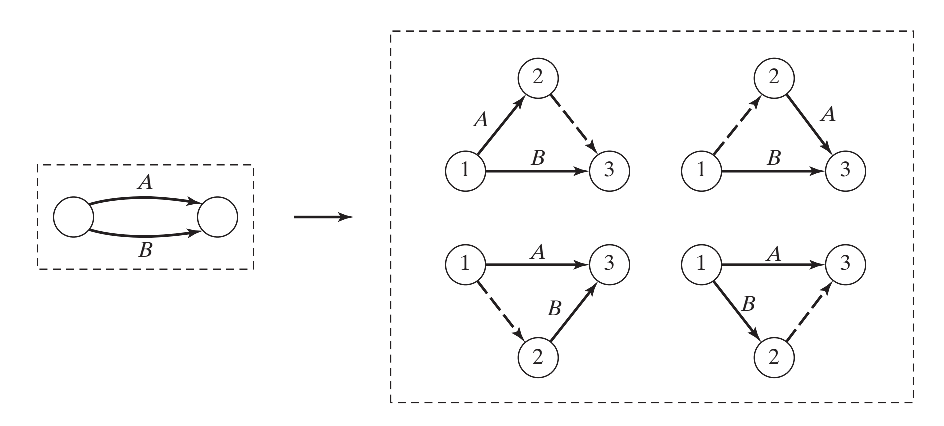


FIGURA 6.37

Uso de una actividad ficticia para representar de forma única actividades concurrentes

una actividad ficticia en una de las cuatro maneras mostradas en la figura 6.37 mantiene la concurrencia de *A* y *B* y proporciona nodos terminales únicos para las dos actividades (para satisfacer la regla 2).

Regla 3. *Para mantener las relaciones de precedencia correctas, hay que contestar las siguientes preguntas a medida que se agrega cada actividad a la red.*

(a) *¿Qué actividades preceden inmediatamente a la actividad actual?*

(b) *¿Qué actividades siguen inmediatamente a la actividad actual?*

(c) *¿Qué actividades son concurrentes con la actividad actual?*

Las respuestas a estas preguntas pueden requerir el uso de actividades ficticias para garantizar la precedencia correcta entre las actividades. Por ejemplo, considere el siguiente segmento de un proyecto:

1. La actividad *C* se inicia inmediatamente después de que las actividades *A* y *B* se han completado.
2. La actividad *E* puede iniciarse después de que se complete la actividad *B*.

La parte (a) de la figura 6.38 muestra la representación incorrecta de la relación de precedencia porque requiere que *A* y *B* se completen antes de que *E* pueda iniciarse. En la parte (b), el uso de una actividad ficticia rectifica la situación.

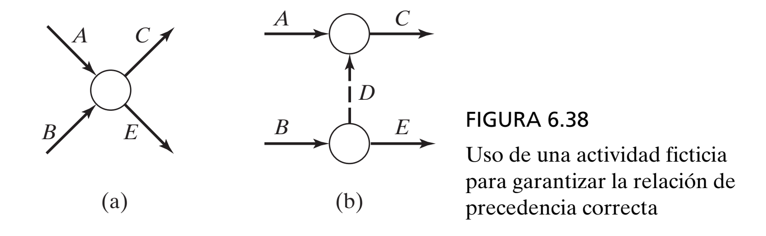


FIGURA 6.38

Uso de una actividad ficticia para garantizar la relación de precedencia correcta

Ejemplo 6.5-1

Un editor firmó un contrato con un autor para publicar un libro de texto. El autor somete a consideración una copia impresa de un archivo de computadora del manuscrito. Las actividades (simplificadas) asociadas con la producción del libro de texto se resumen en la siguiente tabla.

Actividad	Predecesora(s)	Duración (semanas)
A: Corrección del manuscrito, por parte del editor	—	3
B: Preparación de páginas muestra	—	2
C: Diseño de la portada del libro	—	4
D: Preparación de las ilustraciones	—	3
E: Aprobación del manuscrito editado y de páginas muestra, por parte del autor	*A, B*	2
F: Formación del libro	*E*	4
G: Revisión de las páginas formadas, por parte del autor	*F*	2
H: Revisión de las ilustraciones por el autor	*D*	1
I: Producción de las placas de impresión	*G, H*	2
J: Producción y encuadernación del libro	*C, I*	4

La figura 6.39 proporciona la red del proyecto. Una actividad ficticia (2,3) produce nodos terminales únicos para las actividades concurrentes *A* y *B*. Conviene numerar los nodos en orden ascendente en la dirección de avance del proyecto.

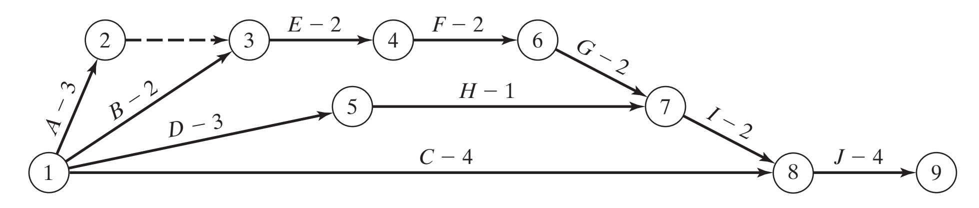
CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5A

1. Construya la red del proyecto compuesta de las actividades *A* a *L*, con las siguientes relaciones de precedencia:

- **(a)** *A*, *B* y *C*, las primeras actividades del proyecto, pueden ejecutarse de forma concurrente.
- **(b)** *A* y *B* preceden a *D*.
- **(c)** *B* precede a *E*, *F* y *H*.
- **(d)** *F* y *C* preceden a *G*.
- **(e)** *E* y *H* preceden a *I* y *J*.
- **(f)** *C*, *D*, *F* y *J* preceden a *K*.
- **(g)** *K* precede a *L*.
- **(h)** *I*, *G* y *L* son las actividades terminales del proyecto.

FIGURA 6.39

Red del proyecto para el ejemplo 6.5-1



2. Construya la red del proyecto compuesta de las actividades *A* a *P* que satisfaga las siguientes relaciones de precedencia:

(a) *A*, *B* y *C*, las primeras actividades del proyecto, pueden ejecutarse de forma concurrente.
(b) *D*, *E* y *F* vienen después de *A*.
(c) *I* y *G* vienen después de *B* y *D*.
(d) *H* viene después de *C* y *G*.
(e) *K* y *L* vienen después de *I*.
(f) *J* viene después de *E* y *H*.
(g) *M* y *N* vienen después de *F*, pero no pueden iniciarse hasta que *E* y *H* se completen.
(h) *O* viene después de *M* e *I*.
(i) *P* viene después de *J*, *L* y *O*.
(j) *K*, *N* y *P* son las actividades terminales del proyecto.

***3.** Los cimientos de un edificio pueden completarse en cuatro secciones consecutivas. Las actividades de cada sección incluyen (1) cavar; (2) colocar el acero, y (3) verter el concreto. El cavado de una sección no puede iniciarse hasta que se haya completado el de la sección precedente. La misma restricción se aplica al vertido del concreto. Desarrolle la red del proyecto.

4. En el problema 3, suponga que 10% del trabajo de plomería puede iniciarse al mismo tiempo del cavado de la primera sección, pero antes de verter el concreto. Después de que se completa cada una de las secciones de los cimientos, puede iniciarse un 5% adicional de la plomería, siempre que se termine el 5% precedente. La plomería restante puede completarse al final del proyecto. Construya la red del proyecto.

5. Una encuesta de opinión implica diseñar e imprimir cuestionarios, contratar y capacitar personal, seleccionar a los participantes, enviar por correo los cuestionarios, y analizar los datos. Construya la red del proyecto, mencionando todos los supuestos.

6. Las actividades en la siguiente tabla describen la construcción de una casa nueva. Construya la red del proyecto asociada.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Limpiar el terreno	—	1
B:	Llevar los servicios al terreno	—	2
C:	Excavar	*A*	1
D:	Colar los cimientos	*C*	2
E:	Plomería externa	*B*, *C*	6
F:	Armar la estructura de la casa	*D*	10
G:	Instalar el cableado eléctrico	*F*	3
H:	Colocar el piso	*G*	1
I:	Colocar el techo	*F*	1
J:	Plomería interior	*E*, *H*	5
K:	Colocar tejas	*I*	2
L:	Recubrimiento aislante exterior	*F*, *J*	1
M:	Instalar ventanas y puertas externas	*F*	2
N:	Enladrillar	*L*, *M*	4
O:	Aislar muros y cielo raso	*G*, *J*	2
P:	Cubrir muros y cielo raso	*O*	2
Q:	Aislar techo	*I*, *P*	1
R:	Terminar interiores	*P*	7
S:	Terminar exteriores	*I*, *N*	7
T:	Jardinería	*S*	3

7. Una compañía está preparando un presupuesto para lanzar un nuevo producto. La siguiente tabla muestra las actividades asociadas y su duración. Construya la red del proyecto.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Pronosticar volumen de ventas	—	10
B:	Estudiar el mercado competitivo	—	7
C:	Diseñar artículo e instalaciones	*A*	5
D:	Preparar el programa de producción	*C*	3
E:	Estimar el costo de la producción	*D*	2
F:	Fijar precio de venta	*B*, *E*	1
G:	Preparar presupuesto	*E*, *F*	14

8. Las actividades implicadas en un servicio coral a la luz de las velas se dan en la siguiente tabla. Construya la red del proyecto.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Seleccionar la música	—	2
B:	Aprenderse la música	*A*	14
C:	Sacar copias y comprar libros	*A*	14
D:	Audiciones	*B*, *C*	3
E:	Ensayos	*D*	70
F:	Rentar candelabros	*D*	14
G:	Decorar los candelabros	*F*	1
H:	Instalar las decoraciones	*D*	1
I:	Pedir atuendos para el coro	*D*	7
J:	Verificar el sistema de sonido	*D*	7
K:	Seleccionar las pistas de música	*J*	14
L:	Instalar el sistema de sonido	*K*	1
M:	Ensayo final	*E, G, L*	1
N:	Reunión del coro	*H, L, M*	1
O:	Programa final	*I*, *N*	1

9. La ampliación de una sección de una carretera requiere recolocar ("reconducir") 1700 pies de una línea de transmisión primaria elevada de 13.8 kV. La siguiente tabla resume las actividades del proyecto. Construya la red del proyecto asociada.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Revisión del trabajo	—	1
B:	Avisar a los clientes del corte temporal de corriente	*A*	$\frac{1}{2}$
C:	Tiendas de requisición	*A*	1
D:	Explorar el trabajo	*A*	$\frac{1}{2}$
E:	Asegurar los postes y materiales	*C*, *D*	3
F:	Distribuir los postes	*E*	$3\frac{1}{2}$
G:	Coordinar la ubicación de postes	*D*	$\frac{1}{2}$
H:	Clavar estacas	*G*	$\frac{1}{2}$
I:	Cavar agujeros	*H*	3

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
J:	Colocar los postes	*F*, *I*	4
K:	Cubrir los conductores viejos	*F*, *I*	1
L:	Halar los conductores nuevos	*J*, *K*	2
M:	Instalar el material restante	*L*	2
N:	Deflexión de cable	*L*	2
O:	Podar árboles	*D*	2
P:	Reconectar la energía y conmutar líneas	*B, M, N, O*	$\frac{1}{10}$
Q:	Energizar y conmutar la nueva línea	*P*	$\frac{1}{2}$
R:	Limpiar	*Q*	1
S:	Retirar los conductores viejos	*Q*	1
T:	Retirar los postes viejos	*S*	2
U:	Regresar el material a las tiendas	*R*, *T*	2

10. La siguiente tabla presenta las actividades para adquirir un automóvil nuevo. Construya la red del proyecto.

	Actividad	Predecesora(s)	Duración (días)
A:	Realizar estudio de factibilidad	—	3
B:	Encontrar un comprador potencial para el automóvil actual	*A*	14
C:	Poner en lista los posibles modelos	*A*	1
D:	Entrevistarse con el mecánico	*C*	3
E:	Reunir publicidad del concesionario	*C*	1
F:	Compilar los datos pertinentes	*C*	2
G:	Completar los datos pertinentes	*D, E, F*	1
H:	Escoger tres modelos	*G*	1
I:	Realizar prueba de manejo de las tres opciones	*H*	3
J:	Conseguir garantía y datos de financiamiento	*H*	2
K:	Escoger un automóvil	*I*, *J*	2
L:	Elegir el concesionario	*K*	2
M:	Buscar el color y opciones deseadas	*L*	4
N:	Realizar prueba de manejo del modelo una vez más	*L*	1
O:	Comprar el automóvil nuevo	*B, M, N*	3

6.5.2 Cálculos del método de la ruta crítica (CPM)

El resultado final en el CPM es un cronograma para el proyecto (vea la figura 6.36). Para lograr este objetivo se realizan cálculos especiales para obtener la siguiente información:

1. Duración total necesaria para completar el proyecto.
2. Clasificación de las actividades del proyecto como *críticas* o *no críticas*.

Una actividad es **crítica** si sus tiempos de inicio y terminación están predeterminados (fijos). Una actividad es **no crítica** si puede ser programada en un espacio de tiempo mayor que su duración, lo que permite tiempos de inicio y terminación flexibles (dentro de los límites). Una demora en el tiempo de inicio de una actividad crítica definitivamente retrasa la terminación del proyecto, en tanto que una demora en una actividad no crítica quizá no afecte la fecha de terminación del proyecto.

Para realizar los cálculos necesarios, definimos un **evento** como un punto en el tiempo en el cual se completan las actividades y se inician las subsiguientes. En función de la red, un evento corresponde a un nodo. Sean

$\square_j$ = Tiempo de ocurrencia más temprano del evento j
Δ_j = Tiempo de ocurrencia más tardío del evento j
D_{ij} = Duración de la actividad (i,j)

Todos los tiempos de ocurrencia se miden a partir del inicio del proyecto. El lapso $(\square_j, \Delta_j)$ define el periodo de tiempo durante el cual se programa la actividad (i,j) de duración D_{ij}. Si la actividad (i,j) es crítica, entonces $D_{ij} = \Delta_j - \square_j$. De lo contrario, $D_{ij} < \Delta_j - \square_i$ para la actividad no crítica (i,j).

Los cálculos de la ruta crítica implican dos pasos: El **paso adelantado** determina los tiempos de ocurrencia *más tempranos* de los eventos y el **paso retrasado** calcula sus tiempos de ocurrencia *mas tardíos*.

Paso adelantado (tiempos de ocurrencia más tempranos, □). Los cálculos se inician en el nodo 1 y avanzan recursivamente hacia el nodo n.

Paso inicial. Establezca $\square_j = 0$ para indicar que el proyecto se inicia en el tiempo 0.

Paso general *j*. Dado que los nodos $p, q, \ldots$ y v están vinculados directamente al nodo j por las actividades entrantes $(p,j), (q,j), \ldots,$ y (v,j) y que los tiempos de ocurrencia más temprano de los eventos (nodos) $p, q, \ldots,$ y v ya se calcularon, entonces el tiempo más temprano de ocurrencia del evento j se calcula como

$$\square_j = \text{máx}\,\{\square_p + D_{pj}, \square_q + D_{qj}, \cdots, \square_v + D_{vj}\}$$

El paso adelantado se completa cuando se ha calculado $\square_j$ en el nodo n. Por definición, $\square_j$ es la ruta más larga (duración) al nodo j.

Paso retrasado (tiempos de ocurrencia más tardíos, Δ). Los cálculos del paso retrasado se inician en el nodo n y terminan en el nodo 1.

Paso inicial. Establezca $\Delta_n = \square_n$ para indicar que las ocurrencias más tardías del último nodo son iguales a la duración del proyecto.

Paso general *j*. Dado que los nodos $p, q, \ldots,$ y v están vinculados *directamente* al nodo j por las actividades *salientes* $(j,p), (j,q), \ldots,$ y (j,v) y que los tiempos de ocurrencia más tardíos de los nodos $p, q, \ldots,$ y v ya se calcularon, el tiempo de ocurrencia más tardío del nodo j se calcula como

$$\Delta_j = \text{mín}\,\{\Delta_p - D_{jp}, \Delta_q - D_{jq}, \ldots, \Delta_v - D_{jv}\}$$

El paso retrasado termina con $\Delta_1 = 0$ en el nodo 1.

Con base en los cálculos anteriores, una actividad (i,j) será *crítica* si satisface tres condiciones.

1. $\Delta_i = \square_i$
2. $\Delta_j = \square_j$
3. $\Delta_j - \square_i = D_{ij}$

Las tres condiciones establecen que los tiempos de ocurrencia más tempranos y más tardíos de los nodos finales i y j son iguales y que la duración D_{ji} encaja "perfectamente" en el espacio de tiempo especificado. Una condición que no satisface las tres condiciones es *no crítica*.

Por definición, las actividades críticas de una red constituyen la ruta más larga que abarca el proyecto desde el inicio hasta la terminación.

Ejemplo 6.5-2

Determine la ruta crítica para la red del proyecto que se muestra en la figura 6.40. Todas las duraciones están en días.

Paso adelantado

Nodo 1. Establezca $\square_1 = 0$

Nodo 2. $\square_2 = \square_1 + D_{12} = 0 + 5 = 5$

Nodo 3. $\square_3 = \text{máx}\{\square_1 + D_{13}, \square_2 + D_{23}\} = \text{máx}\{0 + 6, 5 + 3\} = 8$

Nodo 4. $\square_4 = \square_2 + D_{24} = 5 + 8 = 13$

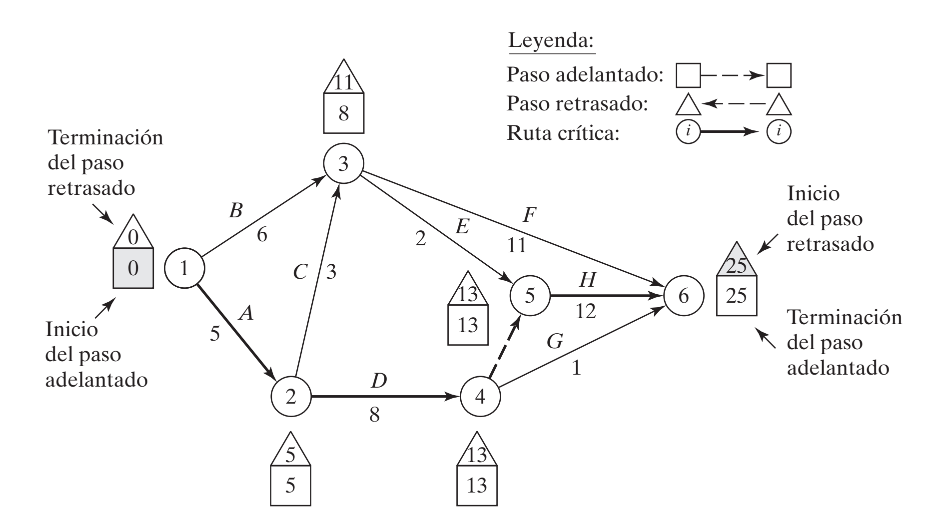
Nodo 5. $\square_5 = \text{máx}\{\square_3 + D_{35}, \square_4 + D_{45}\} = \text{máx}\{8 + 2, 13 + 0\} = 13$

Nodo 6. $\square_6 = \text{máx}\{\square_3 + D_{36}, \square_4 + D_{46}, \square_5 + D_{56}\}$
$= \text{máx}\{8 + 11, 13 + 1, 13 + 12\} = 25$

Los cálculos muestran que el proyecto puede completarse en 25 días.

FIGURA 6.40

Cálculos de paso adelantado y paso retrasado para el proyecto del ejemplo 6.5-2



Paso retrasado

Nodo 6. Establezca $\Delta_6 = \square_6 = 25$
Nodo 5. $\Delta_5 = \Delta_6 - D_{56} = 25 - 12 = 13$
Nodo 4. $\Delta_4 = \text{mín}\,\{\Delta_6 - D_{46}, \Delta_5 - D_{45}\} = \text{mín}\,\{25 - 1, 13 - 0\} = 13$
Nodo 3. $\Delta_3 = \text{mín}\,\{\Delta_6 - D_{36}, \Delta_5 - D_{35}\} = \text{mín}\,\{25 - 11, 13 - 2\} = 11$
Nodo 2. $\Delta_2 = \text{mín}\,\{\Delta_4 - D_{24}, \Delta_3 - D_{23}\} = \text{mín}\,\{13 - 8, 11 - 3\} = 5$
Nodo 1. $\Delta_1 = \text{mín}\,\{\Delta_3 - D_{13}, \Delta_2 - D_2\} = \text{mín}\{11 - 6, 5 - 5\} = 0$

Los cálculos correctos siempre terminarán con $\Delta_1 = 0$. Los cálculos pueden hacerse directamente en la red como se muestra en la figura 6.40.

Aplicando las reglas para determinar las actividades críticas, la ruta crítica es $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$, la cual, como se esperaba, abarca la res desde el inicio (nodo 1) hasta la terminación (nodo 6). La suma de las duraciones de las actividades críticas [(1,2), (2,4), (4,5) y (5.6)] es igual a la duración del proyecto (= 25 días). Observe que la actividad (4,6) satisface las dos primeras condiciones para una actividad crítica ($\Delta_4 = \square_4 = 13$) y ($\Delta_6 = \square_6 = 25$) pero no la tercera ($\Delta_6 - \square_4) \neq D_{46}$). De ahí que la actividad es no crítica.

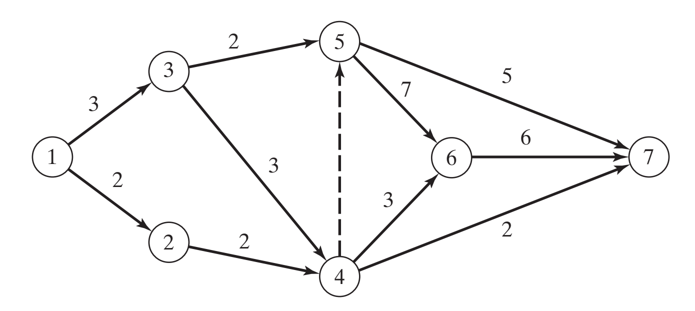
CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5B

*1. Determine la ruta crítica para la red de proyecto de la figura 6.41.
2. Determine la ruta crítica para las redes de proyecto de la figura 6.42.
3. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 6, conjunto 6.5a.
4. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 8, conjunto 6.5a.
5. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 9, conjunto 6.5a.
6. Determine la ruta crítica para el proyecto del problema 10, conjunto 6.5a.

6.5.3 Construcción del cronograma

Esta sección muestra cómo puede usarse la información obtenida a partir de los cálculos en la sección 6.5.2 para el desarrollo del cronograma. Reconocemos que para una

FIGURA 6.41
Red del proyecto para el problema 1, conjunto 6.5b



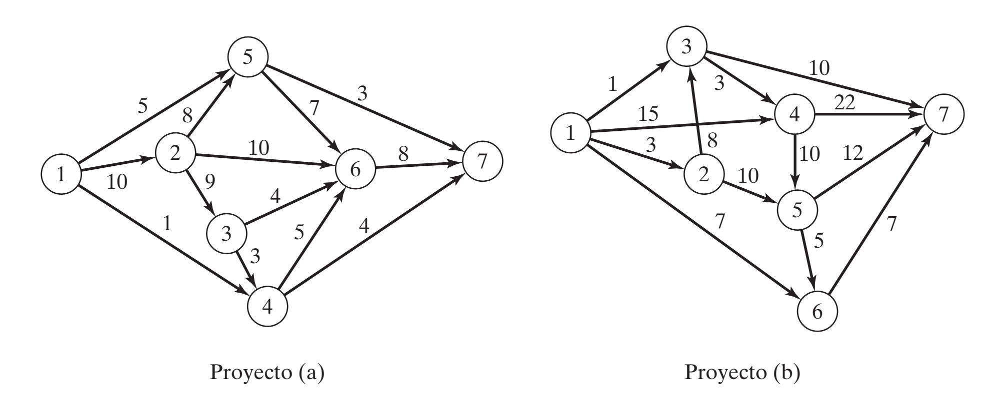


FIGURA 6.42

Redes del proyecto para el problema 2, conjunto 6.5

actividad (i, j), $\square_i$ representa el *tiempo de inicio más temprano*, y Δ_j representa el *tiempo de inicio más tardío*. Por lo tanto, el intervalo $(\square_i, \Delta_j)$ define el espacio de tiempo (máximo) durante el cual la actividad (i,j) puede programarse sin demorar todo el proyecto.

Construcción de un programa preliminar. El método para construir un programa preliminar se ilustra con un ejemplo.

Ejemplo 6.5-3

Determine el cronograma para el proyecto del ejemplo 6.5-2 (figura 6.40).

Podemos obtener un cronograma preliminar para las diferentes actividades del proyecto definiendo sus respectivos espacios de tiempo como se muestra en la figura 6.43.

1. Las actividades críticas (mostradas por las líneas sólidas) están escalonadas una justo después de la otra para garantizar que el proyecto se complete dentro de la duración especificada de 25 días.
2. Las actividades no críticas (mostradas por las líneas de rayas) tienen lapsos de tiempo permisibles mayores que sus respectivas duraciones, lo que permite una holgura (o "margen") al programarlas dentro de sus intervalos de tiempo asignados.

¿Cómo programamos las actividades no críticas dentro de sus respectivos espacios de tiempo? Normalmente, es preferible iniciar cada actividad no crítica lo más pronto posible. De esta manera los periodos de holgura restantes pueden usarse para compensar las demoras inesperadas en la actividad. Puede ser necesario, sin embargo, retrasar el inicio de una actividad no crítica más allá de su tiempo de inicio más temprano. Por ejemplo, en la figura 6.43, suponga que cada una de las actividades no críticas E y F requiere el uso de una excavadora y que sólo una está disponible. Programar tanto E como F tan pronto como sea posible, requiere dos excavadoras entre los tiempos 8 y 10. Podemos eliminar el traslape iniciando E en el tiempo 8 y moviendo el tiempo de inicio de F a alguna parte entre los tiempos 10 y 14.

Si todas las actividades no críticas pueden programarse lo más pronto posible, el programa resultante siempre es factible. De lo contrario, pueden violarse algunas relaciones de precedencia si las actividades no críticas se demoran más allá de su tiempo de inicio más temprano.

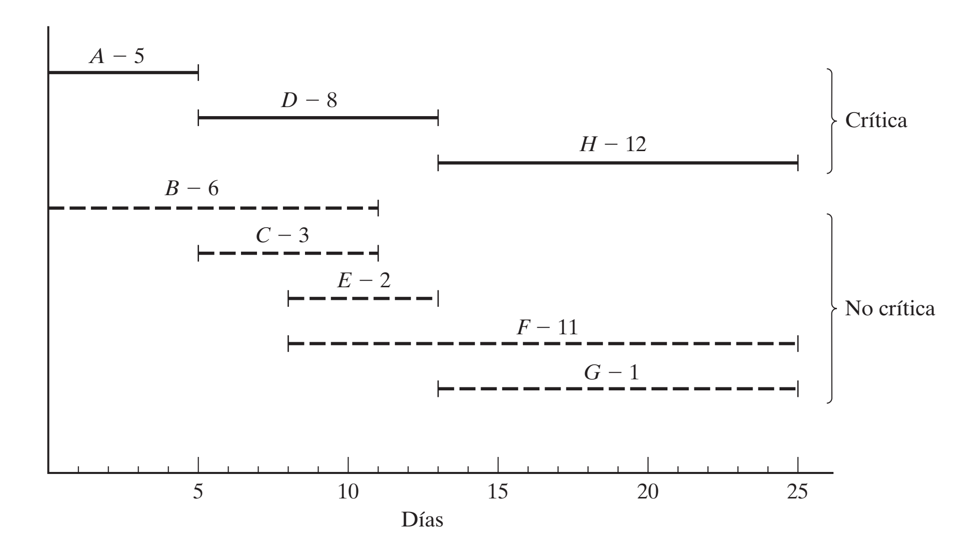


FIGURA 6.43

Cronograma preliminar para el proyecto del ejemplo 6.5-2

Considere, por ejemplo, las actividades C y E en la figura 6.43. En la red de proyecto (figura 6.40), aunque C debe completarse antes que E, los espacios de tiempo de C y E en la figura 6.43 permiten programar C entre los tiempos 6 y 9, y E entre los tiempos 8 y 10, lo cual viola el requisito de que C preceda a E. Por lo tanto, es evidente la necesidad de una "señal roja" que revele de forma automática el conflicto en el programa. Tal información se obtiene calculando los *flotantes* (también conocidos como holguras) para las actividades no críticas.

Determinación de los flotantes. Los flotantes son los tiempos de **holgura** disponibles dentro del espacio asignado de la actividad no crítica. Los tipos más comunes son el **flotante total** y el **flotante libre.**

La figura 6.44 da un resumen conveniente para calcular el flotante total (TF_{ij}) y el flotante libre (FF_{ij}) para una actividad (i,j).

$$TF_{ij} = \Delta_j - \square_i - D_{ij}$$
$$FF_{ij} = \square_j - \square_i - D_{ij}$$

Por definición $FF_{ij} \leq TF_{ij}$.

Regla de la señalización roja. *Para una actividad no crítica* (i,j), *si* $FF_{ij} < TF_{ij}$, *entonces su inicio puede demorarse en cuando mucho* FF_{ij}, *con respecto a su tiempo de inicio más temprano* $\square_i$, *sin provocar un conflicto en el programa. Cualquier demora mayor que* FF_{ij} *(pero no mayor que* TF_{ij}*) debe acoplarse con una demora igual (con respecto a* $\square_j$*) en el tiempo de inicio de todas las actividades que salen del nodo* j.

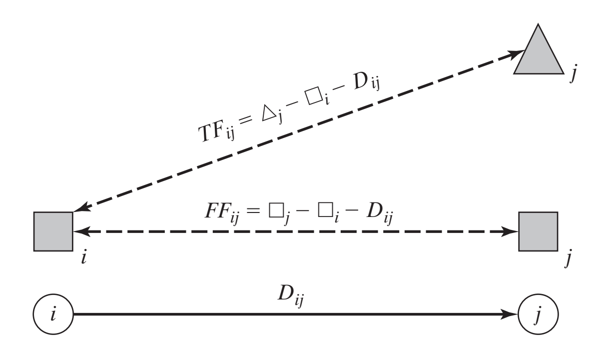


FIGURA 6.44
Cálculo de los flotantes total y libre

La implicación de la regla es que, si $FF_{ij} = TF_{ij}$, puede programarse una actividad no crítica (i,j) en cualquier parte del intervalo $(\square_i, \Delta_j)$ sin provocar conflictos en el programa. De lo contrario, si $FF_{ij} < TF_{ij}$, la actividad (i,j) recibe una señal roja por la posibilidad de demorar el tiempo de inicio de las actividades que salen del nodo j.

Ejemplo 6.5-4

Calcule los flotantes para las actividades no críticas de la red del ejemplo 6.5-2, y exponga su uso al finalizar un programa para el proyecto.

La siguiente tabla resume los cálculos de los flotantes total y libre. Para cálculos manuales, conviene más realizar los cálculos directamente en la red siguiendo el procedimiento mostrado en la figura 6.40.

Actividad no crítica	Duración	Flotante total (TF_{ij})	Flotante libre (FF_{ij})
$B(1,3)$	6	$11 - 0 - 6 = 5$	$8 - 0 - 6 = 2$
$C(2,3)$	3	$11 - 5 - 3 = 3$	$8 - 5 - 3 = 0$
$E(3,5)$	2	$13 - 8 - 2 = 3$	$13 - 8 - 2 = 3$
$F(3,6)$	11	$25 - 8 - 11 = 6$	$25 - 8 - 11 = 6$
$G(4,6)$	1	$25 - 13 - 1 = 11$	$25 - 13 - 1 = 11$

Los cálculos ponen una señal roja en las actividades B y C porque su $FF < TF$. Las actividades restantes (E,F y G) tienen $FF = TF$ y por consiguiente pueden programarse en cualquier parte entre sus tiempos de terminación más tempranos y más tardíos.

Para investigar la importancia de las actividades marcadas con una señal roja, considere la actividad B con $TF = 5$ días y $FF = 2$ días. Esta actividad puede iniciarse en cualquier tiempo entre 0 y 2 (su FF). Por otra parte, si B se inicia después del tiempo 2 hasta el tiempo 5 (su TF), los tiempos de inicio de las actividades inmediatamente subsiguientes E y F deben moverse hacia adelante con respecto a su tiempo de inicio más temprano (= 8) por al menos un periodo de demora igual.

En cuanto a la actividad *C* marcada con una señal roja, su *FF* cero significa que *cualquier* demora al iniciar *C* después de su tiempo de inicio más temprano (= 5) debe acoplarse con al menos una demora igual del tiempo de inicio de las actividades de su sucesor.

Momento de TORA

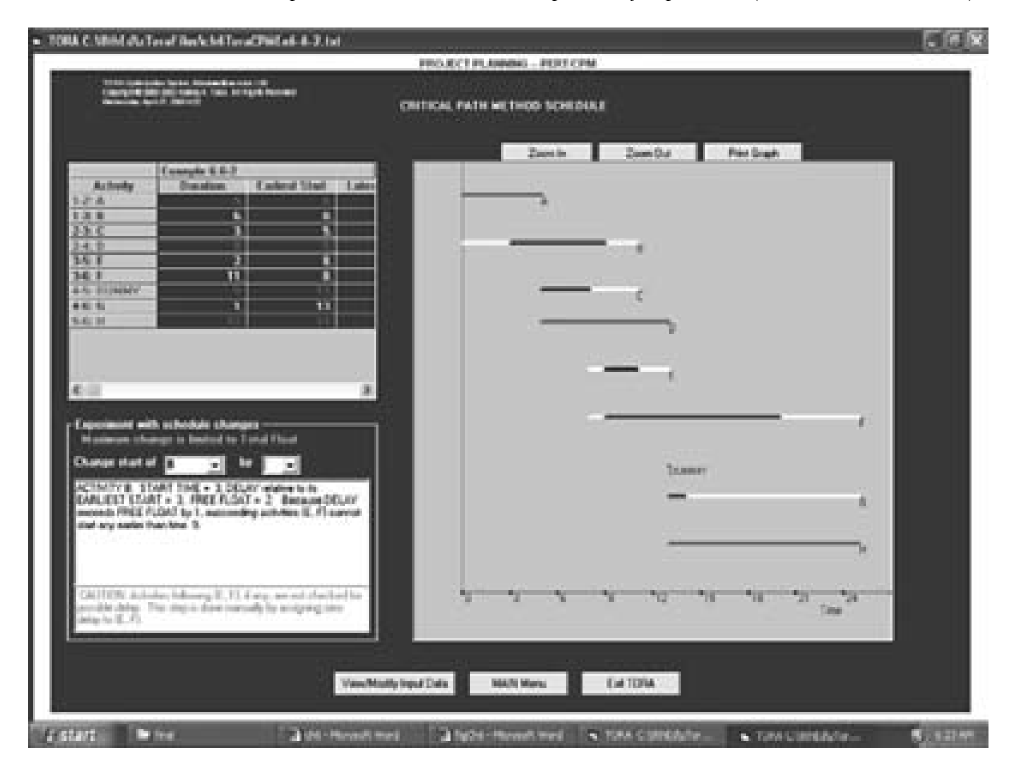
TORA incluye herramientas tutoriales útiles para cálculos de CPM y para construir el cronograma. Para utilizarlas seleccione las opciones Project Planning ⇒ CPM − Critical Path Method en el menú Main de la barra de menús. En la pantalla de resultados tiene la opción de seleccionar CPM Calculations para producir cálculos paso a paso del paso adelantado, el paso retrasado, y los flotantes o la opción CPM Bar Chart para construir y experimentar con el cronograma.

El archivo *toraEx6.5-2* proporciona los datos para el ejemplo 6.5-2. Si elige generar los resultados con la opción Next Step TORA lo guiará a través de los detalles de los cálculos de paso adelantado y paso retrasado.

La figura 6.45 proporciona el programa producido por la opción CPM Bar Chart de TORA para el proyecto del ejemplo 6.5-2. La gráfica de barras predeterminada programa de forma automática todas las actividades no críticas tan pronto como es posible. Así puede estudiar el

FIGURA 6.45

Resultados obtenidos con la opción "bar chart" de TORA para el ejemplo 6.5-2 (archivo *toraEx6.5-2.txt*)



impacto de demorar el tiempo de inicio de una actividad no crítica por medio de listas desplegables auto explicativas en el lado izquierdo de la pantalla. El impacto de demorar una actividad no crítica se mostrará directamente en la gráfica de barras junto con una explicación. Por ejemplo, si demora el inicio de la actividad *B* en más de 2 unidades de tiempo, las actividades subsiguientes *E* y *F* se demorarán en una cantidad igual a la diferencia entre la demora y el flotante libre de la actividad *B*. Específicamente, dado que el flotante libre de *B* es de 2 unidades de tiempo, si *B* se demora en 3 unidades de tiempo, entonces el inicio de *E* y *F* debe demorarse en al menos 3 – 2 = 1 unidad de tiempo. Esta situación se demuestra en la figura 6.45.

Momento de AMPL

El archivo *amplEx6.52.txt* proporciona el modelo para la CPM. Los datos del ejemplo 6.5-2 controlan el modelo. Este modelo de AMPL es una aplicación única porque no es un problema de optimización. Los detalles del modelo se dan en el apéndice C.9 en el sitio web.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5C

1. Dada una actividad (i,j) con duración D_{ij} y su tiempo de inicio más temprano $\square_i$, así como su tiempo de terminación más tardío Δ_j, determine los tiempos de terminación más temprano y de inicio más tardío de (i, j).

2. ¿Cuáles son los flotantes total y libre de una actividad crítica? Explique.

***3.** Para cada una de las siguientes actividades, determine la demora máxima del tiempo de inicio con respecto a su tiempo de inicio más temprano que permitirá que todas las actividades inmediatamente subsiguientes se programen en cualquier parte entre sus tiempos más temprano y más tardío de terminación.

- **(a)** $TF = 10, FF = 10, D = 4$
- **(b)** $TF = 10, FF = 5, D = 4$
- **(c)** $TF = 10, FF = 0, D = 4$

4. En el ejemplo 6.5-4 utilice los flotantes para responder lo siguiente:

- **(a)** Si la actividad *B* se inicia en el tiempo 1 y la actividad *C* se inicia en el tiempo 5, determine los tiempos de inicio más tempranos para *E* y *F*.
- **(b)** Si la actividad *B* se inicia en el tiempo 3, y la actividad *C* se inicia en el tiempo 7, determine los tiempos de inicio más tempranos para *E* y *F*.
- **(c)** ¿Cómo se impacta la programación de otras actividades si la actividad *B* se inicia en el tiempo 6?

***5.** En el proyecto del ejemplo 6.5-2 (figura 6.42), suponga que la duración de las actividades *B* y *F* cambia de 11 días a 20 y 25 días, respectivamente.

- **(a)** Determine la ruta crítica.
- **(b)** Determine los flotantes total y libre para la red, e identifique las actividades marcadas con una señal roja.
- **(c)** Si la actividad *A* se inicia en el tiempo 5, determine los tiempos de inicio más tempranos posibles para las actividades *C*, *D*, *E* y *G*.
- **(d)** Si las actividades *F*, *G* y *H* requieren el mismo equipo, determine el mínimo de unidades necesarias de este equipo.

6. Calcule los flotantes e identifique las actividades marcadas con una señal roja para los proyectos (a) y (b) de la figura 6.44; luego desarrolle los cronogramas en las siguientes condiciones:

Proyecto (a)

(i) La actividad (1,5) no puede iniciarse antes que el tiempo 14.

(ii) Las actividades (5,6) y (5,7) utilizan el mismo equipo, del cual sólo una unidad está disponible.

(iii) Todas las demás actividades se inician lo más pronto posible.

Proyecto (b)

(i) La actividad (1,3) debe programarse a su tiempo de inicio más temprano al mismo tiempo que se observa el requisito de que (1,2), (1,3) y (1,6) utilizan una pieza de equipo especial, de la cual sólo hay una (1) unidad disponible.

(ii) Todas las demás actividades se inician lo más pronto posible.

7. (*Programación de tareas en un taller*). Tres tareas, J1, J2 y J3 se procesan en 3 máquinas, M1, M2 y M3, de acuerdo con las siguientes secuencias (los tiempos de procesamiento se muestran entre paréntesis):

J1: M3(3) – M1(4) – M2(6)
J2: M2(1) – M3(5) – M2(9)
J3: M3(8) – M2(8) – M1(7)

El orden en el cual se procesan las tareas en las diferentes máquinas está predeterminado como:

M1: J1 – J2 – J3
M2: J2 – J3 – J1
M3: J3 – J1 – J2

(a) Represente el problema como una red de CPM para la cual la ruta crítica determina el espacio de trabajo de las tres tareas.

(b) Use los cálculos de ruta crítica para programar las tares (gráfica de Gantt) suponiendo que cada operación se programa a su tiempo de inicio más temprano.

6.5.4 Formulación de programación lineal de CPM

El modelo CPM busca la ruta *más larga* entre los nodos de inicio y de terminación de la red del proyecto. Por tanto, su formulación como una PL es semejante a la PL del modelo de la ruta más corta (sección 6.3.3). La única diferencia es que la función objetivo se maximiza en lugar de minimizarse.

Defina

x_{ij} = Cantidad de flujo de la actividad (i,j) para toda i y j definidas

D_{ij} = Duración de la actividad (i,j) para toda i y j definidas

Por lo tanto, la función objetivo del programa lineal es

$$\text{Maximizar } z = \sum_{\substack{\text{todas las actividades} \\ \text{definidas } (i,\, j)}} D_{ij}x_{ij}$$

Para cada nodo hay una restricción que representa la conservación del flujo:

$$\text{Flujo de entrada total} = \text{Flujo de salida total}$$

Todas las variables, x_{ij}, son no negativas.

Ejemplo 6.5-5

A continuación se da la formulación de PL del proyecto del ejemplo 6.5-2 (figura 6,40). Observe que los nodos 1 y 6 son los nodos de inicio y de terminación, respectivamente.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	Ficticia	*G*	*H*	
	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{24}	x_{35}	x_{36}	x_{45}	x_{46}	x_{56}	
Maximizar z =	6	6	3	8	2	11	0	1	12	
Nodo 1	− 1	− 1								= − 1
Nodo 2	1		− 1	− 1						= 0
Nodo 3		1	1		− 1	− 1				= 0
Nodo 4				1			− 1	− 1		= 0
Nodo 5					1		1		− 1	= 0
Nodo 6						1		1	1	= 1

La solución óptima es

$z = 25, x_{12}(A) = 1, x_{24}(D) = 1, x_{45}$ (ficticia) $= 1,\ x_{56}(H) = 1$, y todas las demás $= 0$

La solución define la ruta crítica como $A \rightarrow D \rightarrow$ Ficticia $\rightarrow H$, y la duración del proyecto es de 25 días, pero no proporciona los datos necesarios para construir la gráfica de CPM.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5D

1. Utilice PL para determinar la ruta crítica para la red del proyecto de la figura 6.43.
2. Utilice PL para determinar la ruta crítica para las redes de proyecto de la figura 6.44.

6.5.5 Redes PERT

PERT difiere de CPM en que asume tiempos de duración probabilísticos basados en tres estimaciones:

1. **Tiempo optimista**, a, el cual ocurre cuando la ejecución transcurre extremadamente bien.
2. **Tiempo más probable**, m, el cual ocurre cuando la ejecución se realiza en condiciones normales.
3. **Tiempo pesimista**, b, el cual ocurre cuando la ejecución transcurre extremadamente deficiente.

El tiempo más probable, m, queda en el intervalo (a, b).

Basado en las estimaciones, el tiempo de duración promedio, $\overline{D}$, y varianza, v, se aproximan como

$$\overline{D} = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$v = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

Los cálculos de CPM dados en las secciones 6.5.2 y 6.5.3 pueden aplicarse directamente, con $\overline{D}$, reemplazando a la estimación única D.

Dado que la variable aleatoria e_j que representa el tiempo de ocurrencia más temprano del nodo, la probabilidad de que j ocurrirá en un tiempo programado, S_j, puede estimarse como sigue: Suponga que todas las actividades en la red son estadísticamente independientes, y calcule primero la media $E\{e_j\}$ y la varianza, $\text{var}\{e_j\}$. Si sólo hay una ruta del nodo de inicio al nodo j, entonces la media es la suma de las duraciones esperadas, $\overline{D}$, de todas las actividades a lo largo de esta ruta y la varianza es la suma de las varianzas, v, de las mismas actividades. Si más de una ruta conduce al nodo j, entonces es necesario determinar la distribución estadística de la duración de la ruta más larga, un problema un tanto difícil porque implica determinar la distribución del máximo de al menos dos variables aleatorias. Una suposición simplificadora requiere seleccionar la ruta al nodo j que tiene la duración *promedio* más larga. Si dos o más rutas tienen la misma media, se selecciona la de la mayor varianza porque refleja la incertidumbre máxima y, por consiguiente, conduce a una estimación más conservadora de las probabilidades.

Dadas la media y la varianza de la ruta al nodo j, $E\{e_j\}$ y $\text{var}\{e_j\}$, la probabilidad de que el nodo j ocurra en el tiempo S_j está representada de forma aproximada por la distribución normal estándar, z (vea la sección 14.4.4), es decir,

$$P\{e_j \leq S_j\} = P\left\{\frac{e_j - E\{e_j\}}{\sqrt{\text{var}\{e_j\}}} \leq \frac{S_j - E\{e_j\}}{\sqrt{\text{var}\{e_j\}}}\right\} = P\{z \leq K_j\}$$

La justificación para el uso de la distribución normal es que e_j es la suma de variables aleatorias independientes. De acuerdo con el *teorema del límite central* (vea la sección 14.4.4), e_j está distribuida normalmente de una manera aproximada.

Ejemplo 6.5-6

Considere el proyecto del ejemplo 6.5-2. Para no repetir los cálculos de ruta crítica, los valores de a, m y b que aparecen en la tabla se seleccionan para obtener $\overline{D_{ij}} = D_{ij}$ para toda i y j en el ejemplo 6.5-2.

Actividad	$i-j$	(a,m,b)	Actividad	$i-j$	(a,m,b)
A	1–2	(3, 5, 7)	E	3–5	(1, 2, 3)
B	1–3	(4, 6, 8)	F	3–6	(9, 11, 13)
C	2–3	(1, 3, 5)	G	4–6	(1, 1, 1)
D	2–4	(5, 8, 11)	H	5–6	(10, 12, 14)

La media $\overline{D_{ij}}$ y la varianza v_{ij} de las diferentes actividades se presentan en la siguiente tabla. Observe que una actividad ficticia con (a,m,b) tiene media y varianza cero.

Actividad	$i-j$	$\overline{D}_{ij}$	v_{ij}	Actividad	$i-j$	$\overline{D}_{ij}$	v_{ij}
A	1–2	5	.444	E	3–5	2	.111
B	1–3	6	.444	F	3–6	11	.444
C	2–3	3	.444	G	4–6	1	.000
D	2–4	8	1.000	H	5–6	12	.444

La siguiente tabla presenta la ruta más larga del nodo 1 a los diferentes nodos, junto con su media y desviación estándar asociadas.

Nodo	Ruta más larga basada en las duraciones medias	Media de la ruta	Desviación estándar de la ruta
2	1–2	5.00	0.67
3	1–2–3	8.00	0.94
4	1–2–4	13.00	1.20
5	1–2–4–5	13.00	1.20
6	1–2–4–5–6	25.00	1.37

La siguiente tabla calcula la probabilidad de que cada nodo se realice en el tiempo S_j (especificado por el analista).

Nodo j	Ruta más larga	Media de la ruta	Desviación estándar de la ruta	S_j	K_j	$P\{z \leq K_j\}$
2	1–2	5.00	0.67	5.00	0	.5000
3	1–2–3	8.00	0.94	11.00	3.19	.9993
4	1–2–4	13.00	1.20	12.00	–.83	.2033
5	1–2–4–5	13.00	1.20	14.00	.83	.7967
6	1–2–4–5–6	25.00	1.37	26.00	.73	.7673

Momento de TORA

TORA incluye un módulo para realizar cálculos PERT. Para utilizar este módulo, seleccione las opciones Project Planning ⇒ PERT − Program Evaluation and Review Technique en el menú Main de la barra de menús. En la pantalla de resultados tiene la opción de seleccionar Activity Mean/Var para calcular la media y varianza de cada actividad, o la opción PERT Calculations para calcular la media y varianza de la ruta más larga a cada nodo en la red. El archivo *toraEx6.5-6.txt* proporciona los datos para el ejemplo 6.5-6.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 6.5E

1. Considere el problema 2, conjunto 6.5b. Las estimaciones (a, m, b) se enlistan a continuación. Determine las probabilidades de que los diferentes nodos del proyecto se realicen sin demora.

Proyecto (a)				Proyecto (b)			
Actividad	(a,m,b)	Actividad	(a,m,b)	Actividad	(a,m,b)	Actividad	(a,m,b)
1-2	(5, 6, 8)	3-6	(3, 4, 5)	1-2	(1, 3, 4)	3-7	(12, 13, 14)
1-4	(1, 3, 4)	4-6	(4, 8, 10)	1-3	(5, 7, 8)	4-5	(10, 12, 15)
1-5	(2, 4, 5)	4-7	(5, 6, 8)	1-4	(6, 7, 9)	4-7	(8, 10, 12)
2-3	(4, 5, 6)	5-6	(9, 10,15)	1-6	(1, 2, 3)	5-6	(7, 8, 11)
2-5	(7, 8, 10)	5-7	(4, 6, 8)	2-3	(3, 4, 5)	5-7	(2, 4, 8)
2-6	(8, 9, 13)	6-7	(3, 4, 5)	2-5	(7, 8, 9)	6-7	(5, 6, 7)
3-4	(5, 9, 19)			3-4	(10, 15, 20)		

BIBLIOGRAFÍA

Ahuja, R., T. Magnati, y J. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1993.

Bazaraa, M., J. Jarvis, y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flow,* 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.

Chames, A., y W. Cooper, "Some Network Characterization for Mathematical Programming and Accounting Applications to Planning and Control", *The Accounting Review,* vol. 42, núm. 3, págs. 24-52, 1967.

Evans, J., y E. Minieka, *Optimization Algorithms for Networks and Graphs,* 2a. ed., Marcel Dekker, Nueva York, 1992.

Guéret, C., C. Prins, y M. Sevaux, *Applications of Optimization with Xpress-MP,* traducido y revisado por Susanne Heipke, Dash Optimization Ltd., Londres, 2002.

Glover, F., D. Klingman, y N. Phillips, *Network Models and Their Applications in Practice,* Wiley, Nueva York, 1992.

Robinson, E., L. Gao, y S. Muggenborg, "Designing an Integrated Distribution System at DowBrands, Inc.", *Interfaces,* vol. 23, núm. 3, págs. 107-117, 1993.

CAPÍTULO 7

Programación lineal avanzada

Aplicación de la vida real. Asignación de rutas marítimas óptimas y de personal para reclutamiento naval en Tailandia

La armada tailandesa lleva a cabo reclutamientos cuatro veces al año. Un recluta se reporta a uno de 34 centros locales y luego es transportado por autobús a una de cuatro bases navales filiales. Desde allí, los reclutas son transportados a la base naval principal por barco. Las instalaciones portuarias en las bases filiales pueden restringir el tipo de buque que puede atracar en cada base. Las bases filiales tienen capacidades limitadas pero, en conjunto, las cuatro tienen suficiente capacidad para acomodar a todos los reclutas. Durante el verano de 1983, un total de 2929 reclutas fueron transportados desde los centros de reclutamiento hasta las cuatro bases filiales y finalmente a la base principal. El problema tiene que ver con la determinación del programa óptimo de transporte de los reclutas, primero de los centros de reclutamiento a las bases filiales, y luego de éstas a la base principal. El estudio utiliza una combinación de programación lineal y entera. (Los detalles se dan en el caso 5, capítulo 26 en el sitio web).

7.1 FUNDAMENTOS DEL MÉTODO SIMPLEX

En la programación lineal, el espacio de soluciones factibles forma un **conjunto convexo** si el segmento de línea que une dos puntos factibles *distintos* también queda en el conjunto. Un **punto extremo** del conjunto convexo es un punto factible que no puede quedar sobre un segmento de línea que une dos puntos factibles *distintos* en el conjunto. En realidad, los puntos extremos son los mismos que los puntos de esquina, como se utilizaron en los capítulos 2, 3 y 4.

La figura 7.1 ilustra dos conjuntos. El conjunto (a) es convexo (con seis puntos extremos) y el conjunto (b) no lo es.

La solución de PL gráfica dada en la sección 2.2 demuestra que la solución óptima siempre está asociada con un punto factible extremo (de esquina) del espacio de soluciones. Este resultado tiene sentido intuitivamente, porque todo punto factible en el espacio de soluciones de PL puede determinarse como una función de sus puntos extremos factibles. Por ejemplo, en el conjunto convexo (a) de la figura 7.1, una **combi-**

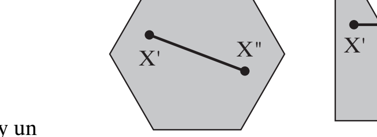


FIGURA 7.1
Ejemplos de un conjunto convexo y un conjunto no convexo

nación convexa de los puntos extremos $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$, $\mathbf{X}_3$, $\mathbf{X}_4$, $\mathbf{X}_5$ y $\mathbf{X}_6$, identifica cualquier punto factible $\mathbf{X}$ como

$$\mathbf{X} = \alpha_1\mathbf{X}_1 + \alpha_2\mathbf{X}_2 + \alpha_3\mathbf{X}_3 + \alpha_4\mathbf{X}_4 + \alpha_5\mathbf{X}_5 + \alpha_6\mathbf{X}_6$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 1$$

$$\alpha_{\mathrm{i}} \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 6$$

Esta observación muestra que un número finito de puntos extremos define por completo el número infinito de puntos en el espacio de soluciones. Este resultado es el punto crucial del método simplex.

Ejemplo 7.1-1

Demuestre que el siguiente conjunto es convexo:

$$C = \{(x_1, x_2)|x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Sean $\mathbf{X}_1 = \{x_1', x_2'\}$ y $\mathbf{X}_2 = \{x_1'', x_2''\}$ dos puntos distintos en C. Si C es convexo, entonces $\mathbf{X} = (x_1,x_2) = \alpha_1, \mathbf{X}_1 + \alpha_2\mathbf{X}_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 =1$, $\alpha_1\ \alpha_2 \geq 0$, también deben estar en C. Para comprobar que esto es cierto, tenemos que demostrar que el segmento de línea $\mathbf{X}$ satisface todas las restricciones de C; es decir,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_1'' \leq \alpha_1(2) + \alpha_2(2) = 2 \\ x_2 = \alpha_1 x_2' + \alpha_2 x_2'' \leq \alpha_1(3) + \alpha_2(3) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 \leq 2, x_2 \leq 3$$

Además, las condiciones de no negatividad se satisfacen porque α_1 y α_2 son no negativos.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.1A

1. Compruebe que el conjunto $Q = \{x_1,x_2|x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ es convexo. ¿Es esencial la condición de no negatividad para la comprobación?

***2.** Demuestre que el conjunto $Q = \{x_1,x_2|x_1 \geq 1$ o $x_2 \geq 2\}$ no es convexo.

3. Determine gráficamente los puntos extremos del siguiente conjunto convexo:

$$Q = \{x_1, x_2|x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Demuestre que el espacio de soluciones factibles completo puede determinarse como una combinación convexa de sus puntos extremos. Por consiguiente concluimos que cualquier espacio de soluciones convexo (limitado) queda totalmente definido una vez que se conocen sus puntos extremos.

4. En el espacio de soluciones de la figura 7.2 (trazada a escala), exprese el punto interior (3,1) como una combinación convexa de los puntos extremos A, B, C y D determinando los pesos asociados con cada punto extremo.

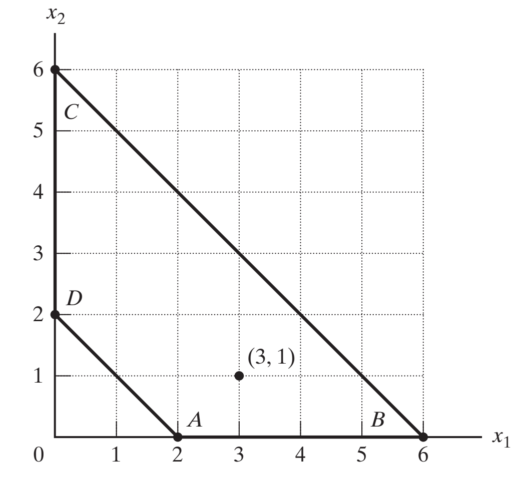


FIGURA 7.2
Espacio de soluciones para el problema 4, conjunto 7.1a

7.1.1 Desde los puntos extremos hasta las soluciones básicas

Es conveniente expresar el problema general de PL en forma de ecuación (vea la sección 3.1) utilizando notación matricial.[1] Defina **X** como un vector *n* que representa las variables, **A** como una matriz ($m \times n$) que representa los coeficientes de restricción, **b** como un vector columna que representa el lado derecho, y **C** como un vector *n* que representa los coeficientes de la función objetivo. La PL se escribe entonces como

$$\text{Maximizar o minimizar } z = \mathbf{CX}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Utilizando el formato del capítulo 3, los *m* elementos más a la derecha de **X** representan las variables básicas iniciales. De ahí que las *m* columnas más a la derecha de **A** siempre forman una matriz de identidad **I**.

Una **solución básica** de $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ se determina igualando las $n - m$ variables a cero, y luego resolviendo las *m* ecuaciones resultantes en las *m* incógnitas restantes, *siempre que la solución resultante sea única*. Dada esta definición, la teoría de programación lineal establece el siguiente resultado entre la definición geométrica de los puntos extremos y la definición algebraica de las soluciones básicas:

$$\text{Puntos extremos de } \{\mathbf{X} \mid \mathbf{AX} = \mathbf{b}\} \Leftrightarrow \text{Soluciones básicas de } \mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

La relación indica que las soluciones básicas de $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ definen los puntos extremos del espacio de soluciones de la PL, y viceversa. Por lo tanto, las soluciones básicas de $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ proporcionan toda la información necesaria para determinar la solución óptima del problema de la PL. Además, la restricción de no negatividad, $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, limita la búsqueda del óptimo a sólo las soluciones básicas *factibles*.

[1]En el apéndice D, en el sitio web, se repasa el álgebra matricial.

Para formalizar la definición de una solución básica, el sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ se escribe en forma vectorial como

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}$$

El vector $\mathbf{P}_j$ es la columna j-ésima de $\mathbf{A}$. Un subconjunto de m vectores forma una **base**, $\mathbf{B}$, si, y sólo si, los m vectores seleccionados son **linealmente independientes**. En este caso, la matriz $\mathbf{B}$ es **no singular**. Definiendo $\mathbf{X}_B$ como un vector m de las variables básicas, entonces

$$\mathbf{BX}_B = \mathbf{b}$$

Utilizando la inversa $\mathbf{B}^{-1}$, la solución básica asociada es

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Si $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{X}_B$ es factible. Las $n - m$ variables restantes son **no básicas** en el nivel cero.

El resultado anterior muestra que en un sistema de m ecuaciones y n incógnitas, la cantidad *máxima* de soluciones básicas (factibles y no factibles) es $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n - m)!}$.

Ejemplo 7.1-2

Determine todas las soluciones factibles y no factibles del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La siguiente tabla resume los resultados. (La inversa de $\mathbf{B}$ se determina por uno de los métodos de la sección D.2.7 en el sitio web).

B	$\mathbf{BX}_B = \mathbf{b}$	Solución	Tipo
$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$	Factible
$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3)$	(No es una base porque $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_3$ son dependientes)		
$(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$	No factible

También podemos investigar el problema expresándolo en forma vectorial como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Los vectores bidimensionales $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ y $\mathbf{b}$ pueden representarse genéricamente como $(a_1, a_2)^T$. En la figura 7.3 aparecen gráficas de estos vectores en el plano (a_1, a_2). Por ejemplo, para $\mathbf{b} = (4, 2)^T$, $a_1 = 4$ y $a_2 = 2$.

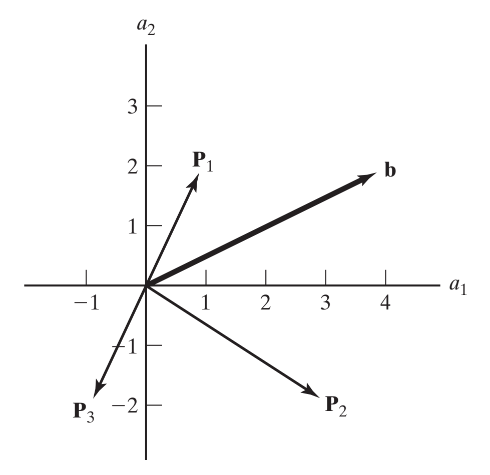


FIGURA 7.3

Representación vectorial del espacio de soluciones de PL

Como se trata de dos ecuaciones ($m = 2$), una base incluye exactamente dos vectores, seleccionados de entre $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$. Las matrices ($\mathbf{P}_1$,$\mathbf{P}_2$) y ($\mathbf{P}_2$,$\mathbf{P}_3$) forman bases porque sus vectores asociados son independientes. Por otra parte, los vectores de la matriz ($\mathbf{P}_1$,$\mathbf{P}_3$) son dependientes, y por consiguiente la matriz no es una base.

Algebraicamente, una matriz (cuadrada) forma una base si su determinante no es cero (vea la sección D.2.5 en el sitio web). Los siguientes cálculos muestran que las combinaciones ($\mathbf{P}_1$,$\mathbf{P}_2$) y ($\mathbf{P}_2$,$\mathbf{P}_3$) son bases, y que la combinación ($\mathbf{P}_1$,$\mathbf{P}_3$) no lo es.

$$\det(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (1 \times -2) - (2 \times 3) = -8 \neq 0$$

$$\det(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) = \det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = (3 \times -2) - (-1 \times -2) = -8 \neq 0$$

$$\det(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = (1 \times -2) - (-1 \times 2) = 0$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.1B

1. En los siguientes conjuntos de ecuaciones, (a) y (b) tienen soluciones únicas (básicas), (c) tiene una cantidad infinita de soluciones, y (d) no tiene solución. Demuestre que estos resultados pueden verificarse por medio de una representación vectorial gráfica. Con este ejercicio, establezca las condiciones generales para la dependencia o independencia vectorial que conduzcan a una solución única, a una infinidad de soluciones, o a ninguna solución.

(a) $x_1 + 3x_2 = 2$
$3x_1 + x_2 = 3$

(b) $2x_1 + 3x_2 = 1$
$2x_1 - x_2 = 2$

(c) $2x_1 + 6x_2 = 4$
$x_1 + 3x_2 = 2$

(d) $2x_1 - 4x_2 = 2$
$-x_1 + 2x_2 = 1$

2. Use vectores para determinar gráficamente el tipo de solución de cada uno de los conjuntos de ecuaciones siguientes: solución única, una infinidad de soluciones, o ninguna so-

lución. Para los casos de soluciones únicas, indique a partir de la representación vectorial (y sin resolver las ecuaciones algebraicamente) ya sea que los valores de x_1 y x_2 sean positivos, cero o negativos.

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

***(b)** $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

***(d)** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

***(f)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}x_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Determine si cualquiera de las siguientes combinaciones forma una base.

***(a)** $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$
(b) $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4)$
(c) $(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$
***(d)** $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$

4. ¿Cierto o falso?

(a) El sistema $\mathbf{BX} = \mathbf{b}$ tiene una solución única si $\mathbf{B}$ es no singular.
(b) El sistema $\mathbf{BX} = \mathbf{b}$ no tiene solución si $\mathbf{B}$ es singular y $\mathbf{b}$ es independiente de $\mathbf{B}$.
(c) El sistema $\mathbf{BX} = \mathbf{b}$ tiene una infinidad de soluciones si $\mathbf{B}$ es singular y $\mathbf{b}$ es dependiente.

7.1.2 Tabla simplex generalizada en forma matricial

Esta sección desarrolla la tabla simplex general en forma matricial. Esta representación es la base para desarrollos subsiguientes en el capítulo.

Considere la PL en forma de ecuación:

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX}, \text{ sujeto a } \mathbf{AX} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

De forma equivalente, el problema puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Suponga que $\mathbf{B}$ es una base factible del sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, y sea $\mathbf{X}_B$ el vector correspondiente de variables básicas y $\mathbf{C}_B$ su vector objetivo asociado. Dado que todas las variables no básicas son cero, la solución se calcula entonces como

$$\begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C}_B \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

(La inversión de matrices particionadas se da en la sección D.2.7 en el sitio web).

La tabla simplex completa en forma matricial puede derivarse a partir de la ecuación original como

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Las manipulaciones de la matriz obtienen entonces las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Dado el vector j-ésimo $\mathbf{P}_j$ de $\mathbf{A}$, la columna de la tabla simplex asociada con la variable x_j puede escribirse como

Básica	x_j	Solución
z	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j$	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

De hecho, la tabla anterior es la misma que se utilizó en el capítulo 3 (vea el problema 5 del conjunto 7.1c). También incluye todas las relaciones primales-duales, desarrolladas en la sección 4.2.4. Una propiedad importante de esta tabla es que la inversa $\mathbf{B}^{-1}$, es el único elemento que cambia con una nueva iteración, lo que indica que *toda* la tabla puede generarse a partir de los datos originales una vez que se conoce la inversa $\mathbf{B}^{-1}$. A este respecto, el error de redondeo computacional en cualquier tabla puede controlarse al controlar la precisión de $\mathbf{B}^{-1}$. Este resultado es una de las razones principales para el desarrollo del método simplex revisado en la sección 7.2.

Ejemplo 7.1-3

Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Genere la tabla simplex asociada con la base $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2)$.

Dada $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2)$, entonces $\mathbf{X}_B = (x_1,x_2)^T$ y $\mathbf{C}_B = (1,4)$. Por tanto,

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Obtenemos entonces

$$\mathbf{X}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Para calcular las columnas de restricción en el cuerpo de la tabla, tenemos

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego calculamos la fila objetivo como

$$\mathbf{C}_B(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4)) - \mathbf{C} = (1, 4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - (1, 4, 7, 5) = (0, 0, 1, -3)$$

Por último, calculamos el valor de la función objetivo como

$$z = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{C}_B\mathbf{X}_B = (1, 4)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 19$$

Por lo tanto, la tabla completa puede resumirse como sigue.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	1	–3	19
x_1	1	0	0	2	3
x_2	0	1	2	0	4

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.1C

*1. En el ejemplo 7.1-3, considere $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_3,\mathbf{P}_4)$. Demuestre que la solución básica correspondiente es factible, y luego genere la tabla simplex correspondiente.

2. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \qquad &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Verifique si cada una de las siguientes matrices forma una base (factible o no factible): $(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2)$, $(\mathbf{P}_2,\mathbf{P}_3)$, $(\mathbf{P}_3,\mathbf{P}_4)$.

3. En la siguiente PL, calcule la tabla simplex completa asociada con $\mathbf{X}_B = (x_1,x_2,x_5)^T$.

$$\text{Minimizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

*4. La siguiente es una tabla de PL óptima:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	0	0	3	2	?
x_3	0	0	1	1	–1	2
x_2	0	1	0	1	0	6
x_1	1	0	0	–1	1	2

Las variables x_3, x_4 y x_5 son holguras en el problema original. Use manipulaciones de matriz para reconstruir la PL original, y luego calcule el valor objetivo óptimo.

5. En la tabla simplex matriz, suponga que $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_\mathrm{I},\mathbf{X}_\mathrm{II})^T$, donde $\mathbf{X}_\mathrm{II}$ corresponde a una solución básica *inicial* típica (compuesta de variables de holgura y/o artificiales) con $\mathbf{B} = \mathbf{1}$, y sean $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_\mathrm{I},\mathbf{C}_\mathrm{II})$ y $\mathbf{A} = (\mathbf{D},\mathbf{I})$ las particiones correspondientes de $\mathbf{C}$ y $\mathbf{A}$, respectivamente. Demuestre que la tabla simplex matriz se reduce a la misma forma utilizada en el capítulo 3; es decir,

Básica	$\mathbf{X_I}$	$\mathbf{X_{II}}$	Solución
z	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{C_I}$	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{C_{II}}$	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{X}_B$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

7.2 MÉTODO SIMPLEX REVISADO

La sección 7.1.1 muestra que la solución óptima de un programa lineal siempre está asociada con una solución básica (factible). El método simplex busca pasar de una base factible, $\mathbf{B}$ a una base mejor (en realidad, no a una peor), $\mathbf{B}_{\text{siguiente}}$ hasta que se alcance la base óptima.

Los pasos iterativos del método simplex revisado son *exactamente los mismos* que en el método de la *tabla* simplex presentado en el capítulo 3. La diferencia principal es que los cálculos en el método revisado se basan en manipulaciones de matriz y no en operaciones de filas. Como la tabla simplex completa puede calcularse a partir de los datos *originales* y la inversa actual (vea la sección 7.1.2), controlando la precisión del cálculo de $\mathbf{B}^{-1}$ puede mitigarse el error de redondeo de máquina. En el método de la tabla simplex del capítulo 3, cuando se genera una nueva tabla a partir de la inmediatamente precedente el error de redondeo se propaga.

7.2.1 Desarrollo de las condiciones de optimalidad y factibilidad

El problema de PL puede escribirse como

$$\text{Maximizar o minimizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ sujeto a } \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b},\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

Dados el vector básico $\mathbf{X}_B$, su base $\mathbf{B}$, y su vector objetivo $\mathbf{C}_B$, la tabla simplex general desarrollada en la sección 7.1.2 muestra que cualquier iteración simplex puede representarse mediante las siguientes ecuaciones:

$$z + \sum_{j=1}^{n} (z_j - c_j)x_j = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$(\mathbf{X}_B)_i + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i x_j = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i$$

El **costo reducido de** x_j tal como se definió en la sección 4.3.2, se calcula como

$$z_j - c_j = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j$$

La notación $(\mathbf{V})_i$ representa el elemento i del vector $\mathbf{V}$.

Condición de optimalidad. La ecuación z muestra que, en el caso de maximización, un incremento de la variable x_j no básica por encima de su valor cero actual puede mejorar el valor de z (con respecto a su valor actual, $\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$) sólo si $z_j - c_j < 0$. Para minimización, la condición es $z_j - c_j > 0$. Por lo tanto, el **vector de entrada** se selecciona como el vector no básico con la condición $z_j - c_j$ *más* negativa (*más* positiva) en caso de maximización (minimización).

Condición de factibilidad. Dado el vector de entrada $\mathbf{P}_j$ determinado por la condición de optimalidad, las ecuaciones de restricción se reducen a

$$(\mathbf{X}_B)_i = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i x_j$$

(Recuerde que las $n - 1$ variables no básicas restantes son cero.) La idea es (tratar de) incrementar x_j por encima del nivel cero, reemplazando una de las variables básicas actuales. El requisito de que todas las $(\mathbf{X}_B)$ permanezcan no negativas lo dicta el grado al cual se incrementa x_j; es decir,

$$(\mathbf{X}_B)_i = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i x_j \geq \mathbf{0}$$

Si $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j) > 0$ con al menos una i, la condición de no negatividad $(\mathbf{X}_B) \geq \mathbf{0}$ todas las i, establece el límite en el incremento máximo del valor de la variable de entrada x_j; a saber,

$$x_j = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i} \,\middle|\, (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i > 0 \right\}$$

Suponga que $(\mathbf{X_B})_k$ es la variable no básica que corresponde a la relación mínima. Se desprende entonces que $\mathbf{P}_k$ debe ser el **vector de salida**, y su variable asociada (básica) debe volverse no básica (en el nivel cero) en la siguiente iteración simplex.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.2A

*1. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar z} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4$$

sujeto a

$$\mathbf{P}_1x_1 + \mathbf{P}_2x_2 + \mathbf{P}_3x_3 + \mathbf{P}_4x_4 = \mathbf{b}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ y $\mathbf{P}_4$ se muestran en la figura 7.4. Suponga que la base $\mathbf{B}$ de la iteración actual se compone de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$.

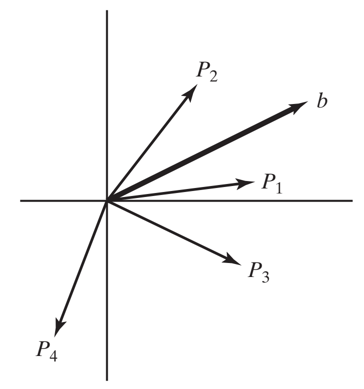


FIGURA 7.4

Representación vectorial del problema 1, conjunto 7.2a

(a) Si el vector $\mathbf{P}_3$ entra a la base, ¿cuál de los dos vectores básicos actuales debe salir para que la solución básica resultante sea factible?

(b) ¿Puede el vector $\mathbf{P}_4$ formar parte de una base factible?

*__2.__ Compruebe que, en cualquier iteración simplex, $z_j - c_j = 0$ para todas las variables *básicas* asociadas.

3. Compruebe que si $z_j - c_j > 0$ (<0) para todas las variables no básicas x_j de un problema de PL de maximización (minimización), entonces la solución óptima es única. De lo contrario, si $z_j - c_j$ es igual a cero para una x_j no básica, entonces el problema tiene una solución óptima alternativa.

4. En una solución básica inicial con holguras en la base (totales), demuestre que al utilizar la forma matricial de la tabla, en vez del procedimiento mecánico utilizado en la sección 3.3, en el cual la ecuación objetivo se establece como

$$z - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 0$$

se calcula automáticamente la condición $z_j - c_j$ para todas las variables en la tabla de inicio.

5. Utilizando la forma matricial de la tabla simplex, demuestre que en una solución básica inicial totalmente artificial, el procedimiento de la sección 3.4.1 que sustituye a las variables artificiales en la función objetivo (por medio de ecuaciones de restricción), en realidad calcula la $z_j - c_j$ para todas las variables en la tabla de inicio.

6. Considere una PL en la cual la variable x_k no está restringida en cuanto a signo. Compruebe que sustituyendo $x_k = x_k^- - x_k^+$, donde x_k^- y x_k^+ son no negativas, es imposible que las dos variables se reemplacen en entre sí en una solución óptima alternativa.

*__7.__ Dada la programación lineal en forma de ecuación con m ecuaciones y n incógnitas, determine el máximo de puntos extremos *adyacentes* a los que se puede llegar desde un punto extremo no degenerado (todas las variables básicas son > 0) del espacio de soluciones.

8. Al aplicar la condición de factibilidad del método simplex, suponga que $x_r = 0$ es una variable básica y que x_j es la variable de entrada con $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r \neq \mathbf{0}$. Demuestre que la solución básica resultante permanece factible aun cuando $(\mathbf{B}^{-}\mathbf{P}_j)_r$ sea negativa.

9. En la implementación de la condición de factibilidad del método simplex, ¿especifica las condiciones matemáticas para encontrar una solución degenerada (al menos una variable básica = 0) por primera vez? ¿Para seguir obteniendo una solución degenerada en la siguiente iteración? ¿Para eliminar la degeneración en la siguiente iteración?

*__10.__ ¿Cuáles son las relaciones entre los puntos extremos y las soluciones básicas en las situaciones de degeneración y no degeneración? ¿Cuál es el número máximo de iteraciones que pueden realizarse en un punto extremo dado suponiendo que no hay ciclado?

*__11.__ Considere la PL, maximizar $z = \mathbf{CX}$ sujeto a $\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, donde $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Suponga que el vector de entrada $\mathbf{P}_j$ es tal que por lo menos un elemento de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$ es positivo.

(a) Si $\mathbf{P}_j$ se reemplaza con $\alpha\mathbf{P}_j$, donde α es un escalar positivo, y siempre que x_j permanezca como la variable de entrada, halle la relación entre los valores de x_j correspondientes a $\mathbf{P}_j$ y $\alpha\mathbf{P}_j$.

(b) Responda el inciso (a) si, además, **b** se reemplaza con $\beta\mathbf{b}$ donde β es un escalar positivo.

12. Considere la PL

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX} \text{ sujeto a } \mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \text{ donde } \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

Después de obtener la solución óptima, se sugiere que una variable no básica x_j puede hacerse básica (rentable) reduciendo los requerimientos de recursos por unidad de x_j a $\frac{1}{\alpha}$ de sus valores originales, $\alpha > 1$. Como los requerimientos por unidad se reducen, se espera que la utilidad por unidad de x_j también se reducirá a $\frac{1}{\alpha}$ de su valor original. ¿Harán estos cambios que x_j se transforme en una variable rentable? Explíquelo matemáticamente.

13. Considere la PL

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX} \text{ sujeto a } (\mathbf{A}, \mathbf{I})\,\mathbf{X} = \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Defina a $\mathbf{X}_B$ como el vector básico actual con **B** como su base asociada y $\mathbf{C}_B$ como su vector de coeficientes objetivos. Demuestre que si $\mathbf{C}_B$ se reemplaza con los nuevos coeficientes de $\mathbf{D}_B$, los valores de $z_j - c_j$ para el vector básico $\mathbf{X}_B$ permanecerán iguales a cero. ¿Cuál es la importancia de este resultado?

7.2.2 Algoritmo simplex revisado

Paso 0. Construya una solución factible básica de inicio, y sean **B** y $\mathbf{C}_B$ su base asociada y el vector de coeficientes objetivo, respectivamente.

Paso 1. Calcule la inversa $\mathbf{B}^{-1}$ de la base **B** por medio de un método de inversión apropiado.[2]

Paso 2. Para cada vector *no básico* $\mathbf{P}_j$ calcule

$$z_j - c_j = \mathbf{C}_B\,\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j$$

Si $z_j - c_j \geq 0$ en maximización (≤ 0 en minimización) para todos los vectores no básicos, deténgase; la solución óptima es $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $z = \mathbf{C}_B\mathbf{X}_B$.

En caso contrario, determine el vector de *entrada* P_j que tiene el valor $z_j - c_j$ más negativo (positivo) en caso de maximización (minimización) entre todos los vectores no básicos.

Paso 3. Calcule $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$. Si todos los elementos de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j$ son negativos o cero, deténgase; la solución es no acotada. En caso contrario, use la prueba de relación para determinar el vector de *salida* $\mathbf{P}_j$.

Paso 4. Forme la siguiente base reemplazando el vector de *salida* $\mathbf{P}_i$ con el vector de *entrada* $\mathbf{P}_j$ en la base actual **B**. Diríjase al paso 1 para iniciar una nueva iteración.

---

[2]En la mayoría de las presentaciones de PL, incluidas las primeras seis ediciones de este libro, el método de *forma de producto* para invertir una base (vea la sección D.2.7 en el sitio web) se integra en el algoritmo simplex revisado porque la *forma de producto* se presta fácilmente para los cálculos simplex revisados; es decir, las bases sucesivas difieren en exactamente una columna. Este detalle se eliminó en esta presentación porque hace que el algoritmo parezca más complejo de lo que realmente es. Por otra parte, rara vez se utiliza la *forma de producto* en el desarrollo de códigos de PL comerciales, porque no está diseñado para cálculos automáticos en los que los errores mecánicos de redondeo son un problema serio. En su lugar, se utiliza algún método de análisis numérico avanzado, como el método de *Descomposición de LU* para calcular la inversa. (Dicho sea de paso, la inversión de matrices con TORA se basa en la descomposición de LU.)

Ejemplo 7.2-1

El modelo de Reddy Mikks (sección 2.1) se resolvió con el algoritmo simplex revisado. El mismo modelo se resolvió por el método de la tabla simplex en la sección 3.3.2. Una comparación muestra que los dos métodos son iguales.

La forma de ecuación del modelo de Reddy Mikks puede expresarse en forma de matriz como

$$\text{maximizar } z = (5, 4, 0, 0, 0, 0)\,(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

sujeto a

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_6 \geq 0$$

La notación $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_6)$ representa los coeficientes de la función objetivo, y $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_6)$ representan los vectores columna de las ecuaciones de restricción. El lado derecho de las restricciones es el vector **b**.

En los cálculos siguientes, daremos la fórmula algebraica para cada paso y su respuesta numérica final, sin detallar los cálculos. Verá que es instructivo llenar los espacios vacíos en cada paso.

Iteración 0

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_3, x_4, x_5, x_6),\ \mathbf{C}_{B_0} = (0, 0, 0, 0)$$
$$\mathbf{B}_0 = (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) = \mathbf{I},\ \mathbf{B}_0^{-1} = \mathbf{I}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{X}_{B_0} = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b} = (24,\ 6,\ 1,\ 2)^T,\ z = \mathbf{C}_{B_0}\mathbf{X}_{B_0} = 0$$

Cálculos de optimalidad:

$$\mathbf{C}_{B_0}\mathbf{B}_0^{-1} = (0, 0, 0, 0)$$
$$\{z_j - c_j\}_{j=1,2} = \mathbf{C}_{B_0}\mathbf{B}_0^{-1}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) - (c_1, c_2) = (-5,\ -4)$$

Por lo tanto, $\mathbf{P}_1$ es el vector de entrada.

Cálculos de factibilidad:

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (24,\ 6, 1,\ 2)^T$$
$$\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{P}_1 = (6, 1, -1, 0)^T$$

Por consiguiente,

$$x_1 = \text{mín}\left\{\frac{24}{6}, \frac{6}{1}, -, -\right\} = \text{mín}\{\mathbf{4}, 6, -, -\} = 4$$

y $\mathbf{P}_3$ se convierte en el vector de salida.

Los resultados anteriores se resumen en el conocido formato de tabla simplex, y en esencia demuestran que los dos métodos son lo mismo.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	–5	–4	0	0	0	0	0
x_3	6						24
x_4	1						6
x_5	–1						1
x_6	0						2

Iteración 1

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_1, x_4, x_5, x_6),\ \mathbf{C}_{B_1} = (5, 0, 0, 0)$$

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando un método de inversión apropiado (vea la sección D.2.7 en el sitio web), entonces

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{X}_{B_1} = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = (4, 2, 5, 2)^T, z = \mathbf{C}_{B_1}\mathbf{X}_{B_1} = 20$$

Cálculos de optimalidad:

$$\mathbf{C}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1} = (\tfrac{5}{6}, 0, 0, 0)$$

$$\{z_j - c_j\}_{j=2,3} = \mathbf{C}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) - (c_2, c_3) = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{5}{6})$$

Así que, $\mathbf{P}_2$ es el vector de entrada.

Cálculos de factibilidad:

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_1, x_4, x_5, x_6)^T = (4,\ 2,\ 5,\ 2)^T$$

$$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_2 = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}, 1)^T$$

Por consiguiente,

$$x_2 = \text{mín}\left\{\frac{4}{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\frac{4}{3}}, \frac{5}{\frac{5}{3}}, \frac{2}{1}\right\} = \text{mín}\left\{6, \tfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, 3, 2\right\} = \tfrac{3}{2}$$

El vector $\mathbf{P}_4$ sale de la base. (Verá que es útil resumir estos resultados en el formato de tabla simplex como se hizo en la iteración 0.)

Iteración 2

$$\mathbf{X}_{B_2} = (x_1, x_2, x_5, x_6)^T,\ \mathbf{C}_{B_2} = (5, 4, 0, 0)$$

$$\mathbf{B}_2 = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De modo que,

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\mathbf{X}_{B_2} = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{b} = (3, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2})^T, z = \mathbf{C}_{B_2}\mathbf{X}_{B_2} = 21$$

Cálculos de optimalidad:

$$\mathbf{C}_{B_2}\mathbf{B}_2^{-1} = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}, 0, 0)$$

$$\{z_j - c_j\}_{j=3,4} = \mathbf{C}_{B_2}\mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4) - (c_3, c_4) = (\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2})$$

En consecuencia, $\mathbf{X}_{B_2}$ es óptimo, y los cálculos terminan.

Resumen de la solución óptima:

$$x_1 = 3, x_2 = 1.5, z = 21$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.2B

1. En el ejemplo 7.2-1, resuma los datos de la iteración 1 en el formato de tabla de la sección 3.3.

2. Resuelva las siguientes programaciones lineales por medio del método simplex revisado.

(a) Maximizar $z = 6x_1 - 2x_2 + 3x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 2 \\ x_1 + 4x_3 &\le 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

*(b) Maximizar $z = 2x_1 + x_2 + 2x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\le 12 \\ 4x_1 + x_2 + 12x_3 &\le 8 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 &\le 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(c) Minimizar $z = 2x_1 + x_2$
sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(d) Minimizar $z = 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 8x_4$
sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 7x_4 &\leq 46 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &\geq 18 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Resuelva la siguiente PL mediante el método simplex revisado dado el vector factible básico inicial $\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_4, x_5)^T$.

$$\text{Minimizar } z = 7x_2 + 11x_3 - 10x_4 + 26x_6$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 + x_5 + x_6 &= 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 + 3x_6 &= 8 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

4. Resuelva lo siguiente utilizando el método simplex revisado de dos fases:

(a) Problema 2(c).

(b) Problema 2(d).

(c) Problema 3 (ignore la $\mathbf{X}_{B_0}$ dada de inicio).

5. *Método simplex dual revisado*. Los pasos de este método (utilizando manipulaciones de matriz) se resumen como sigue:

Paso 0. Sea $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}$ la base de inicio para la cual por lo menos uno de los elementos de $\mathbf{X}_{B_0}$ es negativo (no factible).

Paso 1. Calcule $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, los valores actuales de las variables básicas. Seleccione la variable de salida x_r como la que tiene el valor más negativo. Si todos los elementos de $\mathbf{X}_B$ son no negativos, deténgase; la solución actual es factible (y óptima).

Paso 2. **(a)** Calcule $z_j - c_j = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j$ para todas las variables no básicas x_j.

(b) Para todas las variables no básicas x_j, calcule los coeficientes de restricción $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r$ asociados con la fila de la variable de salida x_r.

(c) La variable de entrada está asociada con

$$\theta = \min_i \left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r} \right|, (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r < 0 \right\}$$

Si todas las $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_r \geq 0$, hay una solución no factible.

Paso 3. Obtenga la nueva base intercambiando los vectores de entrada y de salida ($\mathbf{P}_j$ y $\mathbf{P}_r$). Calcule la nueva inversa y vaya al paso 1.

Aplique el método al siguiente problema:

$$\text{Minimizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 \geq 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

7.3 ALGORITMO DE VARIABLES ACOTADAS

En modelos de PL, las variables pueden tener cotas superiores e inferiores explícitas. Por ejemplo, en instalaciones de producción, las cotas inferior y superior pueden representar las demandas mínimas y máximas de determinados productos. Las variables acotadas también surgen de forma prominente al resolver programas enteros mediante el algoritmo de ramificación y acotamiento (vea la sección 9.3.1).

El algoritmo de acotamiento es computacionalmente eficiente porque tiene en cuenta *de manera implícita* a las cotas. Primero consideramos las cotas inferiores porque su tratamiento es sencillo. Dada $\mathbf{X} \geq \mathbf{L}$, sustituya $\mathbf{X} = \mathbf{L} + \mathbf{X}'$, $\mathbf{X}' \geq \mathbf{0}$ y resuelva el problema en función de $\mathbf{X}'$ (cuya cota inferior ahora es igual a cero). La $\mathbf{X}$ original se determina entonces mediante una sustitución inversa, $\mathbf{X} = \mathbf{X}' + \mathbf{L} \geq \mathbf{0}$.

Luego considere las restricciones de acotamiento superior, $\mathbf{X} \leq \mathbf{U}$. La idea de sustitución directa (es decir, $\mathbf{X} = \mathbf{U} - \mathbf{X}''$, $\mathbf{X}'' \geq \mathbf{0}$) no es correcta porque la sustitución inversa $\mathbf{X} = \mathbf{U} - \mathbf{X}''$, no garantiza que $\mathbf{X}$ permanecerá no negativa. Por lo tanto, se requiere un procedimiento diferente.

Defina el modelo de PL de acotamiento superior como

$$\text{Maximizar } z = \left\{\mathbf{CX} | (\mathbf{A},\mathbf{I})\,\mathbf{X} = \mathbf{b}, \mathbf{0} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{U}\right\}$$

El algoritmo de acotamiento utiliza sólo las restricciones principales $(\mathbf{A},\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{b}$, $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$. Tiene en cuenta las cotas superiores $\mathbf{X} \leq \mathbf{U}$, implícitamente al modificar la condición de factibilidad.

Sea $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ una solución factible básica actual de $(\mathbf{A},\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{b}$, $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, y suponga que $\mathbf{P}_j$ es el vector de entrada (tal como lo determina la condición de optimalidad). Entonces, *dado que todas las variables no básicas son cero*, la ecuación de restricción de la i-ésima variable básica es

$$(\mathbf{X}_B)_i = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i\, x_j$$

Cuando la variable de entrada x_j se incrementa por encima del nivel cero $(\mathbf{X}_B)$ *se incrementará o decrecerá* según si $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i$ es negativa o positiva, respectivamente. Por lo tanto, al determinar el valor del vector de entrada $\mathbf{P}_j$, deben satisfacerse tres condiciones.

1. La variable básica permanece no negativa, es decir $(\mathbf{X}_B)_i \geq \mathbf{0}$.
2. La variable básica $(\mathbf{X}_B)_i$ no excede su cota superior, es decir $(\mathbf{X}_B)_i \leq (\mathbf{U}_B)_i$ donde $\mathbf{U}_B$ comprende los elementos de $\mathbf{U}$ correspondientes a $\mathbf{X}_B$.

3. La variable de entrada x_j no puede asumir un valor mayor que su cota superior, es decir, $x_j \leq u_j$, donde u_j es el elemento j-ésimo de **U**.

La primera condición $(\mathbf{X_B})_i \geq 0$ es la misma que en el método simplex regular. Da por resultado

$$x_j \leq \theta_1 = \min_i \left\{ \frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j)_i} \middle| \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j\right)_i > 0 \right\}$$

La segunda condición $(\mathbf{X}_B)_i \leq (\mathbf{U}_B)_i$ especifica que

$$\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\right)_i - \left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j\right)_i x_j \leq \left(\mathbf{U}_B\right)_i$$

Se satisface si

$$x_j \leq \theta_2 = \min_i \left\{ \frac{\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}\right)_i - \left(\mathbf{U}_B\right)_i}{\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j\right)_i} \middle| \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_{ji} < 0 \right\}$$

Combinando las tres restricciones, x_j entra a la solución en el nivel que satisface las tres condiciones, es decir,

$$x_j = \min \{\theta_1, \theta_2, u_j\}$$

El cambio de base para la siguiente iteración depende de si x_j, o u_j (cualquiera de las dos), introduce la solución en el nivel θ_1, θ_2. Suponiendo que $(\mathbf{X}_B)_r$ es la variable de salida, entonces tenemos las siguientes reglas:

1. $x_j = \theta_1$: $(\mathbf{X}_B)_r$ sale de la solución básica (se vuelve no básica) en el nivel cero. La nueva iteración se genera con el método simplex regular con x_j y $(\mathbf{X}_B)_r$ como las variables de entrada y salida, respectivamente.
2. $x_j = \theta_2$: $(\mathbf{X}_B)_r$ se vuelve no básica *en su cota superior*. La nueva iteración se genera como en el caso de $x_j = \theta_1$, con una modificación que tiene en cuenta el hecho de que $(\mathbf{X}_B)_r$ será no básica en la *cota superior*. Como los valores de θ_1 y θ_2 requieren que *todas las variables no básicas estén en el nivel cero* (¡convénzase de que éste es el caso!), la nueva $(\mathbf{X}_B)_r$ no básica, en la cota superior se convierte en una variable no básica en el nivel cero. Eso se logra con la sustitución de $(\mathbf{X}_B)_r = (\mathbf{U}_B)_r - (\mathbf{X}'_B)_r$, donde $(\mathbf{X}'_B)_r \geq 0$. Es intrascendente si la sustitución se hace antes o después de que se calcule la nueva base.
3. $x_j = u_j$: El vector básico X_B no cambia porque $x_j = u_j$ se detiene antes de hacer que cualquiera de las variables básicas actuales alcance su cota inferior (= 0) o cota superior. Esto significa que x_j permanecerá no básica *pero en la cota superior. El único cambio requerido en la tabla es utilizar la sustitución* ($x_j = u_j - x'_j$) para garantizar que todas las variables no básicas están en el nivel cero.

Un empate entre θ_1, θ_2 y u_j puede romperse arbitrariamente. Sin embargo, es preferible, siempre que sea posible, implementar la regla de $x_j = u_j$ porque implica menos cálculos.

La sustitución $x_j = u_j - x'_j$ cambiará las c_j, $\mathbf{P}_j$ y $\mathbf{b}$ originales a $c'_j = -c_j$, $\mathbf{P}'_j = -\mathbf{P}_j$ y $\mathbf{b}$ a $\mathbf{b}' = \mathbf{b} - u_j\mathbf{P}_j$. Esto significa que si se utiliza el método simplex revisado, todos los cálculos (p. eje., $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{X}_B$ y $z_j = c_j$) deben basarse en los valores cambiados de $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ en cada iteración (vea el problema 5, conjunto 7.3a, para más detalles).

Ejemplo 7.3-1

Resuelva el siguiente modelo de PL con el algoritmo de acotamiento superior.[3]

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5y + 2x_3$$

sujeto a

$$x_1 + y + 2x_3 \leq 14$$

$$2x_1 + 4y + 3x_3 \leq 43$$

$$0 \leq x_1 \leq 4, 7 \leq y \leq 10, 0 \leq x_3 \leq 3$$

La cota inferior en y se tiene en cuenta para la sustitución $y = x_2 + 7$, donde $0 \leq x_2 \leq 10 - 7 = 3$.

Para que los detalles computacionales no lo "despisten", no utilizaremos el método simplex revisado para realizar los cálculos. En su lugar, utilizaremos la forma de tabla compacta. Los problemas 5, 6 y 7, conjunto 7.3a, abordan la versión revisada del algoritmo.

Iteración 0

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	–3	–5	–2	0	0	35
x_4	1	1	2	1	0	7
x_5	2	4	3	0	1	15

Tenemos $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ y $\mathbf{X}_B = (x_4, x_5)^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (7.15)^T$. Dado que x_2 es la variable de entrada ($z_2 - c_2 = -5$), tenemos

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_2 = (1, 4)^T$$

la cual resulta

$$\theta_1 = \text{mín}\left\{\frac{7}{1}, \frac{15}{4}\right\} = 3.75, \text{ correspondiente a } x_5$$

$$\theta_2 = \theta \text{ (porque todos los elementos de } \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_2 > \mathbf{0})$$

Luego, dada la cota superior en la variable de entrada, $x_2 \leq 3$, por consiguiente

$$x_2 = \text{mín}\{3.75, \infty, 3\} = 3$$

[3]Puede utilizar la secuencia de opciones Linear Programming ⇒ Solve problem ⇒ Algebraic ⇒ Iterations ⇒ Bounded simplex de TORA para producir las iteraciones simplex asociadas (archivo *toraEx7.3-1.txt).*

Como $x_2 = u_2$, $\mathbf{X}_B$ no cambia, y x_2 se vuelve no básica *en su cota superior*. La sustitución de $x_2 = 3 - x_2'$ da por resultado la nueva tabla siguiente:

Básica	x_1	x_2'	x_3	x_4	x_5	Solución
z	–3	5	–2	0	0	50
x_4	1	–1	2	1	0	4
x_5	2	–4	3	0	1	3

La sustitución cambia el vector del lado derecho original de $\mathbf{b} = (7.15)^T$ a $\mathbf{b}' = (4.3)^T$. Por lo tanto, $\mathbf{b}'$ reemplaza a $\mathbf{b}$ en iteraciones futuras.

Iteración 1

La variable de entrada es x_1. El vector básico $\mathbf{X}_B$ y $\mathbf{B}^{-1}$ (= $\mathbf{I}$) son los mismos que en la iteración 0. Luego, dado $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_1 = (1.2)^T$.

$$\theta_1 = \text{mín}\left\{\frac{4}{1}, \frac{3}{2}\right\} = 1.5, \text{ correspondiiente a la } x_5 \text{ básica}$$

$$\theta_2 = \infty \text{ (porque } \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_1 > \mathbf{0})$$

Por lo tanto,

$$x_1 = \text{mín } \{1.5, \infty, 4\} = 1.5$$

Como $x = \theta_1$, la variable de entrada x_1 se vuelve básica y la variable de salida x_5 se vuelve no básica en el nivel cero, lo cual da por resultado

Básica	x_1	x_2'	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	–1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{109}{2}$
x_4	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_1	1	–2	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Iteración 2

La nueva inversa es

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora, $\mathbf{X}_B = (x_4, x_1)^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$,donde $\text{b}' = (4, 3)^T$ como se calculó al final de la iteración 0. Seleccionamos a x_2' como la variable de entrada, y, observando que $\mathbf{P}_2' = -\mathbf{P}_2$, obtenemos

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_2' = (1, -2)^T$$

Por lo tanto,

$$\theta_1 = \text{mín}\left\{\frac{\frac{5}{2}}{1}, -\right\} = 2.5, \text{ correspondiente a la } x_4 \text{ básica}$$

$$\theta_2 = \text{mín}\left\{-, \frac{\frac{3}{2} - 4}{-2}\right\} = 1.25, \text{ correspondiente a la } x_1 \text{ básica}$$

Entonces tenemos

$$x'_2 = \text{mín}\{2.5, 1.25, 3\} = 1.25$$

Como $x'_2 = \theta_1$, x_1 se vuelve no básica en la cota superior y el resultado es la sustitución $x_1 = 4 - x'_1$. La nueva tabla es

Básica	x'_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	–1	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{109}{2}$
x_4	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x'_1	–1	–2	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$

Luego, la variable de entrada x'_2 se vuelve básica y la variable de salida x'_1 se vuelve no básica, de lo cual resulta

Básica	x'_1	x'_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{7}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{223}{4}$
x_4	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x'_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

La última tabla es factible y óptima. Observe que los últimos dos pasos podían haber sido invertidos; es decir, primero podríamos hacer básica a x'_2 y luego aplicar la sustitución $x_1 = 4 - x'_1$, (¡pruébelo!). Sin embargo, la secuencia aquí presentada implica menos cálculos.

Los valores óptimos de x_1, x_2 y x_3 se obtienen mediante sustitución inversa como $x_1 = u_1 - x'_1 = 4 - 0 = 4$, $x_2 = u_2 + x'_2 = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$, y $x_3 = 0$. Finalmente, obtenemos $y = l_2 + x_2 = 7 + \frac{7}{4} = \frac{35}{4}$. El valor óptimo asociado de la función objetivo es $\frac{223}{4}$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.3A

1. Considere el siguiente programa lineal

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_1 \leq 2,\ 0 \leq x_2 \leq 2$$

(a) Resuelva el problema gráficamente, y trace la secuencia de puntos extremos que conduce a la solución óptima. (Puede utilizar TORA).

(b) Resuelva el problema por el algoritmo de acotamiento superior, y demuestre que el método produce la misma secuencia de puntos extremos como en la solución óptima gráfica (puede utilizar TORA para generar las iteraciones).

(c) ¿Cómo reconoce el algoritmo de acotamiento superior los puntos extremos?

***2.** Resuelva el siguiente problema mediante el algoritmo de acotamiento:

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 10x_6$$

sujeto a

$$8x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 \leq 13$$
$$0 \leq x_j \leq 1, j = 1, 2, \ldots, 6$$

3. Resuelva el siguiente problema con el algoritmo de acotamiento:

(a) Minimizar $z = 6x_1 - 2x_2 - 3x_3$
sujeto a

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 7$$
$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 2,\ 0 \leq x_3 \leq 1$$

(b) Maximizar $z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$
sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 15$$
$$0 \leq x_1 \leq 4,\ 0 \leq x_2 \leq 3,\ 0 \leq x_3 \leq 3$$

4. En los siguientes problemas, algunas de las variables tienen cotas inferiores positivas. Use el algoritmo de acotamiento para resolver estos problemas.

(a) Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3$
sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3$$
$$1 \leq x_1 \leq 3,\ 0 \leq x_2 \leq 3,\ 2 \leq x_3$$

(b) Maximizar $z = x_1 + 2x_2$
sujeto a

$$-x_1 + 2x_2 \geq 0$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$1 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 1$$

(c) Maximizar $z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3$
sujeto a

$$4x_1 - x_2 \leq 9$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$$
$$-3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 12$$
$$1 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 5,\ 0 \leq x_3 \leq 2$$

5. Considere la definición de matriz del problema de variables acotadas. Suponga que el vector $\mathbf{X}$ se particiona en $(\mathbf{X}_z, \mathbf{X}_u)$, donde $\mathbf{X}_u$ representa las variables básicas *y* no básicas

que serán sustituidas en la cota superior durante el curso del algoritmo. El problema puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{C}_z & -\mathbf{C}_u \\ 0 & \mathbf{D}_z & \mathbf{D}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \mathbf{X}_z \\ \mathbf{X}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Utilizando $\mathbf{X}_u = \mathbf{U}_u - \mathbf{X}'_u$ donde $\mathbf{U}_u$ es un subconjunto de $\mathbf{U}$ que representa las cotas superiores de $\mathbf{X}_u$, sea $\mathbf{B}$ (y $\mathbf{X}_B$) la base de la iteración simplex actual después de que se haya sustituido $\mathbf{X}_u$. Demuestre que la tabla simplex general asociada se da como

Básica	$\mathbf{X}_z^T$	$\mathbf{X}_u'^T$	Solución
z	$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}_z - \mathbf{C}_z$	$-\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}_u + \mathbf{C}_u$	$\mathbf{C}_u\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{D}_u\mathbf{U}_u) + \mathbf{C}_u\mathbf{U}_u$
X_B	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}_z$	$-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}_u$	$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{D}_u\mathbf{U}_u)$

6. En el ejemplo 7.3-1, haga lo siguiente:

(a) En la iteración 1, compruebe que $\mathbf{X}_B = (x_4, x_1)^T = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)^T$ aplicando manipulaciones matriciales.

(b) En la iteración 2, demuestre como puede calcularse $\mathbf{B}^{-1}$ a partir de los datos originales del problema. Luego verifique los valores dados de x_4 básica y x'_2 aplicando manipulaciones matriciales.

7. Resuelva la parte (a) del problema 3 aplicando la versión (matricial) simplex revisada para variables con cotas superiores.

8. *Algoritmo simplex dual de acotamiento.* El algoritmo simplex dual (sección 4.4.1) se puede modificar para que acepte las variables acotadas como sigue. Dada la restricción de cota superior $x_j \leq u_j$ para toda j (si u_j es infinita, reemplácela con una cota superior suficientemente grande M), el problema de PL se transforma en una factible dual (es decir, primal óptima) al utilizar la sustitución $x_j = u_j - x'_j$, donde sea necesario.

Paso 1. Si cualquiera de las variables básicas actuales $(\mathbf{X}_B)_i$ excede su cota superior, use la sustitución $(\mathbf{X}_B)_i = (\mathbf{U}_B)_i - (\mathbf{X}_B)'_i$. Vaya al paso 2.

Paso 2. Si todas las variables son factibles, deténgase. En caso contrario, seleccione la variable de salida x_r como la variable básica que tiene el valor más negativo. Avance al paso 3.

Paso 3. Seleccione la variable de entrada utilizando la condición de optimalidad del método simplex dual regular (sección 4.4.1). Vaya al paso 4.

Paso 4. Cambie la base. Vuelva al paso 1.

Aplique el algoritmo dado a los siguientes problemas:

(a) Minimizar $z = -3x_1 - 2x_2 + 2x_3$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 13$$
$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 3, 0 \leq x_3 \leq 1$$

(b) Maximizar $z = x_1 + 5x_2 - 2x_3$

sujeto a

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 26$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 17$$
$$0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 3, x_3 \geq 0$$

7.4 DUALIDAD

Esta sección presenta un riguroso tratamiento de la dualidad. La presentación también sienta las bases para el desarrollo de la programación paramétrica.

7.4.1 Definición matricial del problema dual

Suponga que el problema primal en forma de ecuación con m restricciones y n variables se define como

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Defina el vector de variables duales $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Las reglas dadas en la tabla 4.1 producen el siguiente problema dual:

$$\text{Minimizar } w = \mathbf{Yb}$$

sujeto a

$$\mathbf{YA} \geq \mathbf{C}$$
$$\mathbf{Y} \text{ irrestricta}$$

(Algunas de las restricciones en $\mathbf{YA} \geq \mathbf{C}$ pueden invalidar la $\mathbf{Y}$ no restringida).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.4A

1. Demuestre que el dual del dual es el primal.
***2.** Defina el problema dual dado que el primal es mín $z = \{\mathbf{CX} \;\; \mathbf{AX} \geq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}\}$.

7.4.2 Solución dual óptima

Esta sección establece relaciones entre los problemas primales y duales y muestra cómo puede determinarse la solución dual óptima a partir de la solución primal óptima. Sea $\mathbf{B}$ la base primal *óptima* actual, y defina a $\mathbf{C}_B$ como los coeficientes de la función objetivo asociados con el vector óptimo $\mathbf{X}_B$.

Teorema 7.4-1 (Teoría de la dualidad débil). *Para cualquier par de soluciones primal y dual*, $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, *el valor de la función objetivo en el problema de* minimización *establece una cota superior en el valor de la función objetivo en el problema de* maximización. *Para el par* óptimo $(\mathbf{X}^*,\mathbf{Y}^*)$, *los dos valores objetivo son iguales*.

Comprobación. El par factible $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ satisface todas las restricciones de los dos problemas. Multiplicando con anterioridad ambos lados de las restricciones del problema de maximización por $\mathbf{Y}$ (no restringida) obtenemos

$$\mathbf{YAX} = \mathbf{Yb} = w \qquad (1)$$

También, para el problema de minimización, multiplicando posteriormente ambos lados de cada uno de los primeros dos conjuntos de restricciones por $\mathbf{X}$ (≥ 0), obtenemos

$$\mathbf{YAX} \geq \mathbf{CX} = z \tag{2}$$

Por lo tanto, de acuerdo con (1) y (2), $z \leq w$ para cualquier par *factible* ($\mathbf{X},\mathbf{Y}$).

Observe que el requisito de factibilidad de $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ está implicado por $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ en (1), y $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$ y $\mathbf{YA} \geq \mathbf{C}$ en (2). Asimismo, la designación de los problemas como primales o duales es irrelevante. Lo importante es el sentido de optimización en cada problema; es decir que, para cualquier par de soluciones factibles, el valor objetivo en el problema de maximización no excede el valor objetivo en el problema de minimización.

La implicación del teorema es que, dada $z \leq w$ para cualquier par de soluciones factibles, el máximo de z y el mínimo de w se alcanzan cuando los dos valores objetivo son iguales. Una consecuencia de este resultado es que la "bondad" de cualesquier soluciones primal y dual con respecto al óptimo puede verificarse comparando la diferencia $(w - z)$ con $\frac{z + w}{2}$. Cuanto más pequeña sea la relación $\frac{2(w - z)}{z + w}$, más cercanas están las dos soluciones de ser óptimas. La *regla empírica* dada *no* indica que el valor objetivo óptimo sea $\frac{z + w}{2}$.

No acotamiento y no factibilidad. Si el valor objetivo de uno de los dos problemas no está acotado, entonces el otro problema debe ser no factible. Si no lo está, entonces ambos problemas tienen soluciones factibles, y la relación $z \leq w$ debe mantenerse; lo cual es un resultado imposible debido a que valor objetivo no acotado significa $z = +\infty$ o $w = -\infty$.

Si un problema es no factible, entonces el otro también puede ser no factible, como el siguiente ejemplo lo demuestra (¡verifíquelo gráficamente!):

Primal. Maximizar $z = \{x_1 + x_2 | x_1 - x_2 \leq -1, -x_1 + x_2 \leq -1, x_1, x_2 \geq 0\}$

Dual. Minimizar $w = \{-y_1 - y_2 | y_1 - y_2 \geq 1, -y_1 + y_2 \geq 1, y_1, y_2 \geq 0\}$

Teorema 7.4-2. *Dada la base primal óptima* $\mathbf{B}$ *y su vector de coeficientes objetivos asociado* $\mathbf{C}_B$, *la solución óptima del problema dual es*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$$

Comprobación. La comprobación se basa en demostrar que $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ es una solución dual factible y que, de acuerdo con el teorema 7.4-1, $z = w$.

La factibilidad de $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ está garantizada por la optimalidad del primal, $z_j - c_j \geq 0$ para todas las j; es decir,

$$\mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{C} \geq \mathbf{0}$$

(Vea la sección 7.2.1). Por lo tanto, $\mathbf{YA} - \mathbf{C} \geq \mathbf{0}$, lo que demuestra que $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ satisface las restricciones duales, $\mathbf{YA} \geq \mathbf{C}$.

Luego demostramos que $w = z$ observando que

$$w = \mathbf{Yb} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{1}$$

Asimismo, dada la solución primal $\mathbf{X}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, tenemos

$$z = \mathbf{C}_B\mathbf{X}_B = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \tag{2}$$

Las variables duales $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ se conocen por los nombres estándar **duales** o **precios sombra** (véase la sección 4.3.1).

Motivación para el algoritmo simplex dual. Dado que $\mathbf{P}_j$ es la columna j-ésima de $\mathbf{A}$, observamos de acuerdo con el teorema 7.4-2 que $z_j - c_j = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}_j - c_j = \mathbf{YP}_j - c_j$ representa la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de las restricciones duales. El problema primal de maximización se inicia con $z_j - c_j < 0$ al menos para una j, lo que significa que la restricción dual correspondiente, $\mathbf{YP}_j \geq c_j$, no se satisface. Cuando se alcanza la primal óptima, tenemos $z_j - c_j \geq 0$ para todas las j, y se obtiene la solución dual $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$ factible. Por lo tanto, así como el problema primal busca la optimalidad, el problema dual busca la factibilidad. Este punto es la base para el desarrollo del *método simplex dual* (sección 4.4.1) en el cual las iteraciones se inician (mejor que) óptimas y no factibles y permanecen así hasta que se alcanza la factibilidad en la última iteración. Esto contrasta con el método simplex (primal) (capítulo 3), el cual permanece peor que óptimo pero factible hasta que se alcanza la iteración óptima.

Ejemplo 7.4-1

La base *óptima* para la siguiente PL es $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4)$. Escriba el dual, y encuentre la solución óptima utilizando la base primal óptima.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad &= 5 \\ -x_1 + 3x_2 \quad\quad + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

El problema dual es

$$\text{Minimizar } w = 5y_1 + 2y_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} y_1 - \ \ y_2 &\geq 3 \\ 2y_1 + 3y_2 &\geq 5 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tenemos $\mathbf{X}_B = (x_1, x_4)^T$ y $\mathbf{C}_B = (3,0)$. La base óptima y su inversa son

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores primal y dual asociados son

$$(x_1, x_4)^T = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (5, 7)^T$$
$$(y_1, y_2) = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1} = (3, 0)$$

Ambas soluciones son factibles, y $z = w = 15$(¡compruébelo!). Por lo tanto, las dos soluciones son óptimas.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.4B

1. Verifique que el problema dual del ejemplo numérico dado al final del teorema 7.4-1 es correcto. Luego verifique gráficamente que tanto el problema primal como el dual no tienen una solución factible.

2. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 50x_1 + 30x_2 + 10x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \quad &= 1 \\ 2x_2 \quad &= -5 \\ 4x_1 + x_3 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Escriba el dual.

(b) Demuestre por inspección que la primal es no factible.

(c) emuestre que la dual en (a) es no acotada.

(d) A partir de los problemas 1 y 2, desarrolle una conclusión general con respecto a la relación entre no factiblidad y no acotamiento en los problemas primales y duales.

3. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \quad &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Escriba el dual.

(b) En cada uno de los siguientes casos, primero compruebe que la base dada **B** es factible para la primal. Luego, utilizando $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_B\mathbf{B}^{-1}$, calcule los valores duales, y verifique si la solución primal es óptima o no lo es.

(i) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_3)$ **(iii)** $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$

(ii) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ **(iv)** $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4)$

4. Considere la siguiente PL:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4$$

sujeto a

$$x_1 + \quad x_2 + x_3 \qquad = 4$$
$$x_1 + 4x_2 + \qquad + x_4 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(a) Escriba el problema dual.
(b) Verifique que $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$ es óptima calculando $z_j - c_j$ para todas las P_j no básicas.
(c) Encuentre la solución dual óptima asociada.

*__5.__ Un modelo de PL incluye dos variables x_1 y x_2, y tres restricciones del tipo $\leq$. Las holguras asociadas con x_3, x_4 y x_5. Suponga que la base óptima es $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3)$, y su inversa es

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Las soluciones primal y dual óptimas son

$$\mathbf{X}_B = (x_1, x_2, x_3)^T = (2, 6, 2)^T$$
$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, y_3) = (0, 3, 2)$$

Determine el valor óptimo de la función objetivo de dos maneras por medio de los problemas primal y dual.

*__6.__ Escriba el dual de máx $z = \{\mathbf{CX} \ \mathbf{AX} = \mathbf{b}, \mathbf{X}$ no restringida$\}$

7. Demuestre que el dual de máx $z = \{\mathbf{CX} \ \mathbf{AX} = \mathbf{b}, \mathbf{0} < \mathbf{L} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{U}\}$ siempre posee una solución factible.

7.5 PROGRAMACIÓN LINEAL PARAMÉTRICA

La programación lineal paramétrica es una extensión del análisis postóptimo presentado en la sección 4.5. Investiga el efecto de las variaciones continuas *predeterminadas* en los coeficientes de la función objetivo y el lado derecho de las restricciones en la solución óptima.

Sea $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y defina la PL como

$$\text{Maximizar } z = \left\{\mathbf{CX} \middle| \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}_j x_j = \mathbf{b}, \ \mathbf{X} \geq \mathbf{0}\right\}$$

En el análisis paramétrico, la función objetivo y los vectores del lado derecho, **C** y **b**, son reemplazados con funciones parametrizadas $\mathbf{C}(t)$ y $\mathbf{b}(t)$, donde t es el parámetro de variación. Matemáticamente, t puede asumir cualquier valor positivo o negativo. En esta presentación supondremos que $t \geq 0$.

La idea general del análisis paramétrico es iniciar con la solución óptima en $t = 0$. Luego, utilizando las condiciones de optimalidad y factibilidad del método simplex, determinamos el intervalo $0 \leq t \leq t_1$ donde la solución en $t = 0$ permanece óptima y factible. En este caso, t_1 se conoce como **valor crítico**. El proceso continúa determinando valores críticos sucesivos y sus soluciones factibles óptimas correspondientes. El análisis postóptimo termina cuando, independiente de t, la última solución no cambia y no hay ninguna otra indicación de que exista una solución factible.

7.5.1 Cambios paramétricos en C

Sean $\mathbf{X}_{B_i}$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{C}_{B_i}(t)$ los elementos que definen la solución óptima asociada con t_i crítica (los cálculos se inician en $t_0 = 0$ con $\mathbf{B}_0$ como su base óptima). Luego se determinan el valor crítico t_{i+1} y su base óptima, si existe una. Como los cambios en **C** pueden afectar sólo la optimalidad del problema, la solución actual $\mathbf{X}_{B_i} = \mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{b}$ permanecerá óptima para algunos $t \geq t_i$ en tanto el costo reducido, $z_j(t) - c_j(t)$, satisfaga la siguiente condición de optimalidad:

$$z_j(t) - c_j(t) = \mathbf{C}_{B_i}(t)\mathbf{B}_i^{-1}\mathbf{P}_j - c_j(t) \geq 0, \text{ para todas las } j$$

El valor de t_{i+1} es igual al $t > t_i$ mayor que satisfaga todas las condiciones de optimalidad.

Observe que *nada* en las desigualdades requiere que $\mathbf{C}(t)$ sea lineal en t. Cualquier función $\mathbf{C}(t)$, lineal o no lineal, es aceptable. Sin embargo, con no linealidad, la manipulación numérica de las desigualdades resultantes puede ser tediosa (vea el problema 5, conjunto 7.5a, para una ilustración del caso no lineal).

Ejemplo 7.5-1

$$\text{Maximizar } z = (3 - 6t)x_1 + (2 - 2t)x_2 + (5 + 5t)x_3$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 40 \\ 3x_1 + 2x_3 &\leq 60 \\ x_1 + 4x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tenemos

$$\mathbf{C}(t) = (3 - 6t, 2 - 2t, 5 + 5t), t \geq 0$$

Las variables x_4, x_5 y x_6 se utilizarán como variables de holgura asociadas con las tres restricciones.

Solución óptima en $t = t_0 = 0$

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solución
z	4	0	0	1	2	0	160
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	5
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	30
x_6	2	0	0	–2	1	1	10

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_3 x_6)^T = (5, 30, 10)^T$$

$$\mathbf{C}_{B_0}(t) = (2 - 2t, 5 + 5t, 0)$$

$$\mathbf{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las condiciones de optimalidad para los vectores no básicos actuales $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_4$ y $\mathbf{P}_5$, son

$$\left\{\mathbf{C}_{B_0}(t)\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{P}_j - c_j(t)\right\}_{j=1,4,5} = (4 + 14t, 1 - t, 2 + 3t) \geq \mathbf{0}$$

Por lo tanto, $\mathbf{X}_{B_0}$ permanece óptima con $t \leq t_1$, donde t_1 se determina a partir de las condiciones de optimalidad como

$$\left.\begin{array}{r} 4 + 14t \geq 0 \\ 1 - t \geq 0 \\ 2 + 3t \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow t_1 = 1$$

El costo reducido $z_4(t) - c_4(t) = 1 - t$ es igual a cero en $t = 1$ y se vuelve negativo para $t > 1$. Por lo tanto, $\mathbf{P}_4$ debe entrar a la base para $t > 1$. En este caso, $\mathbf{P}_2$ debe salir de la base (vea la tabla óptima en $t = 0$). La nueva solución básic $\mathbf{X}_{B_1}$ es la solución alternativa obtenida en $t = 1$ al permitir que $\mathbf{P}_4$ entre a la base; es decir, $\mathbf{X}_{B_1} = (x_4, x_3, x_6)^T$y $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_6)$.

Base óptima alternativa en $t = t_1 = 1$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_4, x_3, x_6)^T = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b} = (10, 30, 30)^T$$

$$\mathbf{C}_{B_1}(t) = (0, 5 + 5t, 0)$$

Los vectores no básicos asociados son $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_5$, y tenemos

$$\left\{\mathbf{C}_{B_1}(t)\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_j - c_j(t)\right\}_{j=1,2,5} = \left(\tfrac{9 + 27t}{2}, -2 + 2t, \tfrac{5 + 5t}{2}\right) \geq \mathbf{0}$$

De acuerdo con estas condiciones, la solución básica $\mathbf{X}_{B_1}$ permanece óptima para todas las $t \geq 1$. Observe que la condición de optimalidad, $-2 + 2t \geq 0$, "nos recuerda" de forma automática que $\mathbf{X}_{B_1}$ es óptima dentro de un intervalo de t que se inicia a partir del último valor crítico $t_1 = 1$. Éste siempre será el caso en cálculos de programación paramétrica.

La solución óptima dentro de todo el intervalo de t se resume en la siguiente tabla (el valor de z se calcula mediante sustitución directa).

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \leq t \leq 1$	0	5	30	$160 + 140t$
$t \geq 1$	0	0	30	$150 + 150t$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.5A

*__1.__ En el ejemplo 7.5-1, suponga que t no está restringida en cuanto al signo. Determine el intervalo de t dentro del cual $\mathbf{X}_{B_0}$ permanece óptima.

2. Resuelva el ejemplo 7.5-1, suponiendo que la función objetiva se da como

*__(a)__ Maximizar $z = (3 + 3t)x_1 + 2x_2 + (5 - 6t)x_3$

(b) Maximizar $z = (3 - 2t)x_1 + (2 + t)x_2 + (5 + 2t)x_3$

(c) Maximizar $z = (3 + t)x_1 + (2 + 2t)x_2 + (5 - t)x_3$

3. Estudiar la variación de la solución óptima de la siguiente PL parametrizada, dado que $t \geq 0$.

$$\text{Minimizar } z = (4 - t)x_1 + (1 - 3t)x_2 + (2 - 2t)x_3$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4. El análisis en esta sección asume que la solución óptima de la PL en $t = 0$ se obtiene con el método simplex (primal). En algunos problemas puede ser más conveniente obtener la solución óptima mediante el método simplex (sección 4.4.1). Demuestre cómo puede realizarse el análisis paramétrico en este caso, luego analice la programación lineal del ejemplo 4.4-1, suponiendo que la función objetivo se da como

$$\text{Minimizar } z = (3 + t)x_1 + (2 + 4t)x_2 + x_3,\ t \geq 0$$

*__5.__ En el ejemplo 7.5-1, suponga que la función objetivo es no lineal en t ($t \geq 0$) y que se define como

$$\text{Maximizar } z = (3 + 2t^2)x_1 + (2 - 2t^2)x_2 + (5 - t)x_3$$

Determine el primer valor crítico t_1.

7.5.2 Cambios paramétricos en b

El lado derecho parametrizado $\mathbf{b}(t)$ puede afectar sólo la factibilidad del problema. Los valores críticos de t se determinan por lo tanto a partir de la condición

$$\mathbf{X}_B(t) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}(t) \geq \mathbf{0}$$

Ejemplo 7.5-2

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 40 - t$$
$$3x_1 + 2x_3 \leq 60 + 2t$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 30 - 7t$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Suponga que $t \geq 0$.

En $t = t_0 = 0$, el problema es idéntico al del ejemplo 7.5-1. Por lo tanto tenemos

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_3, x_6)^T = (5, 30, 10)^T$$

$$\mathbf{B}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar el primer valor crítico t_1, aplicamos las condiciones de factibilidad $\mathbf{X}_{B_0}(t) = \mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{b}(t) \geq 0$, las cuales dan por resultado

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - t \\ 30 + t \\ 10 - 3t \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 \leq t \leq \tfrac{10}{3} \Rightarrow t_1 = \tfrac{10}{3}$$

La base $\mathbf{B}_0$ permanece factible en el intervalo $0 \leq t \leq \frac{10}{3}$. Sin embargo, los valores de las variables básicas, x_2, x_3 y x_6 cambian con t.

El valor de la variable básica x_6 $(= 10 - 3t)$ es igual a cero en $t = t_1 = \frac{10}{3}$, y se volverá negativa para $t > \frac{10}{3}$. Por lo tanto, en $t = \frac{10}{3}$, podemos determinar la base alternativa $\mathbf{B}_1$ aplicando el método simplex dual revisado (vea el problema 5, conjunto 7.2b para los detalles). La variable de salida es x_6.

Base alternativa en $t = t_1 = \frac{10}{3}$

Dado que x_6 es la variable de salida, determinamos la variable de entrada como sigue:

$$\mathbf{X}_{B_0} = (x_2, x_3, x_6)^T,\ \mathbf{C}_{B_0} = (2, 5, 0)$$

Por lo tanto,

$$\{z_j - c_j\}_{j=1,4,5} = \left\{\mathbf{C}_{B_0}\mathbf{B}_0^{-1}\mathbf{P}_j - c_j\right\}_{j=1,4,5} = (4, 1, 2)$$

Luego, para x_j no básica, $j = 1.4, 5$, calculamos

$$\begin{aligned}(\text{Fila de } \mathbf{B}_0^{-1} \text{ asociada con } x_6)\ \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5 &= (\text{Tercera fila de } \mathbf{B}_0^{-1})\ (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) \\ &= (-2, 1, 1)\ (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5) \\ &= (2, -2, 1)\end{aligned}$$

Por tanto, la variable de entrada está asociada con

$$\theta = \text{mín}\left\{-, \left|\frac{1}{-2}\right|, -\right\} = \tfrac{1}{2}$$

Así que $\mathbf{P}_4$ es el vector de entrada. La solución básica alternativa y su $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_1^{-1}$ son

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_2, x_3, x_4)^T$$

$$\mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

El siguiente valor crítico t_2 se determina a partir de las condiciones de factibilidad, $\mathbf{X}_{B_1}(t) = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{b}(\mathrm{t}) \geq \mathbf{0}$, las cuales dan por resultado

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30 - 7t}{4} \\ 30 + t \\ \frac{-10 + 3t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{10}{3} \leq t \leq \frac{30}{7} \Rightarrow t_2 = \frac{30}{7}$$

En $t = t_2 = \frac{30}{7}$, se puede obtener una base alternativa mediante el método simplex dual revisado. La variable de salida es x_2 porque corresponde a la condición que de la que resulta el valor crítico t_2.

Base alternativa en $t = t_2 = \frac{30}{7}$

Dado que x_2 es la variable de salida, determinamos la variable de entrada como sigue:

$$\mathbf{X}_{B_1} = (x_2, x_3, x_4)^T,\ \mathbf{C}_{B_1} = (2, 5, 0)$$

Por lo tanto,

$$\{z_j - c_j\}_{j=1,5,6} = \left\{\mathbf{C}_{B_1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{P}_j - c_j\right\}_{j=1,5,6} = (5, \tfrac{5}{2}, \tfrac{1}{2})$$

Luego, para x_j no básica, $j = 1, 5$ y 6, calculamos

$$\begin{aligned}(\text{Fila de } \mathbf{B}_1^{-1} \text{ asociada con } x_2)(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) &= (\text{Primera fila de } \mathbf{B}_1^{-1})(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) \\ &= \left(0, 0, \tfrac{1}{4}\right)(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6) \\ &= \left(\tfrac{1}{4}, 0, \tfrac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

Como todos los elementos del denominador, $(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4})$, son ≥ 0, el problema no tiene una solución factible para $t > \frac{30}{7}$, y el análisis paramétrico termina en $t = t_2 = \frac{30}{7}$.

La solución óptima se resume como

t	x_1	x_2	x_3	z
$0 \leq t \leq \frac{10}{3}$	0	$5 - t$	$30 + t$	$160 + 3t$
$\frac{10}{3} \leq t \leq \frac{30}{7}$	0	$\frac{30 - 7t}{4}$	$30 + t$	$165 + \frac{3}{2}t$
$t > \frac{30}{7}$	(No existe solución factible)			

CONJUNTO DE PROBLEMAS 7.5B

1. En el ejemplo 7.5-2, encuentre el primer valor crítico, t_1, y defina los vectores de $\mathbf{B}_1$ en cada uno de los siguientes casos:

*__(a)__ $\mathrm{b}(t) = (40 + 2t, 60 - 3t, 30 + 6t)^T$

(b) $\mathrm{b}(t) = (40 - t, 60 + 2t, 30 - 5t)^T$

***2.** Estudie las variaciones en la solución óptima de la siguiente PL parametrizada, dada $t \geq 0$.

$$\text{Minimizar } z = 4x_1 + x_2 + 2x_3$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 + 3t$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6 + 2t$$
$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 4 - t$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3. El análisis en esta sección asume que la solución de PL óptima en $t = 0$ se obtiene mediante el método simplex (primal). En algunos problemas puede ser más conveniente obtener la solución óptima mediante el método simplex dual (sección 4.4.1). Demuestre cómo puede realizarse el análisis paramétrico en este caso, y luego analice la PL del ejemplo 4.4-1, asumiendo que $t \geq 0$ y que el vector de lado derecho es

$$\mathbf{b}(t) = (3 + 2t, 6 - t, 3 - 4t)^T$$

4. Resuelva el problema 2 asumiendo que el lado derecho cambia a

$$\mathbf{b}(t) = (3 + 3t^2, 6 + 2t^2, 4 - t^2)^T$$

Suponga además que t puede ser positiva, cero o negativa.

7.6 MÁS TEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

La siguiente lista proporciona más temas de PL (que por lo común se tratan en cursos de IO especializados) que se abordan en el capítulo 22, en el sitio web.

1. Problema de flujo de capacitado de costo mínimo, incluida la formulación de PL y el modelo del algoritmo simplex de red capacitada.
2. Algoritmo de descomposición de Danzig-Wolfe.
3. Algoritmo de punto interior de Karmarkar.

BIBLIOGRAFÍA

Bazaraa, M., J. Jarvis, y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 2009.

Chvàtal, V., *Linear Programming,* Freeman, San Francisco, 1983.

Nering, E., y A. Tucker, *Linear Programming and Related Problems,* Academic Press, Boston, 1992.

Saigal, *R., Linear Programming: A Modern Integrated Analysis,* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995.

Vanderbei, *R., Linear Programming: Foundation and Extensions,* 3a. ed., Springer, Nueva York, 2008.

CAPÍTULO 8

Programación de metas

Aplicación de la vida real. Asignación de tiempo de quirófano en el hospital Monte Sinaí

La situación ocurre en Canadá, donde el seguro de asistencia médica es obligatorio y universal. El financiamiento, basado en una combinación de primas e impuestos, lo controlan las provincias. Según este sistema, a los hospitales se les asigna un presupuesto anual fijo, y cada provincia les paga posteriormente a los médicos por medio de un mecanismo de financiamiento de pago por servicio. Este arreglo de financiamiento limita la disponibilidad de las instalaciones hospitalarias (por ejemplo quirófanos), lo que a su vez frena la tendencia de los médicos a elevar sus ganancias personales por la atención de más a sus pacientes. El objetivo del estudio es determinar un programa diario equitativo para el uso de los quirófanos disponibles. El problema se modela aplicando una combinación de programación de metas y entera. (El caso 6 en el capítulo 26, en inglés, del sitio web proporciona los detalles del estudio).

8.1 FORMULACIÓN DE UNA PROGRAMACIÓN DE METAS

La idea de la programación de metas se ilustra con un ejemplo.

Ejemplo 8.1-1 (Planificación tributaria)[1]

Fairville es una pequeña ciudad con una población de aproximadamente 20,000 habitantes. La base tributaria anual por el impuesto predial asciende a $550 millones. Las recaudaciones anuales por alimentos y medicinas así como por ventas generales es de $35 y $55 millones, respectivamente. El consumo anual de gasolina local se estima en 7.5 millones de galones. El concejo municipal desea desarrollar las tasas tributarias con base en cuatro metas principales:

1. Los ingresos fiscales deben ser por lo menos de $16 millones para satisfacer los compromisos financieros de la ciudad.
2. Los impuestos sobre alimentos y medicinas no deben exceder el 10% de todos los impuestos recaudados.

[1]Este ejemplo está basado en Chissman and Associates, 1989

3. Los impuestos sobre las ventas generales no deben exceder el 20% de todos los impuestos recaudados.
4. El impuesto sobre la gasolina no debe exceder de 2 centavos por galón.

Sean las variables x_p, x_f y x_s las tasas tributarias (expresadas como proporciones de las bases tributarias) sobre la propiedad, alimentos, medicinas y ventas generales, y defina la variable x_g como el impuesto sobre la gasolina en centavos por galón. Las metas del concejo municipal se expresan entonces como

$$550x_p + 35x_f + 55x_s + .075x_g \geq 16 \quad \text{(Ingresos fiscales)}$$
$$35x_f \leq .1(550x_p + 35x_f + 55x_3 + .075x_g) \quad \text{(Impuestos sobre alimentos/medicinas)}$$
$$55x_s \leq .2(550x_p + 35x_f + 55x_s + .075x_g) \quad \text{(Impuesto general)}$$
$$x_g \leq 2 \quad \text{(Impuesto sobre la gasolina)}$$
$$x_p, x_f, x_s, x_g \geq 0$$

Estas restricciones se simplifican entonces como

$$550x_p + 35x_f + 55x_s + .075x_g \geq 16$$
$$55x_p - 31.5x_f + 5.5x_s + .0075x_g \geq 0$$
$$110x_p + 7x_f - 44x_s + .015x_g \geq 0$$
$$x_g \leq 2$$
$$x_p, x_f, x_s, x_g \geq 0$$

Cada una de las desigualdades del modelo representa una meta que el concejo municipal aspira satisfacer. Es muy probable, sin embargo, que lo mejor que se puede hacer sea una solución compromiso que implique estas metas conflictivas.

La forma en que la programación de metas determina una solución compromiso es convertir cada desigualdad en una meta flexible en la cual la restricción correspondiente pueda ser violada, si es necesario. En función del modelo de Fairville, las metas flexibles se expresan como sigue:

$$550x_p + 35x_f + 55x_s + .075x_g + s_1^- - s_1^+ = 16$$
$$55x_p - 31.5x_f + 5.5x_s + .0075x_g + s_2^- - s_2^+ = 0$$
$$110x_p + 7x_f - 44x_s + .015x_g + s_3^- - s_3^+ = 0$$
$$x_g + s_4^- - s_4^+ = 2$$
$$x_p, x_f, x_s, x_g \geq 0$$
$$s_i^-, s_i^+ \geq 0, \ i = 1, 2, 3, 4$$

Las variables no negativas s_i^- y s_i^+, $i = 1, 2, 3, 4$ son **variables de desviación** que representan las desviaciones *por debajo* y *por arriba* del lado derecho de la restricción i.

Las variables de desviación s_i^- y s_i^+ son dependientes por definición, y de ahí que no pueden ser las variables básicas al mismo tiempo (de acuerdo con la teoría del método simplex). Esto significa que en cualquier iteración simplex, no más de *una* de las dos variables de desviación puede asumir un valor positivo. Si la desigualdad i-ésima original es del tipo $\leq$ y su $s_i^- \geq 0$, entonces se satisface la meta i-ésima; en caso contrario, no se satisface la meta i. En esencia, la definición de s_i^- y s_i^+ permite satisfacer o violar la meta i-ésima a voluntad. Éste es el tipo de flexibilidad que caracteriza a la programación de metas cuando se busca una solución compromiso. Lógicamente, una buena solución compromiso busca minimizar la cantidad por la que se viole cada meta.

En el modelo de Fairville, dado que las tres primeras restricciones son del tipo ≥ y la cuarta es del tipo ≤, las variables de desviación s_1^-, s_2^-, s_3^- y s_4^+ (que en el modelo aparecen en negritas) representan las cantidades por las cuales se violan las metas respectivas. Por lo tanto, la solución compromiso busca satisfacer en cuanto sea posible los siguientes cuatro objetivos:

$$\text{Minimizar } G_1 = s_1^-$$
$$\text{Minimizar } G_2 = s_2^-$$
$$\text{Minimizar } G_3 = s_3^-$$
$$\text{Minimizar } G_4 = s_4^+$$

Estas funciones se minimizan sujetas a las ecuaciones de restricción del modelo.

¿Cómo podemos optimizar un modelo de múltiples objetivos con metas conflictivas? Con este fin se desarrollaron dos métodos: (1) el método de los pesos, y (2) el método preventivo. Ambos métodos se basan en la conversión de los múltiples objetivos en una sola función. La sección 8.2 proporciona los detalles.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 8.1A

*1. Formule el problema fiscal de Fairville, suponiendo que el concejo municipal especifique una meta más, G_5, que requiera que el impuesto sobre la gasolina sea igual por lo menos a 10% de la factura fiscal total.

2. El Centro Comercial NW gestiona eventos especiales para atraer clientes potenciales. Entre los eventos que parecen atraer a los adolescentes, al grupo de jóvenes de mediana edad y a los adultos mayores, los dos más populares son los conciertos de bandas y las exposiciones de arte. Sus costos por presentación son de $1500 y $3000, respectivamente. El presupuesto anual (estricto) total asignado a los dos eventos es de $15,000. El gerente del centro comercial estima la asistencia como sigue:

	Cantidad de personas que asisten por presentación		
Evento	*Adolescentes*	*Mediana edad*	*Adultos mayores*
Concierto de bandas	200	100	0
Exposición de arte	0	400	250

El gerente ha fijado metas mínimas de 1000, 1200 y 800 para la asistencia de adolescentes, personas de mediana edad y adultos mayores, en ese orden. Formule el problema como un modelo de programación de metas.

*3. La oficina de admisión de la Universidad de Ozark está recibiendo solicitudes de estudiantes de primer año para el año académico venidero. Las solicitudes caen dentro de tres categorías: estudiantes del estado, de fuera del estado, e internacionales. Las relaciones hombres-mujeres de los solicitantes del estado y de fuera del estado son 1:1 y 3:2; para estudiantes internacionales, la relación correspondiente es de 8:1. La calificación en el Examen de Universidades Americanas (ACT, por sus siglas en inglés) es un importante factor en la aceptación de nuevos estudiantes. Las estadísticas recopiladas por la universidad indican que las calificaciones promedio de estudiantes del estado, fuera del estado e internacionales, son de 27, 26 y 23, respectivamente. El comité de admisiones ha establecido las siguientes metas deseables para la nueva clase de primer año:

(a) Que la clase que empieza sea por lo menos de 1200 estudiantes.

(b) Que la calificación promedio de todos los solicitantes sea por lo menos de 25.

(c) Que los estudiantes internacionales constituyan por lo menos 10% de la clase.

(d) Que la relación mujeres-hombres sea por lo menos de 3:4.

(e) Que los estudiantes de fuera del estado comprendan por lo menos 20% de la clase.

Formule el problema como un modelo de programación de metas.

4. Las granjas Circle K consumen 3 toneladas diarias de un alimento especial, el cual está constituido por una mezcla de piedra caliza (carbonato de calcio), maíz y soya, y que debe satisfacer los siguientes requisitos nutricionales:

Calcio. Al menos 0.8%, pero no más de 1.2%.

Proteína. Por lo menos 22%.

Fibra. A lo sumo 5%.

La siguiente tabla muestra el contenido nutricional de los ingredientes alimenticios.

	lb por lb de ingrediente		
Ingrediente	*Calcio*	*Proteína*	*Fibra*
Piedra caliza	.380	.00	.00
Maíz	.001	.09	.02
Soya	.002	.50	.08

Formule el problema como un modelo de programación de metas, y establezca su opinión con respecto a la aplicabilidad de la programación de metas a esta situación.

***5.** Mantel produce un carruaje de juguete, cuyo ensamble final debe incluir cuatro ruedas y dos asientos. La fábrica que produce las piezas trabaja tres turnos al día. La siguiente tabla proporciona las cantidades producidas de cada pieza en los tres turnos.

	Unidades producidas por carrera de producción	
Turno	*Ruedas*	*Asientos*
1	500	300
2	600	280
3	640	360

Idealmente, la cantidad de ruedas producidas es el doble de la de asientos. Sin embargo, como las tasas de producción varían de turno a turno, el balance exacto en la producción puede no ser posible. A Mantel le interesa determinar la cantidad de corridas de producción en cada turno que minimice el desbalance en la producción de las piezas. Las limitaciones de la capacidad restringen las corridas a entre 4 y 5 para el turno 1; 10 y 20 para el turno 2, y 3 y 5 para el turno 3. Formule el problema como un modelo de programación de metas.

6. Camyo Manufacturing produce cuatro piezas que requieren el uso de un torno y un taladro vertical. Las dos máquinas operan 10 horas al día. La siguiente tabla proporciona el tiempo en minutos que se requiere por pieza:

	Tiempo de producción en min	
Pieza	*Torno*	*Taladro vertical*
1	5	3
2	6	2
3	4	6
4	7	4

Se desea balancear las dos máquinas limitando la diferencia entre sus tiempos de operación totales a lo sumo a 30 minutos. La demanda del mercado de cada pieza es de al menos 10 unidades. Además, la cantidad de unidades de la pieza 1 no puede exceder la de la pieza 2. Formule el problema como un modelo de programación de metas.

7. Se fabrican dos productos en dos máquinas secuenciales. La siguiente tabla da los tiempos de maquinado en minutos por unidad para los dos productos.

	Tiempo de maquinado en min	
Máquina	*Producto 1*	*Producto 2*
1	5	3
2	6	2

Las cuotas de producción diarias para los dos productos son de 80 y 60 unidades. Cada máquina opera 8 horas al día, y si es necesario, aunque no deseable, puede utilizarse tiempo extra para satisfacer las cuotas de producción. Formule el problema como un modelo de programación de metas.

8. El hospital de Vista City planea la asignación de camas sobrantes (las que no estén ya ocupadas) para estancias cortas, con 4 días de anticipación. Durante el periodo de planificación de 4 días, alrededor de 30,25 y 20 pacientes requerirán estancias de 1, 2 o 3 días, respectivamente. Las camas sobrantes durante el mismo periodo se estiman en 20, 30, 30 y 30, respectivamente. Aplique la programación de metas para resolver el problema de sobreadmisión y subadmisión en el hospital.

9. La familia Von Trapp planea irse a vivir a una nueva ciudad donde los dos padres han aceptado nuevos trabajos. Al tratar de encontrar una ubicación ideal para su nuevo hogar, los Von Trapp enumeran las siguientes metas:

(a) Debe estar lo más cerca posible al lugar de trabajo de la señora Von Trapp (alrededor de $\frac{1}{4}$ de milla).

(b) Debe estar lo más lejos posible del ruido del aeropuerto (mínimo a 10 millas).

(c) Debe estar razonablemente cerca de un centro comercial (a lo sumo a 1 milla).

El señor y la señora Von Trapp utilizan un sitio destacado en la ciudad como punto de referencia y localizan las coordenadas (x,y) del lugar de trabajo, el aeropuerto y el centro comercial en (1,1), (20,15) y (4,7), respectivamente (todas las distancias están en millas). Formule el problema como un modelo de programación de metas. (*Nota:* Las restricciones resultantes son no lineales.)

10. *Análisis de regresión.* En un experimento de laboratorio, suponga que y_i es el resultado i-ésimo observado (independiente) asociado con las mediciones experimentales dependientes $x_{ij}, i = 1, 2,\ldots, m; j = 1, 2,..., n$. Se desea determinar una regresión lineal que encaje en estos datos. Sea $b_j, j = 0, 1,\ldots, n$, los coeficientes de la regresión. Se desea determi-

nar todas las b_j de modo que la suma de las desviaciones absolutas entre los resultados observados y los estimados sea mínima. Formule el problema como un modelo de programación de metas.

11. *Problema de Chebyshev*. Una meta alterna para el modelo de regresión del problema 10 es minimizar sobre b_j el máximo de las desviaciones absolutas. Formule el problema como un modelo de programación de metas.

8.2 ALGORITMOS DE PROGRAMACIÓN DE METAS

Esta sección presenta dos algoritmos para resolver la programación de metas. Ambos métodos se basan en la representación de múltiples metas por una sola función objetivo. En el **método de pesos**, la función objetivo única es la suma ponderada de las funciones que representan las metas del problema. El **método preventivo** inicia priorizando las metas por orden de importancia. Luego, el modelo optimiza las metas de una en una en el orden de prioridad de modo que no degrade una solución de más alta prioridad.

Por lo común, los dos métodos propuestos no presentan la misma solución. Ninguno de los métodos, sin embargo, es superior al otro porque las dos técnicas presuponen preferencias distintas en la toma de decisiones.

8.2.1 Método de los pesos

Suponga que el modelo de programación de metas tiene n metas y que la meta i-ésima se da como

$$\text{Minimizar } G_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

La función objetivo combinada utilizada en el método de pesos se define entonces como

$$\text{Minimizar } z = w_1G_1 + w_2G_2 + \cdots + w_nG_n$$

Los parámetros w_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son pesos positivos que reflejan las preferencias de la toma de decisiones con respecto a la importancia relativa de cada meta. Por ejemplo, $w_i = 1$, para todas las i, significa que todas las metas tienen una misma importancia. La determinación de los valores específicos de estos pesos es subjetiva. En realidad, los procedimientos analíticos aparentemente complejos, desarrollados en la literatura (vea, por ejemplo, Cohon, 1978) aún están arraigadas en evaluaciones subjetivas.

Ejemplo 8.2-1

TopAd, una nueva agencia de publicidad con 10 empleados, firmó un contrato para promover un nuevo producto. La agencia puede hacer publicidad por radio y televisión. La siguiente tabla proporciona la cantidad de personas alcanzadas diariamente por cada tipo de anuncio publicitario, así como los requerimientos de costos y mano de obra. El contrato prohíbe a TopAd utilizar

	Radio	*Televisión*
Exposición (en millones de personas)/min	4	8
Costo (en miles de dólares)/min	8	24
Empleados asignados/min	1	2

más de 6 minutos de publicidad por radio. Además, los anuncios de radio y televisión tienen que llegar al menos a 45 millones de personas. TopAd tiene una meta presupuestaria de $100,000 para el proyecto. ¿Cuántos minutos de anuncios de radio y televisión debe utilizar TopAd?

Sean x_1 y x_2 los minutos asignados a los anuncio de radio y televisión. La formulación de la programación de metas para el problema se da como

$$\text{Minimizar } G_1^- = s_i^- \text{ (Satisfacer la meta de exposición)}$$

$$\text{Minimizar } G_2^+ = s_i^+ \text{ (Satisfacer la meta de presupuesto)}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
4x_1 + 8x_2 + s_1^- - s_1^+ &= 45 \text{ (Meta de exposición)} \\
8x_1 + 24x_2 + s_2^- - s_2^+ &= 100 \text{ (Meta de presupuesto)} \\
x_1 + 2x_2 &\leq 10 \text{ (Límite de personal)} \\
x_1 &\leq 6 \text{ (Límite de radio)} \\
x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ &\geq 0
\end{aligned}$$

La gerencia de TopAd estima que la meta de exposición es dos veces más importante que la meta de presupuesto. Por lo tanto, la función objetivo combinada se convierte en

$$\text{Minimizar } z = 2G_1 + G_2 = 2s_1^- + s_2^+$$

La solución óptima es $z = 10$, $x_1 = 5$ minutos, $x_2 = 2.5$ minutos, $s_1^- = 5$ millones de personas, $s_1^- = 0$, y $s_2^- = 0$.

El hecho de que el valor óptimo de z no sea cero indica que al menos una de las metas no se cumple. Específicamente, $s_1^- = 5$ significa que la meta de exposición (de al menos 45 millones de personas) falla por 5 millones de personas. Por otra parte, la meta de presupuesto (de no exceder $100,000) no se viola porque $s_2^+ = 0$.

Comentarios. La programación de metas busca sólo una solución *eficiente*, más que óptima, al problema. Por ejemplo, la solución $x_1 = 6$ y $x_2 = 2$ produce la misma exposición ($4 \times 6 + 8 \times 2$) = 40 millones de personas) pero cuesta menos ($8 \times 6 + 24 \times 2$) = $96,000). En esencia, lo que la programación de metas hace es hallar una solución que *satisfaga* las metas del modelo sin tomar en cuenta la optimización. La falla de no hallar la solución óptima levanta dudas sobre la viabilidad de la programación de metas como una técnica de optimización (vea el ejemplo 8.2-3 para un tratamiento más amplio).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 8.2A

***1.** Considere el problema 1, conjunto 8.1a que se refiere a la situación tributaria de Fairville. Resuelva el problema, suponiendo que las cinco metas tienen el mismo peso. ¿Satisface la solución todas las metas?

2. En el problema 2, conjunto 8.1a, suponga que la meta de atraer personas de mediana edad es dos veces más importante que la de las otras dos categorías (adolescentes y adultos mayores). Encuentre la solución asociada, y verifique si todas las metas se han cumplido.

3. En la situación de la admisión a la Universidad de Ozark descrita en el problema 3, conjunto 8.1a suponga que se debe cumplir con el límite en el tamaño de la clase de estudiantes de primer año, pero los requisitos restantes pueden tratarse como metas flexibles. Suponga, además, que la calificación del examen ACT es dos veces más importante que cualquiera de las metas restantes.

(a) Resuelva el problema y especifique si se cumplen o no todas las metas.

(b) Si, además, el tamaño de la clase de estudiantes de primer año puede tratarse como una meta flexible que es dos veces más importante que la meta del examen ACT, ¿cómo afectaría este cambio a la solución?

***4.** En el modelo de Circle K del problema 4, conjunto 8.1a, ¿es posible satisfacer todos los requerimientos nutricionales?

5. En el problema 5, conjunto 8.1a, determine la solución, y especifique si puede balancearse o no la producción diaria de ruedas y asientos.

6. En el problema 6, conjunto 8.1a, suponga que la meta de la demanda del mercado es dos veces más importante que la de balancear las dos máquinas, y que no se permite tiempo extra. Resuelva el problema, y determine si se cumplen las metas.

***7.** En el problema 7, conjunto 8.1a, suponga que la producción se esfuerza por satisfacer las cuotas de los dos productos, utilizando tiempo extra si es necesario. Encuentre una solución al problema, y especifique la cantidad de tiempo extra, si se requiere, para cumplir con las cuotas de producción.

8. En el hospital de Vista City del problema 8, conjunto 8.1a, suponga que solamente los límites de camas representan metas flexibles y que todas las metas tienes pesos iguales. ¿Puede cumplirse con todas las metas?

9. La compañía Malco ha recopilado la siguiente tabla de los archivos de cinco de sus empleados, para estudiar el impacto en el ingreso de tres factores: edad, educación (expresada en años de universidad terminados), y experiencia (expresada en años en los negocios).

Edad (años)	Educación (años)	Experiencia (años)	Ingreso anual ($)
30	4	5	40,000
39	5	10	48,000
44	2	14	38,000
48	0	18	36,000
37	3	9	41,000

Aplique la formulación de programación de metas del problema 10, conjunto 8.1a, para encajar los datos en la ecuación lineal $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$.

10. Resuelva el problema 9 siguiendo el método de Chebyshev propuesto en el problema 11, conjunto 8.1a.

8.2.2 Método preventivo

En este tipo de método, el tomador de decisiones clasifica las metas del problema en orden de importancia. Dada una situación de n metas, los objetivos del problema se escriben como

$$\text{Minimizar } G_1 = \rho_1 \text{(Máxima prioridad)}$$
$$\vdots$$
$$\text{Minimizar } G_n = \rho_n \text{(Mínima proridad)}$$

La variable ρ_i es el componente de las variables de desviación, s_i^- o s_i^+, que representan la meta i. Por ejemplo, en el modelo de TopAd (ejemplo 8.2-1), $\rho_1 = s_1^-$ y $\rho_2 = s_2^+$.

El procedimiento de solución se inicia con la optimización de la prioridad máxima, G_1, y termina con la optimización de la prioridad mínima, G_n. El método preventivo está diseñado de modo que *una solución de menor prioridad nunca degrade a una solución de alta prioridad*.

La literatura sobre programación de metas presenta un método simplex "especial" que garantiza la no degradación de soluciones de alta prioridad. El método utiliza la **regla de eliminación de columnas** que exige eliminar una variable x_j *no básica* con un costo reducido diferente de cero ($z_j - c_j \neq 0$) de la tabla óptima de metas G_k antes de resolver el problema de la meta G_{k+1}. La regla reconoce que tales variables no básicas, si se elevan por encima del nivel cero en las optimización de metas subsiguientes, pueden degradar (pero nunca mejorar) la calidad de una meta de mayor prioridad. El procedimiento requiere incluir las funciones objetivo de todas las metas en la tabla simplex del modelo.

La modificación propuesta de *eliminación de columnas* complica sin necesidad la programación de metas. En esta presentación demostramos que se pueden alcanzar los mismos resultados de una manera más simple dando los siguientes pasos:

Paso 0. Identifique las metas del modelo y clasifíquelas en orden de prioridad:

$$G_1 = \rho_1 > G_2 = \rho_2 > \cdots > G_n = \rho_n$$

Establezca $i = 1$.

Paso general Resuelva la PL$_i$ que minimice G_i, y que $\rho_i = \rho_i^*$ defina el valor óptimo correspondiente de la variable de desviación ρ_i. Si $i = n$, deténgase; la PL$_n$ resuelve el problema de n metas. En caso contrario, agregue la restricción $\rho_i = \rho_i^*$ a las restricciones del problema G_i para garantizar que el valor de ρ_i no se degrade en problemas futuros. Establezca $i = i + 1$, y repita el paso i.

La adición sucesiva de las restricciones especiales $\rho_i = \rho_i^*$ puede no ser tan "elegante" teóricamente como la *regla de eliminación de columnas*; no obstante, se logra el mismo resultado. Pero lo más importante es que es más fácil de implementar y de entender.

Comentarios. Algunas personas pueden argumentar que la *regla de eliminación de columnas* ofrece una ventaja computacional porque hace el problema sucesivamente más pequeño al eliminar variables, en tanto que nuestro procedimiento lo hace más grande al agregar nuevas restricciones. Considerando la naturaleza de las restricciones adicionales ($\rho_i = \rho_i^*$), podemos modificar el algoritmo simplex para implementar la restricción adicional implícitamente sustituyendo $\rho_i = \rho_i^*$. La sustitución (que afecta sólo a la restricción en la que aparece ρ_i) reduce el número de variables a medida que el algoritmo se mueve de una meta a la siguiente. De otra manera, podemos utilizar el método simplex acotado de la sección 7.4.2, reemplazando $\rho_i = \rho_i^*$ con $\rho_i \leq \rho_i^*$, en cuyo caso las restricciones adicionales se toman en cuenta de manera tácita. Al respecto, la *regla de eliminación de columnas*, aparte de su atractivo teórico no parece ofrecer una ventaja computacional particular.

Para completar el planteamiento, el ejemplo 8.2-3 ilustrará cómo funciona la *regla de eliminación de columnas*.

Ejemplo 8.2-2

El problema del ejemplo 8-2.1 se resuelve por el método preventivo. Suponga que la meta de exposición tiene la prioridad más alta.

Paso 0. $G_1 > G_2$

$$G_1\text{: Minimizar } s_1^- \text{ (Satisfacer la meta de exposición)}$$

$$G_2\text{: Minimizar } s_2^+ \text{ (Satisfacer la meta de presupuesto)}$$

Paso 1. Resuelva la PL_i

$$\text{Minimizar } G_1 = s_1^-$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
4x_1 + 8x_2 + s_1^- - s_1^+ \quad &= 45 \text{ (Meta de exposición)}\\
8x_1 + 24x_2 \quad + s_2^- - s_2^+ &= 100 \text{ (Meta de presupuesto)}\\
x_1 + 2x_2 \quad &\leq 10 \text{ (Límite de personal)}\\
x_1 \quad &\leq 6 \text{ (Límite de radio)}
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+ \geq 0$$

La solución óptima (determinada por **TORA**) es $x_1 = 5$ minutos, $x_2 = 2.5$ minutos, $s_1^- = 5$ millones de personas, con las variables restantes iguales a cero. La solución muestra que 5 millones de personas violan la meta de exposición, G_1. La restricción adicional que se añade al problema G_2 es $s_1^- = 5$ (o, lo que es lo mismo, $s_1^- \leq 5$).

Paso 2. La función objetivo de la PL_2 es

$$\text{Minimizar } G_2 = s_2^+$$

Las restricciones son las mismas que en el paso 1 *más* la restricción adicional $s_1^- = 5$. (Puede aplicarse la opción MODIFY de TORA para representar la nueva restricción asignando 5 tanto a la cota inferior como a la cota superior de s_1^-.)

Por lo general, la restricción adicional $s_1^- = 5$ también puede explicarse al sustituir en la primera restricción. El resultado es que el lado derecho de la restricción de la meta de exposición cambiará de 45 a 40, lo que reduce la LP_2 a

$$\text{Minimizar } G_2 = s_2^+$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
4x_1 + 8x_2 - s_1^+ \quad &= 40 \text{ (Meta de exposición)}\\
8x_1 + 24x_2 \quad + s_2^- - s_2^+ &= 100 \text{ (Meta de presupuesto)}\\
x_1 + 2x_2 \quad &\leq 10 \text{ (Límite de personal)}\\
x_1 \quad &\leq 6 \text{ (Límite de radio)}
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, s_1^+, s_2^-, s_2^+ \geq 0$$

La nueva formulación tiene una variable menos que la de la PL_1, la cual es la idea general anticipada por la *regla de eliminación de columnas*.

En realidad, la optimización de la PL_2 no es necesaria en este problema porque la solución óptima al problema G_1 ya da por resultado $s_2^+ = 0$; es decir, ya es óptima para la PL_2. Tales oportunidades de ahorro de cálculos deben aprovecharse siempre que se presenten durante el curso de implementación del método preventivo.

Ejemplo 8.2-3 (Regla de eliminación de columnas)

En este ejemplo demostramos que puede obtenerse una mejor solución para el problema de los ejemplos 8.2-1 y 8.2-2 si se utiliza el método preventivo para *optimizar* los objetivos en lugar de *satisfacer* las metas. Más adelante, el mismo ejemplo se resuelve aplicando la *regla de eliminación de columnas*.

Las metas del ejemplo 8.2-1 se puede formular como

Prioridad 1: Maximizar la exposición (P_1)

Prioridad 2: Minimizar el costo (P_2)

Matemáticamente, los dos objetivos se dan como

$$\text{Maximizar } P_1 = 4x_1 + 8x_2 \quad \text{(Exposición)}$$

$$\text{Minimizar } P_2 = 8x_1 + 24x_2 \quad \text{(Costo)}$$

Los límites específicos para las metas de exposición y de costo (= 45 y 100) en los ejemplos 8.2-1 y 8.2-2 se eliminan, porque dejaremos que el método simplex determine estos límites óptimamente.

Por lo tanto el nuevo problema se formula como

$$\text{Maximizar } P_1 = 4x_1 + 8x_2$$

$$\text{Minimizar } P_2 = 8x_1 + 24x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Primero resolvemos el problema siguiendo el procedimiento presentado en el ejemplo 8.2-2.

Paso 1. Resuelva la PL_1.

$$\text{Maximizar } P_1 = 4x_1 + 8x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima (obtenida por TORA) es $x_1 = 0, x_2 = 5$ con $P_1 = 40$, lo que demuestra que la exposición máxima que podemos obtener es de 40 millones de personas.

Paso 2. Agregue la restricción $4x_1 + 8x_2 \geq 40$ para asegurarnos de que la meta G_1 no se degrade. Por lo tanto, resolvemos la PL_2 como

$$\text{Minimizar } P_2 = 8x_1 + 24x_2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 \qquad \leq 6$$

$$4x_1 + 8x_2 \geq 40 \text{ (restricción adicional)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La solución óptima de la PL_2 es $P_2 = \$96{,}000$, $x_1 = 6$ minutos, y $x_2 = 2$ minutos. Esto da por resultado la misma exposición ($P_1 = 40$ millones de personas) pero a un costo menor que el del ejemplo 8.2-2, donde buscamos satisfacer en lugar de optimizar las metas.

El mismo problema se resuelve ahora con la *regla de eliminación de columnas*. La regla indica que incluyamos las filas objetivo asociadas con todas las metas en la tabla simplex, como se demostrará a continuación.

PL_1 (Maximización de la exposición). La tabla simplex de la PL_1 incluye ambas filas objetivo P_1 y P_2. La condición de optimalidad aplica sólo a la fila objetivo P_1. La fila P_2 desempeña un rol pasivo en la PL_1, pero debe ser actualizada (mediante las operaciones de filas de simplex) con el resto de la tabla simplex en preparación para la optimización de la PL_2.

La PL_1 se resuelve en dos iteraciones como sigue:

Iteración	Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución
1	P_1	–4	–8	0	0	0
	P_2	–8	–24	0	0	0
	s_1	1	2	1	0	10
	s_2	1	0	0	1	6
2	P_1	0	0	4	0	40
	P_2	4	0	12	0	120
	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	5
	s_2	1	0	0	1	6

La última tabla da por resultado la solución óptima $x_1 = 0, x_2 = 5$ y $P_1 = 40$.

La *regla de eliminación de columnas* pide que se elimine cualquier variable *no básica* x_j con $z_j - c_j \neq 0$ a partir de la tabla óptima de la PL_1 antes de optimizar la PL_2. La razón es que si estas variables no se verifican, podrían volverse positivas en problemas de optimización de baja prioridad, las cuales pueden degradar la calidad de soluciones de alta prioridad.

PL_2 (Minimización de costos). La regla de eliminación de columnas elimina s_1 (con $z_j - c_j = 4$ en la PL_1). En la fila P_2 podemos ver que si no se elimina s_1 será la variable de entrada en el inicio de las iteraciones P_2 y el resultado será la solución óptima $x_1 = x_2 = 0$, la cual degradará el valor objetivo óptimo del problema P_1 desde $P_1 = 40$ hasta $P_1 = 0$ (¡compruébelo!).

El problema P_2 es del tipo de minimización. Después de la eliminación de s_1, la variable x_1 con $z_j - c_j = 4$ (> 0) puede mejorar el valor de P_2. La siguiente tabla muestra las iteraciones la PL_2. Se eliminó la fila P_1 porque no tiene ningún propósito en la optimización de la PL_2.

Iteración	Básica	x_1	x_2	s_1	s_2	Solución
1	P_1					40
	P_2	4	0		0	120
	x_2	$\frac{1}{2}$	1		0	5
	s_2	1	0		1	6
2	P_1					40
	P_2	0	0		–4	96
	x_2	0	1		$-\frac{1}{2}$	2
	x_1	1	0		1	6

La solución óptima ($x_1 = 6, x_2 = 2$) con una exposición total de $P_1 = 40$ y un costo total de $P_2 = 96$ es la misma que se obtuvo antes.

Momento de AMPL

AMPL se presta muchísimo para la aplicación de la idea presentada en el ejemplo 8.2-2, donde se agregan restricciones simples para garantizar que las soluciones de alta prioridad no se degraden. El archivo *amplEx.8.1-1.txt* proporciona un código AMPL genérico que permite aplicar el método preventivo. El modelo debe implementarse de manera interactiva como se explica en la sección C9 en el sitio web.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 8.2B[2]

1. En el ejemplo 8.2-2, suponga que la meta de presupuesto se incrementa a $110,000. La meta de exposición permanece en 45 millones de personas. Demuestre cómo determinará una solución el método preventivo.

***2.** Resuelva el problema 1, conjunto 8.1a, utilizando el siguiente orden de las prioridades para las metas: $G_1 > G_2 > G_3 > G_4 > G_5$.

3. Considere el problema 2, conjunto 8.1a, que se refiere a la presentación de conciertos y exposiciones de arte en el centro comercial NW. Suponga que las metas establecidas para adolescentes, el grupo de mediana edad y el de adultos mayores se designan como G_1, G_2 y G_3, respectivamente. Resuelva el problema para cada uno de los siguientes órdenes de prioridad.

(a) $G_1 > G_2 > G_3$

(b) $G_3 > G_2 > G_1$

[2]Puede ver que es computacionalmente conveniente utilizar AMPL de manera interactiva para resolver los problemas de este conjunto.

Demuestre que la satisfacción de las metas (o falta de ella) puede ser una función del orden de las prioridades.

4. Resuelva el modelo de la Universidad de Ozark (problema 3, conjunto 8.1a) siguiendo el método preventivo, a reserva de que las metas se hayan priorizado en el mismo orden que se dio en el problema.

BIBLIOGRAFÍA

Chissman, J., T. Fey, G. Reeves, H. Lewis, y R. Weinstein, "A Multiobjective Linear Programming Methodology for Public Sector Tax Planning", *Interfaces,* vol. 19, núm. 5, págs.13-22, 1989.

Cohon,T.L.*, Multiobjective Programming and Planning,* Academic Press, Nueva York, 1978.

Ignizio, J.P., y T.M. Cavalier, *Linear Programming,* Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1994.

Steuer, R.E., *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computations, and Application*, Wiley, Nueva York, 1986.

CAPÍTULO 9

Programación lineal entera

Aplicación de la vida real. Optimización de las cargas de camiones de remolque en PFG Building Glass

PFG utiliza camiones de remolque (de quinta rueda) especialmente equipados para entregar paquetes de hojas de vidrio plano a clientes. Los paquetes varían tanto en tamaño como en peso, una carga puede incluir diferentes paquetes, según los pedidos recibidos. Los reglamentos gubernamentales limitan los pesos sobre los ejes y la colocación de los paquetes en el remolque es crucial para determinar estos pesos. El problema tiene que ver con la determinación de la carga óptima de los paquetes sobre la cama del camión para satisfacer los límites de peso sobre los ejes. El problema se resuelve como un programa entero. El caso 7 del capítulo 26 en el sitio web proporciona los detalles del estudio.

9.1 APLICACIONES ILUSTRATIVAS

Por lo general, las aplicaciones de programación lineal entera (PLE) caen dentro de dos categorías: *directa* y *transformada*. En la categoría *directa*, la naturaleza de la situación impide la asignación de valores fraccionarios a las variables del modelo. Por ejemplo, el problema puede implicar la determinación de si se emprende o no un proyecto (variable binaria), o la determinación del número óptimo de máquinas necesarias para realizar una tarea (variable general entera). En la categoría *transformada* se utilizan variables enteras auxiliares para convertir analíticamente situaciones insolubles en modelos que pueden resolverse por medio de algoritmos de optimización disponibles. Por ejemplo, en la secuencia de dos trabajos, A y B, en una sola máquina, el trabajo A puede preceder al trabajo B o viceversa. La naturaleza "o" de las restricciones es lo que hace al problema analíticamente insoluble, porque todos los algoritmos de programación matemáticos tratan con sólo restricciones "y". La sección 9.1.4 muestra cómo se utilizan las variables binarias auxiliares para transformar las restricciones "o" en "y", sin modificar la naturaleza del modelo.

Por comodidad, un problema se define como programa entero **puro** cuando *todas* las variables son enteras. En caso contrario, es un programa entero **combinado** (PEC) que implica una combinación de variables enteras y continuas.

9.1.1 Presupuesto de capital

La toma de decisiones de emprender o no un proyecto suele hacerse conforme a consideraciones y prioridades preestablecidas de presupuesto limitado. El siguiente ejemplo presenta una de estas situaciones.

Ejemplo 9.1-1 (Selección de un proyecto)

Se están evaluando cinco proyectos a lo largo de un horizonte de planeación de 3 años. La siguiente tabla presenta los rendimientos esperados y los gastos anuales que conllevan.

	Gastos ($ millones)/año			
Proyecto	*1*	*2*	*3*	Rendimientos ($ millones)
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Fondos disponibles ($ millones)	25	25	25	

¿Cuáles proyectos deben seleccionarse a lo largo del periodo de 3 años?

El problema se reduce a una decisión "sí-no" para cada proyecto. Defina la variable binaria x_j como

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ si se selecciona el proyecto } j \\ 0, \text{ si no se selecciona el proyecto } j \end{cases}$$

El modelo de PLE es

$$\text{Maximizar } z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

Sujeto a

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$

$$x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$$

$$8x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = (0, 1)$$

La solución óptima entera (obtenida con AMPL, Solver, o TORA)[1] es $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = 0$, con $z = 95$ ($ millones). La solución excluye el proyecto 5 de la combinación de proyectos.

[1]Para utilizar TORA, seleccione el menú Integer Programming de la barra de menús Main. Después de ingresar los datos del problema, diríjase a la pantalla de resultados, y seleccione Automated B&B para obtener la solución óptima. Solver se utiliza igual que en la PL, sólo que las variables deben declararse enteras. La opción entera (*int* o *bin*) está disponible en el cuadro de diálogo **Solver Parameters** cuando agrega una nueva restricción. La implementación de AMPL para programación entera es la misma que en la PL, excepto que algunas o todas las variables se declaran enteras agregando la palabra clave `integer` (o `binary`) en la instrucción de definición de las variables. Por ejemplo, la instrucción `var x{J}>= 0,integer;` declara a x_j como entera no negativa para todas las $j \in J$. Si x_j es binaria, la instrucción se cambia a `var x{J}>=0, binary;`. Para su ejecución, la instrucción `option solver cplex;` debe preceder a `solve;`.

Comentarios. Es interesante comparar la solución de PL continua con la solución del PLE. La solución óptima de PL, obtenida reemplazando $x_j = (0,1)$ con $0 \leq x_j \leq 1$ para todas las j, da por resultado $x_1 = .5789, x_2 = x_3 = x_4 = 1, x_5 = .7368$, y $z = 108.68$ ($ millones). La solución no tiene sentido porque la x_1 y x_5 binarias asumen valores fraccionarios. Podemos *redondear* la solución al entero más cercano, lo que da $x_1 = x_5 = 1$. Sin embargo, la solución resultante infringe las restricciones. Además, el concepto de *redondeo* carece de sentido en este caso porque x_j representa una decisión "sí-no".

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.1A[2]

1. Modifique y resuelva el modelo de presupuesto de capital del ejemplo 9.1-1 para tener en cuenta las siguientes restricciones adicionales:

(a) Debe seleccionarse el proyecto 5 ya sea que se seleccionen el proyecto 1 o el proyecto 3.

(b) Los proyectos 2 y 3 son mutuamente excluyentes.

2. Se van a cargar cinco artículos en un buque. A continuación se tabulan el peso w_i, el volumen v_i y el valor r_i del artículo *i*.

Artículo *i*	Peso unitario, w_i (toneladas)	Volumen unitario, v_i (yd^3)	Valor unitario, r_i ($100)
1	5	1	4
2	8	8	7
3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

El peso y el volumen de la carga máximos permisibles son de 112 toneladas y 109 yd^3, respectivamente. Formule el modelo de programación lineal entera, y determine la carga más valiosa.

*__3.__ Suponga que tiene 7 botellas de vino llenas, 7 a la mitad y 7 vacías. Le gustaría dividir las 21 botellas entre tres individuos de modo que cada uno reciba exactamente 7. Además, cada individuo debe recibir la misma cantidad de vino. Exprese el problema como restricciones del PLE, y halle una solución. (*Sugerencia:* Use una función objetivo ficticia en la que todos los coeficientes objetivo sean ceros.).

4. Un excéntrico jeque dejó testamento para distribuir un rebaño de camellos entre sus tres hijos: Tarek recibe la mitad del rebaño, Sharif obtiene una tercera parte y Maisa recibe un noveno. El resto se destina a la caridad. El testamento no específica el tamaño del rebaño, sólo dice que es un número impar de camellos y que la institución de caridad nombrada recibe exactamente un camello. Use la PLE para determinar cuántos camellos dejó el jeque en el testamento y cuántos obtiene cada hijo.

5. Una pareja de granjeros envía a sus tres hijos al mercado para que vendan 90 manzanas; Karen, la mayor, lleva 50 manzanas; Bill el de en medio, lleva 30; y John, el más joven, lleva sólo 10. Los padres han estipulado cinco reglas: (a) el precio de venta es de $1 por 7 manzanas o $3 por 1 manzana; o una combinación de los dos precios. (b) Cada hijo puede ejercer una o ambas opciones del precio de venta. (c) Cada uno debe regresar con exactamente la misma cantidad de dinero. (d) El ingreso de cada hijo debe ser de dólares enteros (no se permiten centavos). (e) La cantidad recibida por cada hijo debe ser la máxima posible según las condiciones estipuladas. Dado que los tres hijos son capaces de

[2]Los problemas 3 a 6 son una adaptación de Malba Tahan, *El Hombre que Calculaba*, Editorial Limusa, México, DF, págs. 39-182, 1994. Los problemas 13 a 16 son una adaptación de acertijos compilados en http: www.chlond.demon.co.uk/puzzles/puzzles1.html. Desde luego sin tomar en cuenta las letras compuestas CD y LL. (N. del T).

vender todo lo que llevan, use la PLE para mostrar cómo se pueden satisfacer las condiciones de sus padres.

*6. Un capitán de un barco mercante deseaba recompensar a tres miembros de la tripulación por su valiente esfuerzo al salvar la carga del barco durante una inesperada tormenta en alta mar. El capitán apartó una suma de dinero en la oficina del sobrecargo e instruyó al primer oficial para que la distribuyera en partes iguales entre los tres marineros después de que el barco atracara. Una noche, uno de los marineros, sin que los otros supieran, se dirigió a la oficina del sobrecargo y decidió reclamar un tercio (equitativo) del dinero de forma anticipada. Después de que dividió el dinero en tres partes iguales sobró una moneda, la que el marinero decidió conservar (además de un tercio del dinero). La noche siguiente, el segundo marinero tuvo la misma idea y repitió la misma división en tres partes con lo que quedó, y terminó quedándose con una moneda extra. La tercera noche el tercer marinero también tomó un tercera parte de lo que quedaba, más una moneda extra que no podía dividirse. Cuando el barco arribó, el primer oficial dividió lo que restaba del dinero en partes iguales entre los tres marineros, quedando de nuevo una moneda extra. Para simplificar las cosas, el primer oficial apartó la moneda extra y les dio a los marineros sus partes iguales asignadas. ¿Cuánto dinero había en la caja fuerte al inicio? Formule el problema como una PLE, y halle la solución. (*Sugerencia:* El problema tiene una infinitud de soluciones enteras. Por comodidad, supongamos que nos interesa determinar la suma mínima de dinero que satisfaga las condiciones del problema. Luego, aumente uno a la suma resultante, y agréguelo como cota inferior para obtener la siguiente suma mínima. Continuando de esta manera, emergerá un patrón de solución general.)

7. *Weber (1990).* Supongamos que tenemos las siguientes palabras de tres letras: AFT, FAR, TVA, ADV, JOE, FIN, OSF y KEN. Supongamos que le asignamos valores numéricos al alfabeto comenzando con $A = 1$ y terminando con $Z = 27$. A cada palabra se le asigna una calificación sumando los códigos numéricos de sus tres letras. Por ejemplo, AFT tiene una calificación de $1 + 6 + 20 = 27$. Debe seleccionar cinco de las ocho palabras dadas que den la calificación máxima total. Al mismo tiempo, las cinco palabras deben satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{pmatrix}\text{suma de las calificaciones}\\ \text{de la letra 1}\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}\text{suma de las calificaciones}\\ \text{de la letra 2}\end{pmatrix} < \begin{pmatrix}\text{suma de las calificaciones}\\ \text{de la letra 3}\end{pmatrix}$$

Formule el problema como una PLE y halle la solución óptima.

8. Resuelva el problema 7 dado que, además de que la suma total es la máxima, la suma de la columna 1 y la suma de la columna 2 también serán las máximas. Halle la solución óptima.

9. *Weber (1990).* Considere los siguientes grupos de palabras:

Grupo 1	Grupo 2
AREA	ERST
FORT	FOOT
HOPE	HEAT
SPAR	PAST
THAT	PROF
TREE	STOP

Todas las palabras en los grupos 1 y 2 pueden formarse con las nueve letras A, E. F, H, O, P, R, S y T. Desarrolle un modelo para asignar un valor numérico único del 1 al 9 a estas letras, de modo que la diferencia entre las calificaciones totales de los dos grupos será lo más pequeña posible. *Nota:* La calificación para una palabra es la suma de los valores numéricos asignados a sus letras individuales.

*10. La compañía Record-a-Song contrató a una estrella en ascenso para que grabe ocho canciones. Los tamaños en MB de las diferentes canciones son de 8, 3, 5, 5, 9, 6 y 12, respectivamente. Record-a-Song utiliza dos CD para la grabación. La capacidad de cada CD es de 30 MB. A la compañía le gustaría distribuir las canciones en los dos CD de modo que el espacio utilizado en cada uno sea aproximadamente el mismo. Formule el problema como una programación lineal entera y determine la solución óptima.

11. En el problema 10, suponga que la naturaleza de las melodías dicta que las canciones 3 y 4 no pueden grabarse en el mismo CD. Formule el problema como una PLE. ¿Sería posible utilizar un CD de 25 MB para grabar las ocho canciones? Si no, utilice la PLE para determinar la capacidad mínima del CD para realizar la grabación.

*12. *Graves and Asoociates (1993)*. La Universidad de Ulern utiliza un modelo matemático que optimiza las preferencias de los estudiantes tomando en cuenta la limitación del salón de clases y el profesorado. Para demostrar la aplicación del modelo, considere el caso simplificado de 10 estudiantes a los que se les pidió que seleccionaran dos cursos de entre seis ofrecidos. La tabla siguiente muestra las calificaciones que representan la preferencia de cada estudiante por los cursos individuales, con 100 como la calificación más alta. Para simplificar, se supone que la calificación de la preferencia de una selección de dos cursos es la suma de las calificaciones individuales. La capacidad del curso es el número máximo de estudiantes que pueden tomar la clase.

	Calificación de preferencia por curso					
Estudiante	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	20	40	50	30	90	100
2	90	100	80	70	10	40
3	25	40	30	80	95	90
4	80	50	60	80	30	40
5	75	60	90	100	50	40
6	60	40	90	10	80	80
7	45	40	70	60	55	60
8	30	100	40	70	90	55
9	80	60	100	70	65	80
10	40	60	80	100	90	10
Capacidad del curso	6	8	5	5	6	5

Formule el problema como una PLE y halle la solución óptima.

13. Tiene tres denominaciones de moneda con 11 monedas de cada una. El valor *total* (de las 11 monedas) es de 15 bits para la denominación 1, 16 para la denominación 2, y 17 bits para la 3. Usted necesita comprar un artículo de 11 bits. Use la PLE para determinar la cantidad mínima de monedas de las tres denominaciones que se requiere para realizar la compra.

14. Tiene un tablero de 4×4 casillas y un total de 10 fichas. Use la PLE para colocar las fichas en el tablero de modo que cada fila y cada columna tengan un número par de fichas.

15. A un vendedor callejero que vende aparatos electrónicos le robaron toda su mercancía. Cuando denunció el hecho a la policía, el vendedor no supo decir cuántos aparatos que tenía pero declaró que cuando dividía el total en lotes de 2, 3, 4, 5 o 6, siempre sobraba un aparato. Por otra parte, no sobraba ninguno cuando el total se dividía en lotes de 7. Use PLE para determinar el total de aparatos que el vendedor tenía.

16. Dado que $i = 1, 2, \ldots, n$, formule un modelo de PLE (para cualquier n) para determinar el número mínimo y que, cuando se divide entre la cantidad entera $2 + i$, siempre producirá un remanente igual a i; es decir, y mod $(2 + i) = i$.

17. Un acertijo muy conocido requiere que se asigne un solo dígito *distinto* (del 0 al 9) a cada letra de la ecuación SEND + MORE = MONEY. Formule el problema como un programa entero y halle la solución. (*Sugerencia:* Éste es un modelo de asignación con condiciones colaterales.)

18. El acertijo lógico japonés mundialmente conocido, Sudoku, se compone de una cuadrícula de 9 × 9 subdividida en 9 subcuadrículas de 3 × 3 que no se traslapan. El acertijo consiste en asignar los dígitos numéricos del 1 al 9 a las celdas de la cuadrícula de modo que cada fila, cada columna y cada subcuadrícula, contenga dígitos distintos. Algunas de las celdas pueden fijarse con anticipación.

Formule el problema como un programa entero, y halle la solución para el caso dado a continuación.

	6		1		4		5	
		8	3		5	6		
2						7		
8			4		7			6
		6				3		
7			9		1			4
5								2
		7	2		6	9		
	4		5		8		7	

[*Sugerencia:* sea $x_{ijk} = 1$ si se coloca el dígito k en la celda (i,j), $i,j,k = 1, 2,\ldots,n$, $n = 9$. Si utiliza AMPL, tenga en cuenta que con $n = 9$, la cantidad de variables que resulte excederá la capacidad de la versión estudiantil de AMPL. Si no tiene acceso a la versión completa de AMPL, puede desarrollar un modelo general para $n = 4$ o 9, y luego resolverlos para el caso más sencillo (casi trivial) de una cuadrícula de 4 × 4 con una subcuadrícula de 2 × 2.

9.1.2 Problema de cobertura de conjunto

En esta clase de problemas, varias plantas ofrecen servicios que se traslapan a varias instalaciones. El objetivo es determinar la cantidad mínima de plantas que *cubren* (es decir, que satisfacen las necesidades de servicio de) cada instalación. Por ejemplo, se pueden construir plantas de tratamiento de agua en varios lugares, y cada planta sirve a un grupo de ciudades. El traslape ocurre cuando a una ciudad dada le da servicio más de una planta.

Ejemplo 9.1-2 (Instalación de teléfonos de seguridad)

Para promover la seguridad en el campus el Departamento de Seguridad Pública de la Universidad de Arkansas se encuentra en proceso de instalación de teléfonos de emergencia en lugares seleccionados. El departamento desea instalar una cantidad mínima de estos aparatos que presten servicio a cada una las calles principales del campus. La figura 9.1 es un mapa de dichas calles.

Es lógico maximizar la utilidad de los teléfonos si se les coloca en intersecciones de calles. De este modo, una sola unidad puede prestar servicio al menos a dos calles.

Defina

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ se instala un teléfono en el lugar } j,\ j = 1, 2, \ldots, 8 \\ 0, \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

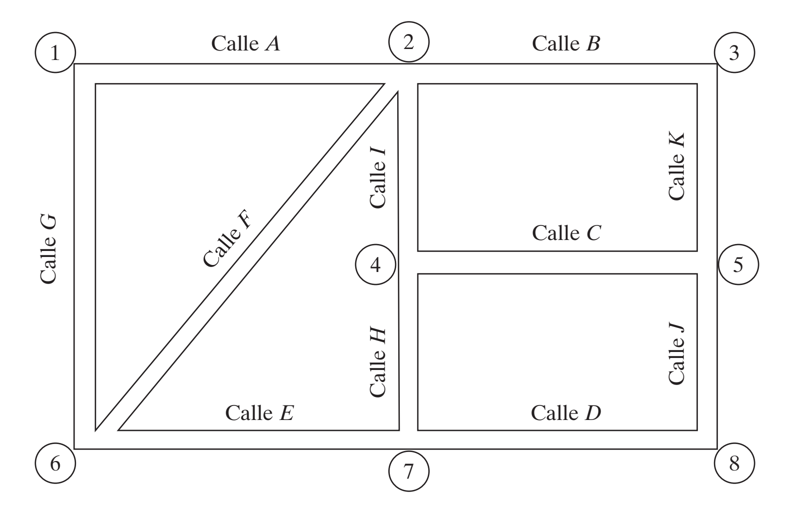


FIGURA 9.1

Mapa de las calles del campus de la Universidad de Arkansas

Las restricciones del problema requieren que se instale al menos un teléfono en cada una de las 11 calles (A a K). Por lo tanto, el modelo es

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

Sujeto a

$$
\begin{array}{llll}
x_1 + x_2 & \geq 1 & \text{(Calle } A) \\
x_2 + x_3 & \geq 1 & \text{(Calle } B) \\
x_4 + x_5 & \geq 1 & \text{(Calle } C) \\
x_7 + x_8 & \geq 1 & \text{(Calle } D) \\
x_6 + x_7 & \geq 1 & \text{(Calle } E) \\
x_2 + x_6 & \geq 1 & \text{(Calle } F) \\
x_1 + x_6 & \geq 1 & \text{(Calle } G) \\
x_4 + x_7 & \geq 1 & \text{(Calle } H) \\
x_2 + x_4 & \geq 1 & \text{(Calle } I) \\
x_5 + x_8 & \geq 1 & \text{(Calle } J) \\
x_3 + x_5 & \geq 1 & \text{(Calle } K)
\end{array}
$$

$$x_j = (0, 1),\ j = 1, 2, \ldots, 8$$

La solución óptima del problema requiere que se instalen cuatro teléfonos en las intersecciones 1, 2, 5 y 7.

Comentarios. En el sentido estricto, los problemas de cobertura se caracterizan por los siguientes criterios: (1) Las variables x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ son binarias; (2) los coeficientes del lado iz-

quierdo de las restricciones son 0 o 1; (3) el lado derecho de cada restricción es de la forma (≥1), y (4) la función objetivo minimiza $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, donde $c_j > 0$ para toda $j = 1, 2,...,n$. En este ejemplo, $c_j = 1$ para todas las j. Si c_j representa el costo de instalación en la intersección j, entonces estos coeficientes pueden asumir valores diferentes de 1. Las variaciones del problema de cobertura incluyen condiciones colaterales adicionales, como se describe por medio de algunas de las situaciones descritas en los problemas del conjunto 9.1b.

Momento de AMPL

El archivo *amplEx9.1-2.txt* proporciona un modelo general para cualquier problema de cobertura. La formulación se detalla en la sección C.9 en el sitio web.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.1B

*__1.__ ABC es una compañía de transporte de menos de una carga de camión que entrega cargas a diario a cinco clientes. La siguiente lista proporciona los clientes asociados con cada ruta:

Ruta	Clientes atendidos en la ruta
1	1, 2, 3, 4
2	4, 3, 5
3	1, 2, 5
4	2, 3, 5
5	1, 4, 2
6	1, 3, 5

Los segmentos de cada ruta dependen de la capacidad del camión que entrega las cargas. Por ejemplo, en la ruta 1, la capacidad del camión es suficiente para entregar las cargas a los clientes, 1, 2, 3 y 4 únicamente. La siguiente tabla enlista las distancias (en millas) entre la terminal de los camiones (ABC) y los clientes.

	Millas de *i* a *j*					
i \ *j*	ABC	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
ABC	0	10	12	16	9	8
1	10	0	32	8	17	10
2	12	32	0	14	21	20
3	16	8	14	0	15	18
4	9	17	21	15	0	11
5	8	10	20	18	11	0

El objetivo es determinar la distancia mínima necesaria para realizar las entregas diarias a los cinco clientes. Aun cuando la solución puede dar por resultado que un cliente sea atendido por más de una ruta, la fase de implementación utilizará sólo una de esas rutas. Formule el problema como un PLE, y halle la solución óptima.

*__2.__ La Universidad de Arkansas va a formar un comité para atender las quejas de los estudiantes. La administración desea que el comité incluya al menos una mujer, un hombre, un estudiante, un administrador y un profesor. Diez personas (identificadas, por simplici-

dad, con las letras de la *a* a la *j*) han sido nominadas, y se les ha combinado en las distintas categorías siguientes:

Categoría	Personas
Mujeres	*a*, *b*, *c*, *d*, *e*
Hombres	*f*, *g*, *h*, *i*, *j*
Estudiantes	*a*, *b*, *c*, *j*
Administradores	*e*, *f*
Profesores	*d*, *g*, *h*, *i*

La Universidad de Arkansas desea formar el menor comité con la representación de cada una de las cinco categorías. Formule el problema como un PLE, y halle la solución óptima.

3. El condado de Washington incluye seis poblaciones que necesitan el servicio de ambulancias de emergencia. Debido a la proximidad de algunas poblaciones, una sola estación puede atender a más de una comunidad. La estipulación es que la estación debe estar como máximo a 15 minutos de tiempo de manejo de la población que atiende. La siguiente tabla muestra los tiempos de manejo en minutos entre las seis poblaciones.

	Tiempos en minutos de *i* a *j*					
i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	0	23	14	18	10	32
2	23	0	24	13	22	11
3	14	24	0	60	19	20
4	18	13	60	0	55	17
5	10	22	19	55	0	12
6	32	11	20	17	12	0

Formule un PLE cuya solución produzca el número mínimo de estaciones y sus ubicaciones. Determine la solución óptima.

4. Los inmensos tesoros del Rey Tut están en exhibición en el Museo de Giza en El Cairo. La distribución del museo se muestra en la figura 9.2 con las diferentes salas comunicadas por puertas abiertas. Un guardia de pie en una puerta puede vigilar dos salas adyacentes. La política de seguridad del museo requiere la presencia de un guardia en cada sala. Formule el problema como un PLE para determinar el mínimo de guardias.

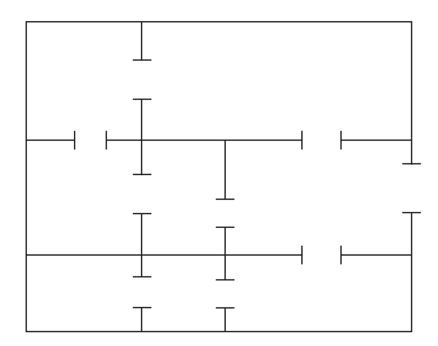


FIGURA 9.2

Distribución del museo del problema 4, conjunto 9.1c

5. Bill acaba de terminar sus exámenes del año académico y desea celebrar viendo todas las películas que se están exhibiendo en cines de su ciudad y otras ciudades vecinas. Si viaja a otra ciudad, se quedará allí hasta que vea todas las películas que desea. La siguiente tabla informa sobre las ofertas de películas y las distancias de viaje redondo a las ciudades vecinas.

Localización del cine	Ofertas de películas	Millas de viaje redondo	Costo por película ($)
En su ciudad	1, 3	0	7.95
Ciudad A	1, 6, 8	25	5.50
Ciudad B	2, 5, 7	30	5.00
Ciudad C	1, 8, 9	28	7.00
Ciudad D	2, 4, 7	40	4.95
Ciudad E	1, 3, 5, 10	35	5.25
Ciudad F	4, 5, 6, 9	32	6.75

El costo de conducir es de 75 centavos por milla. Bill desea determinar las ciudades que necesita visitar para ver todas las películas, al mismo tiempo que minimiza su costo total.

6. Las tiendas Walmark están en proceso de expansión en el oeste de Estados Unidos. Walmark planea construir durante el próximo año nuevas tiendas que prestarán servicio a 10 comunidades geográficamente dispersas. La experiencia pasada indica que una comunidad debe estar a una distancia máxima de 25 millas de una tienda para atraer clientes. Además, la población de una comunidad desempeña un rol importante en la ubicación de una tienda, en el sentido que las comunidades grandes generan más clientes participantes. La siguiente tabla proporciona las poblaciones y también las distancias (en millas) entre las comunidades.

	Millas de la comunidad *i* a la comunidad *j*										
i \ *j*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*Población*
1		20	40	35	17	24	50	58	33	12	10,000
2	20		23	68	40	30	20	19	70	40	15,000
3	40	23		36	70	22	45	30	21	80	28,000
4	35	68	36		70	80	24	20	40	10	30,000
5	17	40	70	70		23	70	40	13	40	40,000
6	24	30	22	80	23		12	14	50	50	30,000
7	50	20	45	24	70	12		26	40	30	20,000
8	58	19	30	20	40	14	26		20	50	15,000
9	33	70	21	40	13	50	40	20		22	60,000
10	12	40	80	10	40	50	30	50	22		12,000

La idea es construir el menor número de tiendas, teniendo en cuenta la restricción de la distancia y la concentración de las poblaciones.

Especifique las comunidades donde deben ubicarse las tiendas.

***7.** *Guéret and Associates (2002). Sección 12.6*. El presupuesto de MobileCo para construir 7 transmisores que cubran la mayor población posible en 15 comunidades geográficas con-

tiguas, es de 15 millones de dólares. A continuación se presentan las comunidades cubiertas por cada transmisor y los costos de construcción presupuestados.

Transmisor	Comunidades cubiertas	Costo (millones de $)
1	1, 2	3.60
2	2, 3, 5	2.30
3	1, 7, 9, 10	4.10
4	4, 6, 8, 9	3.15
5	6, 7, 9, 11	2.80
6	5, 7, 10, 12, 14	2.65
7	12, 13, 14, 15	3.10

La siguiente tabla proporciona las poblaciones de las diferentes comunidades:

Comunidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Población (en miles)	10	15	28	30	40	30	20	15	60	12

¿Cuáles de los transmisores propuestos deben construirse?

8. *Gavermini and Associates (2004).* Las redes eléctricas modernas utilizan medidores eléctricos automáticos en lugar de los más costosos medidores manuales. En el sistema automático, los medidores de varios clientes se enlazan inalámbricamente a un solo receptor. El medidor envía señales cada mes a un receptor designado para reportar el consumo de electricidad del cliente. Luego los datos se canalizan a una computadora central para generar los recibos. El objetivo es determinar el mínimo de receptores necesarios para atender a un número dado de medidores. En la vida real, el problema comprende miles de medidores y receptores. Este problema emplea 10 medidores y 8 posibles localizaciones para los receptores, con las siguientes configuraciones:

Receptor	1	2	3	4	5	6	7	8
Medidores	1, 2, 3	2, 3, 9	5, 6, 7	7, 9, 10	3, 6, 8	1, 4, 7, 9	4, 5, 9	1, 4, 8

9. Resuelva el problema 8 si, además, cada receptor puede manejar cuando mucho 3 medidores.

9.1.3 Problema de cargo fijo

El problema de cargo fijo tiene que ver con situaciones en que la actividad económica incurre en dos tipos de costos: un costo fijo necesario para iniciar la actividad y un costo variable proporcional al nivel de la actividad. Por ejemplo, el herramental inicial de una máquina antes de iniciar la producción incurre en un costo de preparación fijo independientemente de cuántas unidades se fabriquen. Una vez completa la preparación de la máquina, el costo de la mano de obra y del material es proporcional a la cantidad producida. Dado que F es el cargo fijo, c es el costo unitario variable, y x es el nivel de producción, la función de costo se expresa como

$$C(x) = \begin{cases} F + cx, \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

La función $C(x)$ es analíticamente insoluble porque implica una discontinuidad en $x = 0$. El siguiente ejemplo demuestra cómo se utilizan las variables binarias para volver el modelo analíticamente soluble.

Ejemplo 9.1-3 (Selección de una compañía telefónica)

Tres compañías telefónicas me ofrecen suscribirme a su servicio de larga distancia en Estados Unidos. MaBell cobra una cuota fija de \$16 por mes más \$.25 por minuto. PaBell cobra \$25 por mes pero reduce el costo por minuto a \$.21. En cuanto a BabyBell, la cuota fija mensual es de \$18, y el costo por minuto es de \$.22. Usualmente ocupo un promedio de 200 minutos de llamadas de larga distancia al mes. Suponiendo que no tenga que pagar la cuota fija mensual a menos que realice llamadas y que pueda repartirlas entre las tres compañías como me plazca, ¿cómo debería utilizar las tres compañías para minimizar mi recibo telefónico mensual?

Este problema es fácil de resolver sin PLE. No obstante, es instructivo formularlo como un programa entero.

Defina

x_1 = Minutos de larga distancia de MaBell por mes
x_2 = Minutos de larga distancia de PaBell por mes
x_3 = Minutos de largo distancia de BabyBell por mes
$y_1 = 1$ si $x_1 > 0$ y 0 si $x_1 = 0$
$y_2 = 1$ si $x_2 > 0$ y 0 si $x_2 = 0$
$y_3 = 1$ si $x_3 > 0$ y 0 si $x_3 = 0$

Podemos asegurar que y_j es igual a 1 cuando x_j es positiva por medio de la restricción

$$x_j \leq My_j,\ j = 1, 2, 3$$

El valor de M debe seleccionarse lo bastante grande como para no restringir artificialmente la variable x_j. Como ocupo aproximadamente 200 minutos de llamadas al mes, entonces $x_j \leq 200$ para todas las j, es seguro seleccionar $M = 200$.

El modelo completo es

$$\text{Minimizar } z = .25\text{x}_1 + .21x_2 + .22x_3 + 16y_1 + 25y_2 + 18y_3$$

Sujeto a

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\
x_1 &\leq 200y_1 \\
x_2 &\leq 200y_2 \\
x_3 &\leq 200y_3 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\
y_1, y_2, y_3 &= (0, 1)
\end{aligned}$$

La formulación muestra que la *j-ésima* cuota mensual fija formará parte de la función objetivo z sólo si $y_1 = 1$, lo cual puede suceder sólo si $x_j > 0$ (de acuerdo con las últimas tres restricciones

del modelo). Si $x_j = 0$ en el óptimo, entonces la minimización de z, junto con el hecho de que el coeficiente objetivo de y_1 sea positivo, hace que y_j sea igual a cero como se desea[3].

La solución óptima resulta $x_3 = 200$, $y_3 = 1$, y todas las variables restantes iguales a cero, lo que demuestra que debo seleccionar a BabyBell como mi proveedor de larga distancia. Recuerde que la información ofrecida por $y_3 = 1$ es redundante porque $x_3 > 0$ (= 200) implica el mismo resultado. En realidad, la razón principal para utilizar y_1, y_2 y y_3 se explica por la cuota mensual fija. De hecho, las tres variables binarias transforman un modelo (no lineal) de mal comportamiento en una formulación analíticamente soluble. Esta conversión ha dado por resultado la introducción de las variables (binarias) enteras en un problema que de lo contrario sería continuo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.1C

1. Leatherco firmó un contrato para fabricar lotes de pantalones, chalecos y chamarras. Cada producto requiere una preparación especial de las máquinas necesarias en los procesos de fabricación. La siguiente tabla proporciona los datos pertinentes con respecto al uso de la materia prima (piel) y el tiempo de mano de obra junto con estimaciones de costos e ingresos. Se estima que el abasto actual de piel es de 3000 pies^2, y el tiempo de mano de obra disponible está limitado a 2500 horas.

	Pantalones	Chalecos	Chamarras
Piel por unidad (pies^2)	5	3	8
Tiempo de mano de obra por unidad (h)	4	3	5
Costo de producción por unidad ($)	30	20	80
Costo de preparación del equipo por lote ($)	100	80	150
Precio por unidad ($)	60	40	120
Cantidad mínima de unidades necesarias	100	150	200

Determine la cantidad óptima de unidades que Leatherco debe fabricar de cada producto.

***2.** Jobco planea producir al menos 2000 artefactos con tres máquinas. El tamaño mínimo del lote es de 500 artefactos. La siguiente tabla ofrece los datos pertinentes de la situación.

Máquina	Costo de preparación ($)	Costo de producción/unidad ($)	Capacidad (unidades)
1	300	2	600
2	100	10	800
3	200	5	1200

Formule el problema como un PLE y halle la solución óptima.

[3]Por generalización, la condición $y_1 = 0$ si $x_i = 0$ puede reemplazarse con la condición compuesta $y_i = 1$ si $x_i > 0$ y 0 si $x_i = 0$ para hacerla independiente del sentido de optimización (maximización o minimización). El resultado se logra reemplazando las restricciones $x_i \leq My_i$ con $\frac{x_i}{M} \leq y_i \leq x_i$.

***3.** Oilco está considerando dos sitios de perforación potenciales para llegar a cuatro destinos (posibles pozos petroleros). La siguiente tabla presenta los costos de preparación en cada uno de los dos sitios, y el costo de perforación del sitio i al destino j ($i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4$).

	Costo de perforación ($ millones) hasta el destino				
Sitio	*1*	*2*	*3*	*4*	Costo de preparación (($ millones)
1	2	1	8	5	5
2	4	6	3	1	6

Formule el problema como un PLE y halle la solución óptima.

4. Se consideran tres sitios industriales para situar plantas de manufactura. Las plantas envían sus abastos a tres clientes. El abasto en las plantas, la demanda de los clientes y el costo unitario de transporte de las plantas a los clientes aparecen en la siguiente tabla.

	Costo de transporte unitario ($)			
Planta \ *Cliente*	*1*	*2*	*3*	*Abasto*
1	10	15	12	1800
2	17	14	20	1400
3	15	10	11	1300
Demanda	1200	1700	1600	

Aparte de los costos de transporte, las plantas 1, 2 y 3 incurren en costos fijos a razón de $12,000, $11,000 y $12,000, respectivamente. Formule el problema como un programa lineal entero y halle la solución óptima.

5. Repita el problema 4 suponiendo que las demandas de los clientes 2 y 3 cambian a 800 por cada uno.

6. *Liberatore and Miller (1985).* Una planta manufacturera utiliza dos líneas de producción para producir tres productos durante los próximos 6 meses. No se permiten demandas atrasadas. Sin embargo, se pueden tener existencias de más de un producto para satisfacer la demanda en meses posteriores. La siguiente tabla presenta los datos asociados con la demanda, producción y almacenaje de los tres productos.

	Demanda en el periodo							
Producto	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	Costo de retención unitario ($/mes)	Inventario inicial
1	50	30	40	60	20	45	.50	55
2	40	60	50	30	30	55	.35	75
3	30	40	20	70	40	30	.45	60

Hay un costo fijo por el cambio de una línea de un producto a otro. Las siguientes tablas dan el costo de cambio, las tasas de producción y el costo de producción unitario por cada línea:

	Costo de cambio de la línea ($)		
	Producto 1	*Producto 2*	*Producto 3*
Línea 1	200	180	300
Línea 2	250	200	174

	Tasa de producción (unidades/mes)			Costo de producción unitario ($)		
	Producto 1	*Producto 2*	*Producto 3*	*Producto 1*	*Producto 2*	*Producto 3*
Línea 1	40	60	80	10	8	15
Línea 2	90	70	60	12	6	10

Desarrolle un modelo para determinar el programa de producción óptimo.

7. *Jarvis and Associates (1978).* Se está pensando en siete ciudades como sitios potenciales para la construcción de un máximo de cuatro plantas de tratamiento de aguas residuales. La tabla siguiente presenta los datos de la situación. Los enlaces faltantes indican que no se puede construir un oleoducto.

	Costo ($) de construcción del oleoducto entre ciudades por cada 1000 gal/h de capacidad						
De \ *A*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1		100		200		50	
2				120		150	
3	400				120		90
4			120		120		
5		200				100	200
6			110	180			70
7	200			150			
Costo millones de $ de construcción de la planta	1.00	1.20	2.00	1.60	1.80	.90	1.40
Población (miles)	50	100	45	90	75	60	30

La capacidad de un oleoducto (en galones por hora) es una función directa de la cantidad de aguas residuales generada, la cual es una función de las poblaciones. Se descargan aproximadamente 500 galones por cada 1000 residentes al sistema de drenaje por hora. La capacidad máxima de la planta es de 100,000 gal/h. Determine la ubicación y capacidad óptimas de las plantas.

8. *Brown and Associates (1987).* Una compañía utiliza cuatro camiones cisterna especiales para entregar a clientes cuatro productos de gasolina diferentes. Cada camión tiene cinco compartimientos de diferentes capacidades: 500, 750, 1200, 1500 y 1750 galones. Las demandas diarias de los cuatro productos se estiman en 10, 15, 12 y 8 mil galones. Cualquier cantidad que no pueda ser entregada por los cuatro camiones de la compañía debe subcontratarse a los costos adicionales de 5, 12, 8 y 10 centavos por galón de los productos 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Desarrolle el programa de carga diaria óptimo para los cuatro camiones que minimizará el costo adicional de subcontratación.

9. Una familia utiliza mensualmente al menos 3000 minutos de llamadas de larga distancia y puede elegir el uso de los servicios de cualquiera de las compañías A, B y *C*. La compañía A cobra una cuota mensual fija de $10 y 5 centavos por minuto por los primeros 1000 minutos, y 4 centavos por minuto por todos los minutos adicionales. La cuota mensual de la compañía B es de $20 con un cobro fijo de 4 centavos por minuto. El cobro mensual de la compañía C es de $25 con 5 centavos por minuto por los primeros 1000 minutos, y 3.5 centavos después de ese límite. ¿Cuál compañía debe seleccionarse para minimizar el cobro mensual total?

*__10.__ *Barnett (1987).* El profesor Yataha necesita programar seis viajes redondos entre Boston y Washington, D.C. Tres aerolíneas cubren la ruta: Eastern, US Air, y Continental y no hay penalización por la compra de un boleto de viaje sencillo. Cada aerolínea ofrece mi-

llas de gratificación para viajeros frecuentes. Eastern otorga 1000 millas por boleto (de viaje sencillo) y 5000 millas más si la cantidad de boletos en un mes es de 2, y otras 5000 millas si excede de 5 boletos. US Air ofrece 1500 millas por viaje más 10,000 extra por cada 6 boletos. Continental ofrece 1800 millas, más 7000 extra por cada 5 boletos. El profesor Yataha desea repartir los 12 boletos de viaje sencillo entre las tres aerolíneas para maximizar el total de millas ganadas.

9.1.4 Restricciones Uno - u - otro y Si - entonces

En el problema de cargo fijo (sección 9.1.3), se utilizan variables binarias auxiliares para manejar la discontinuidad en la función de costo objetivo. Esta sección se ocupa de modelos en los que las restricciones no se satisfacen al mismo tiempo (Uno - u - otro) o son dependientes (Si - entonces), utilizando de nueva cuenta variables binarias auxiliares. La transformación utiliza un artificio matemático para presentar la restricción especial como restricciones "and" ("y").

Ejemplo 9.1-4 (Modelo de secuenciación de trabajos)

Jobco utiliza una sola máquina para procesar tres trabajos. Tanto el tiempo de procesamiento como la fecha límite (en días) de cada trabajo aparecen en la siguiente tabla. Las fechas límite se miden a partir de cero, el tiempo de inicio supuesto del primer trabajo.

Trabajo	Tiempo de procesamiento (días)	Fecha límite (días)	Penalización por retraso ($/día)
1	5	25	19
2	20	22	12
3	15	35	34

El objetivo del problema es determinar la secuencia de los trabajos que minimice la penalización por retraso en el procesamiento de los tres trabajos.

Defina

$$x_j = \text{Fecha de inicio en días del trabajo } j \text{ (medida a partir del tiempo cero)}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } i \text{ precede a } j \\ 0, \text{ si } j \text{ precede a } i \end{cases}$$

El problema tiene dos tipos de restricciones: las restricciones de no interferencia (que garantizan que no se procesen dos trabajos al mismo tiempo) y las restricciones de fecha límite. Considere primero las restricciones de no interferencia.

Dos trabajos i y j con tiempo de procesamiento p_i y p_j no se procesarán al mismo tiempo si (dependiendo de qué trabajo se procese primero)

$$x_i \geq x_j + p_j \text{ o } x_j \geq x_i + p_i$$

Con M lo bastante grande, las restricciones "o" se transforman en restricciones "y" por medio de

$$My_{ij} + (x_i - x_j) \geq p_j \text{ y } M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \geq p_i$$

La conversión garantiza que sólo una de las dos restricciones puede estar activa en cualquier momento. Si $y_{ij} = 0$, la primera restricción está activa, y la segunda es redundante (porque su lado izquierdo incluye a M, la cual es mucho mayor que p_k). Si $y_{ij} = 1$, la primera restricción es redundante, y la segunda está activa.

A continuación, dado que d_i es la fecha límite para el trabajo j, el trabajo se retrasa si $x_j + p_j > d_j$. Podemos utilizar dos variables no negativas, s_j^- y s_j^+ para determinar el estado de un trabajo j completado con respecto a su fecha límite, es decir, la restricción de fecha límite puede escribirse como

$$x_j + p_j + s_j^- - s_j^+ = d_j$$

El trabajo j se adelanta si $s_j^- > 0$, y se retarda si $s_j^+ > 0$. El costo de penalización por retraso es por lo tanto proporcional a s_j^+.

El modelo del problema dado es

$$\text{Minimizar}\, z = 19s_1^+ + 12s_2^+ + 34s_3^+$$

Sujeto a

$$\begin{array}{llllllll}
x_1 - x_2 & + My_{12} & & & & & & \geq 20 \\
-x_1 + x_2 & - My_{12} & & & & & & \geq 5 - M \\
x_1 \quad - x_3 & & + My_{13} & & & & & \geq 15 \\
-x_1 \quad + x_3 & & - My_{13} & & & & & \geq 5 - M \\
x_2 - x_3 & & & + My_{23} & & & & \geq 15 \\
- x_2 + x_3 & & & - My_{23} & & & & \geq 20 - M \\
x_1 & & & & + s_1^- - s_1^+ & & & = 25 - 5 \\
x_2 & & & & & + s_2^- - s_2^+ & & = 22 - 20 \\
x_3 & & & & & & + s_3^- - s_3^+ & = 35 - 15
\end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1^-, s_1^+, s_2^-, s_2^+, s_3^-, s_3^+ \geq 0$$

$$y_{12}, y_{13}, y_{23} = (0, 1)$$

El modelo resultante es un PLE *combinado*.

Para resolverlo, seleccionamos $M = 100$, un valor que es mayor que la suma de los tiempos de procesamiento de las tres actividades. La solución óptima es $x_1 = 20, x_2 = 0$, y $x_3 = 25$. Ésta indica que el trabajo 2 se inicia en el tiempo 0, que el trabajo 1 se inicia en el tiempo 20, y que el trabajo 3 se inicia en el tiempo 25, y por lo tanto se obtiene la secuencia de procesamiento óptima 2: 1: 3. La solución requiere que el trabajo 2 se complete en $0 + 20 = 20$ días, el trabajo 1 en un tiempo de $20 + 5 = 25$ días y el trabajo 3 en $25 + 15 = 40$ días. El trabajo 3 se retrasa $40 - 35 = 5$ días después de la fecha límite a un costo de $5 \times \$34 = \$170$.

Momento de AMPL

El archivo *amplEx9.1-4.txt* proporciona el modelo para el problema del ejemplo 9.1-4. El modelo se explica en la sección C.9 en el sitio web.

Ejemplo 9.1-5 (Modelo de secuenciación de trabajos revisitado)

En el ejemplo 9.1-4, supongamos que tenemos la siguiente condición adicional: Si el trabajo i antecede al trabajo j, entonces el trabajo k debe anteceder al trabajo m. Matemáticamente, la condición **si - entonces** (*if-then*) se escribe como

$$\text{si}\, x_i + p_i \leq x_j, \text{entonces}\, x_k + p_k \leq x_m$$

Dado que ε (> 0) es infinitesimalmente pequeño y M es suficientemente grande, esta condición equivale a las dos restricciones simultáneas siguientes:

$$x_j - (x_i + p_i) \leq M(1 - w) - \varepsilon$$

$$(x_k + p_k) - x_m \leq Mw$$

$$w = (0, 1)$$

Si $x_i + p_i \leq x_j$, entonces $x_j - (x_i + p_i) \geq 0$, la que requiere $w = 0$, y la segunda restricción se vuelve $x_k + p_k \leq x_m$, como se deseaba. Si no, w puede asumir el valor de 0 o 1, en cuyo caso la segunda restricción puede o no ser satisfecha, dependiendo de las demás condiciones del modelo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.1D

*1. Un tablero de juego se compone de 3×3 casillas. Se requiere que coloque un número entre 1 y 9 en cada casilla de modo que la suma de los números en cada fila, cada columna y cada diagonal sea igual a 15. Además, los números en todas las casillas deben ser distintos. Use un PLE para determinar la asignación de números a las casillas.

2. Se utiliza una máquina para producir dos productos intercambiables. La capacidad diaria de la máquina permite producir cuando mucho 20 unidades del producto 1 y 10 unidades del producto 2. Como alternativa, se puede ajustar la máquina para que produzca diariamente a lo sumo 12 unidades del producto 1 y 25 unidades del producto 2. El análisis del mercado muestra que la demanda diaria máxima de los dos productos combinados es de 35 unidades. Dado que las utilidades unitarias de los productos respectivos son de $10 y $12, ¿cuál de los dos ajustes de la máquina debe seleccionarse? Formule el problema como un PLE para encontrar la solución óptima (*Nota:* Este problema bidimensional puede resolverse inspeccionando el espacio de soluciones gráficas. Éste no es el caso para problemas de n dimensiones.)

*3. Gapco fabrica tres productos cuyos requerimientos diarios de mano de obra y materia prima se muestran en la siguiente tabla.

Producto	Mano de obra diaria requerida (h/unidad)	Materia prima diaria requerida (lb/unidad)
1	3	4
2	4	3
3	5	6

Las utilidades por unidad de los tres productos son de $25, $30 y $22, respectivamente. Gapco tiene dos opciones para situar su planta. Los dos sitios difieren sobre todo en la disponibilidad de mano de obra y materia prima, como se muestra en la siguiente tabla:

Sitio	Mano de obra diaria disponible (h)	Materia prima diaria disponible (lb)
1	100	100
2	90	120

Formule el problema como un PLE, y determine la ubicación óptima de la planta.

4. Jobco Shop tiene 10 trabajos pendientes para ser procesados con una sola máquina. La siguiente tabla proporciona los tiempos de procesamiento y las fechas límite. Todos los tiempos están en días, y el tiempo límite se mide a partir del tiempo 0:

Trabajo	Tiempo de procesamiento (días)	Tiempo límite (días)
1	10	20
2	3	98
3	13	100
4	15	34
5	9	50
6	22	44
7	17	32
8	30	60
9	12	80
10	16	150

Si el trabajo 4 precede al trabajo 3, entonces el trabajo 9 debe preceder al trabajo 7. El objetivo es procesar los 10 trabajos en el tiempo más corto posible. Formule el modelo como un PLE, y determine la solución óptima modificando el archivo *amplEx9.1-4.txt.*

5. En el problema 4, suponga que el trabajo 4 no puede ser procesado antes que el trabajo 3 se haya completado. Además, los ajustes de la máquina para los trabajos 7 y 8 requieren que se procesen de inmediato uno después del otro (es decir, el trabajo 7 sucede o precede inmediatamente al 8). El objetivo de Jobco es procesar los diez trabajos con la suma mínima de violaciones del tiempo límite. Formule el modelo matemáticamente, y determine la solución óptima.

6. Jobco posee una planta donde se fabrican tres productos. Los requerimientos de mano de obra y materia prima para los tres productos se muestran en la siguiente tabla.

Producto	Mano de obra diaria requerida (h/unidad))	Materia prima diaria requerida (lb/unidad)
1	3	4
2	4	3
3	5	6
Disponibilidad diaria	100	100

La utilidad por unidad de los tres productos es de $25, $30 y $45, respectivamente. Si se va a fabricar el total de las unidades requeridas diarias del producto 3, entonces su nivel de producción debe ser de al menos 5 unidades diarias. Formule el problema como un PLE combinado, y halle la combinación óptima.

7. UPak es una subsidiaria de la compañía de transporte LTL. Los clientes llevan sus envíos a la terminal de UPak para que los carguen en el camión de remolque y pueden rentar espacio hasta de 36 pies. El cliente paga por el espacio lineal exacto (en incrementos de 1 pie) que ocupa el envío. No se permiten envíos parciales, en el sentido de que un envío que no requiere más de 36 pies deba ser cargado en un camión de remolque. Para separar los envíos se instala una barrera móvil, llamada mampara. La tarifa por pie que UPak cobra depende del destino del envío. La siguiente tabla proporciona las órdenes pendientes que UPak necesita procesar.

Orden	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tamaño (pies)	5	11	22	15	7	9	18	14	10	12
Tarifa ($)	120	93	70	85	125	104	98	130	140	65

Actualmente la terminal tiene dos camiones de remolque listos para ser cargados. Determine los órdenes de prioridad que maximizarán el ingreso total de los dos camiones de remolque. (*Sugerencia:* Una formulación que utiliza x_{ij} binarias para representar la carga i en el camión j es sencilla. Sin embargo, se le reta a que defina x_{ij} como *pies* asignados a la carga i en el camión j. Luego utilice la restricción si - entonces (*if-then*), para impedir el envío de cargas parciales.

8. *Problema de N reinas*. En el juego de ajedrez, las reinas atacan moviéndose horizontal, vertical y diagonalmente. Se desea colocar N reinas en un tablero ($N \times N$) de modo que ninguna reina pueda "tomar" a cualquier otra reina. Formule el problema como un programa entero, y resuélvalo con AMPL (o cualquier otro software) con $N = 4, 5, 6$ y 8 (*Sugerencia:* Formulación 1: Sea $x_{ij} = 1$ si se coloca una reina en la casilla (i, j), y cero si no es así. Las restricciones del problema son del tipo "si $x_{ij} > 0$, entonces ninguna otra reina puede colocarse en la fila i, columna j o diagonal(es) que partan de la casilla (i, j)". Formulación 2: Sea R_i = fila asociada con la columna i en la que se coloca la reina i en el tablero. Las restricciones impiden que se coloquen reinas en las diagonales.)

9. Un proceso de manufactura utiliza cuatro materias primas intercambiables. Las propiedades de las materias primas difieren, lo que conduce a diferentes unidades producidas por unidad de materia prima. También difieren en costo y tamaños de lote. La siguiente tabla resume los datos de la situación:

	Materia prima 1	Materia prima 2	Materia prima 3	Materia prima 4	Materia prima 5
Tamaño de lote (unidades)	100	160	80	310	50
Unidades de producto por unidad de materia prima	3	2	5	1	4
Costo por unidad de materia prima ($)	30	80	200	10	120

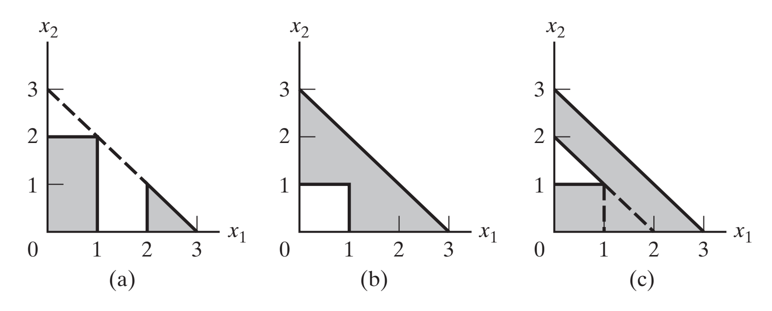
Una materia prima, si se utiliza, debe estar sólo en los lotes indicados (por ejemplo, la materia prima 1 puede adquirirse o en lotes de 100 unidades o nada). Las unidades producidas deben ser por lo menos 950. Formule un modelo para determinar las materias primas que deben usarse a un costo mínimo.

10. Demuestre cómo pueden representarse los espacios de soluciones sombreados no convexos que se muestran en la figura 9.3 por un conjunto de restricciones simultáneas. Encuentre la solución óptima que maximiza $z = 2x_1 + 3x_2$ sujeta al espacio de soluciones dado en (a).

11. Dadas las variables binarias x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5, si $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, entonces $x_3 = 1, x_4 = 1$ y $x_5 = 1$. Formule la condición como restricciones simultáneas.

FIGURA 9.3

Espacios de soluciones para el problema 10, conjunto 9.1d



***12.** Suponga que el producto zw aparece en una restricción, donde z y w son variables binarias. Demuestre cómo puede linealizarse este término.

13. Considere la variable binaria $y_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Exprese la siguiente condición como un conjunto de restricciones de PLE simultáneas: Si $i = k$, entonces $y_k = 1$, y todas las variables restantes son iguales a cero.

14. Suponga que se requiere que *cualquier k* de entre las siguientes m restricciones debe estar activa:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

Muestre cómo puede representarse esta condición.

15. En la siguiente restricción, el lado derecho puede asumir uno de los valores $b_1, b_2, \ldots,$ y b_m.

$$g\ (x_1, x_2, \ldots,\ x_n \leq (b_1,\ b_2, \ldots,\ \text{o}\ b_m)$$

Muestre cómo puede representarse esta condición.

16. Considere la siguiente función objetivo.

$$\text{Minimizar } z = \min\{2x_1 + x_2, 4x_1 - 3x_2 | x_1 \geq 1, x_2 \geq 0\}$$

Aplique variables binarias auxiliares para convertir la función objetivo z en un formato analíticamente manejable que elimine la función principal.

17. Dadas las variables binarias $y_1, y_2, \ldots, y_n$, de modo que si $x_1 = 1$, entonces x_{i-1} o x_{i+1} deben ser iguales a 1, $i = 1, 2, \ldots, n$, donde y_0 y y_{n+1} definen la variable y_n.

9.2 ALGORITMOS DE PROGRAMACIÓN ENTERA

Los algoritmos de PLE se basan en la explotación del tremendo éxito computacional de la PL. La estrategia de estos algoritmos implica tres pasos.

Paso 1. Desahogue el espacio de soluciones del PLE al eliminar la restricción entera en todas las variables enteras y reemplazar cualquier variable binaria y con el intervalo continuo $0 \leq y \leq 1$. El resultado del desahogo es una programación lineal.

Paso 2. Resuelva la PL, e identifique su óptimo continuo.

Paso 3. Comenzando desde el punto óptimo continuo, agregue restricciones especiales que modifiquen iterativamente el espacio de soluciones de PL de modo que finalmente dé un punto extremo óptimo que satisfaga los requerimientos enteros.

Se desarrollaron dos métodos generales para generar las restricciones especiales en el paso 3.

1. Método de ramificación y acotación (B&B)
2. Método de plano de corte

Ninguno de los dos métodos es computacionalmente efectivo de forma consistente. Sin embargo, la experiencia muestra que el método B&B (de ramificación y acotamiento) es mucho más exitoso que el método del plano de corte.

9.2.1 Algoritmo de ramificación y acotamiento[4]

El primer algoritmo de ramificación y acotamiento fue desarrollado en 1960 por A. Land y G. Doig para el problema general de PLE combinada o pura. Más adelante, en 1965, E. Balas desarrolló el **algoritmo aditivo** para resolver PLEs con variables binarias puras (cero o uno)[5]. Los cálculos del algoritmo aditivo eran tan simples (principalmente sumas y restas) que en un inicio fue aclamado como un posible gran avance en la solución de la PLE. Por desgracia, no produjo las ventajas computacionales deseadas. Además, se demostró que el algoritmo, que inicialmente no parecía estar relacionado con la técnica de ramificación y acotamiento, era simplemente un caso especial del algoritmo general de Land y Doig.

Esta sección presenta sólo el algoritmo de ramificación y acotamiento de Land-Doig. Se utiliza un ejemplo numérico para proporcionar los detalles.

Ejemplo 9.2-1

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \text{ enteras no negativas}$$

Los puntos de cuadrícula en la figura 9.4 definen el espacio de soluciones de PLE. El problema PL1 continuo asociado en el nodo 1 (área sombreada) se define a partir de la PLE eliminando las restricciones enteras. La solución óptima de PL1 es $x_1 = 3.75, x_2 = 1.25$ y $z = 23.75$.

Como la solución óptima de PL1 no satisface las restricciones enteras, el espacio de soluciones se subdivide de una manera sistemática que finalmente localiza el óptimo de la PLE. En primer lugar, el algoritmo de ramificación y acotamiento selecciona una variable entera cuyo valor óptimo en PL1 no es entero. En este ejemplo, tanto x_1 como x_2 califican. Seleccionando $x_1(= 3.75)$ arbitrariamente, la región $3 < x_1 < 4$ del espacio de soluciones de PL1 contiene valores no enteros de x_1, y por lo tanto puede ser eliminada. Esto equivale a reemplazar el PL1 original con dos problemas de PL nuevos.

$$\text{Espacio de PL2} = \text{Espacio de PL1} + (x_1 \leq 3)$$

$$\text{Espacio de PL3} = \text{Espacio de PL1} + (x_1 \leq 4)$$

La figura 9.5 ilustra los espacios de PL2 y PL3. Los dos espacios combinados contienen los mismos puntos enteros factibles que la PLE original, es decir, que no se pierde información cuando PL1 se reemplaza con PL2 y PL3.

---

[4]El módulo de programación entera TORA está equipado con una función que genera interactivamente el árbol de ramificación y acotamiento. Para utilizarla, seleccione User-guided B&B en la pantalla de salida del módulo de programación entera. La pantalla resultante proporciona toda la información necesaria para crear un árbol de ramificación y acortamiento.

[5]Una PLE general puede expresarse en función de las variables binarias $(0-1)$ como sigue. Dada una variable entera x con una cota superior finita u (es decir $0 \leq x \leq u$), entonces

$$x = 2^0 y_0 + 2^1 y_1 + 2^2 y_2 + \cdots + 2^k y_k$$

Las variables $y_0, y_1, \ldots,$ y y_k son binarias, y el índice k es el entero más pequeño que satisface $2^{k-1} - 1 \geq u$.

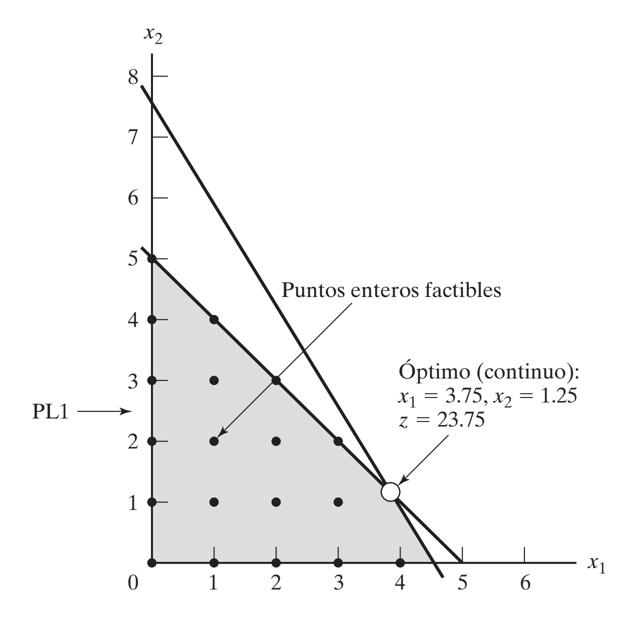


FIGURA 9.4

Espacio de soluciones de la PLE (puntos de cuadrícula) y del PL1 (área sombreada) del ejemplo 9.2-1 (PL1)

Si de una forma inteligente imponemos restricciones secuenciales que excluyan las regiones libres de enteros (por ejemplo $3 < x_1 < 4$ en PL1), estaremos reduciendo el espacio de soluciones continuo de PL1 a varios subproblemas de programación lineal cuyos puntos extremos óptimos satisfacen las restricciones enteras. El mejor de estos subproblemas es la solución óptima de PLE.

Las nuevas restricciones, $x_1 \leq 3$ y $x_1 \leq 4$, son mutuamente excluyentes, de modo que el PL2 y el PL3 en los nodos 2 y 3 deben tratarse como programaciones lineales distintas, como se muestra en la figura 9.6. Esta dicotomización da lugar al concepto de **ramificación** en el algoritmo de ramificación y acotamiento. Es este caso, x_1 se llama **variable de ramificación**.

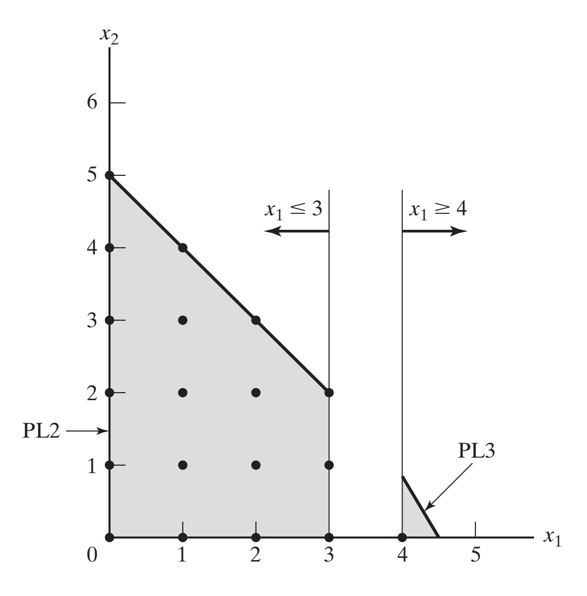


FIGURA 9.5

Espacios de soluciones de PL2 y PL3 para el problema 9.2-1

La PLE óptima queda *o* en PL2 *o* en PL3. Por consiguiente, ambos subproblemas deben ser examinados. Arbitrariamente examinamos primero PL2 (asociada con $x_1 \leq 3$):

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 &\leq \quad 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 45 \\ x_1 \qquad\quad &\leq \quad 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La solución de PL2 (la cual puede obtenerse de forma eficiente con el algoritmo de acotamiento superior de la sección 7.3) es $x_1 = 3, x_2 = 2$ y $z = 23$. La solución de PL2 satisface los requerimientos enteros para x_1 y x_2. De ahí que se dice que PL2 debe ser **sondeado a fondo**, lo que significa que ya no puede dar una solución de programación lineal entera *mejor* y ya no se requiere ninguna otra ramificación que provenga del nodo 2.

En este momento no podemos decir que la solución entera obtenida con PL2 sea óptima para el problema original, porque PL3 puede producir una mejor solución entera. Todo lo que podemos decir es que $z = 23$ es una **cota inferior** del valor objetivo óptimo (máximo) de la PLE original. Esto significa que cualquier subproblema no examinado que no puede producir un mejor valor objetivo que la cota inferior, debe ser desechado como no promisorio. Si un subproblema no examinado produce una mejor solución entera, entonces el límite inferior debe ser actualizado como corresponde.

Dada la cota inferior $z = 23$, examinamos PL3 (el único subproblema restante no examinado en este momento). Debido al óptimo $z = 23.75$ en el PL1 *y a que sucede que todos los coeficientes de la función objetivo son enteros*, es imposible que PL3 pueda producir una mejor solución entera (con $z > 23$). En consecuencia, desechamos PL3 y concluimos que *fue sondeado a fondo*.

El algoritmo de ramificación y acotamiento ya está completo porque PL2 y PL3 se examinaron y sondearon a fondo, el primero para producir una solución entera y el segundo porque no produjo una *mejor* solución entera. Por lo tanto concluimos que la solución de programación lineal óptima es la asociada con la cota inferior, o sea, $x_{1=3}, x_2 = 2$ y $z = 23$.

Considerando el algoritmo resultan dos preguntas:

1. En PL1, ¿podríamos haber seleccionado x_2 como *la variable de ramificación* en lugar de x_1?
2. Cuando seleccionamos el siguiente subproblema a ser examinado, ¿podríamos haber solucionado primero PL3 en lugar de PL2?

La respuesta a ambas preguntas es "sí" pero los cálculos subsiguientes pueden diferir dramáticamente. La figura 9.7 demuestra este punto. Supongamos que examinamos primero PL3 (en lugar de PL2 como lo hicimos en la figura 9.6). La solución es $x_1 = 4, x_2 = .83$ y $z = 23.33$ (¡compruébelo!). Como x_2 (=.83) no es entera, PL3 se examina más a fondo creando los subproblemas PL4 y PL5 por medio de las ramas $x_2 \leq 0$ y $x_2 \geq 1$, respectivamente. Esto significa que

$$\begin{aligned} \text{Espacio de PL4} &= \text{Espacio de PL3} + (x \leq 0) \\ &= \text{Espacio PL1} \quad + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) \\ \text{Espacio de PL5} &= \text{Espacio de PL3} + (x_2 \geq 1) \\ &= \text{Espacio de PL1} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \geq 1) \end{aligned}$$

Ahora tenemos tres subproblemas "desconectados" que se deben examinar: PL2, PL4 y PL5. Supongamos que arbitrariamente examinamos primero PL5. No tiene ninguna solución

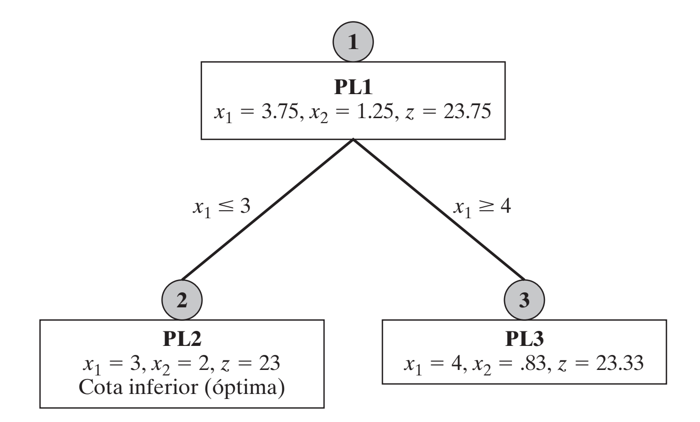


FIGURA 9.6

Utilización de la variable de ramificación x_1 para crear PL2 y PL3 para el ejemplo 9.2-1

factible, y por consiguiente se sondeó a fondo. A continuación, examinamos PL4. La solución óptima es $x_1 = 4.5, x_2 = 0$ y $z = 22.5$. El valor no entero de x_1 conduce a las ramificaciones $x_1 \leq 4$ y $x_1 \geq 5$ y la creación de los subproblemas PL6 y PL7 a partir del PL4.

$$\text{Espacio del PL6} = \text{Espacio del PL1} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) + (x_1 \leq 4)$$

$$\text{Espacio del PL7} = \text{Espacio del PL1} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) + (x_1 \geq 5)$$

Ahora, los subproblemas PL2, PL6 y PL7 permanecen sin ser examinados. Si seleccionamos PL7 para examinarlo, el problema está sondeado a fondo porque no tiene ninguna solución factible. A continuación, seleccionamos PL6. El problema da por resultado la primera solución entera ($x_1 = 4, x_2 = 0, z = 20$), y, por lo tanto, proporciona la primera cota inferior (=20) del valor objetivo óptimo de la PLE. Sólo falta examinar el subproblema PL2, y da una mejor solución entera ($x_1 = 3, x_2 = 2, z = 23$). De este modo, la cota inferior se actualiza de $z = 20$ a $z = 23$. A estas alturas, *todos* los subproblemas han sido sondeados (examinados) a fondo, y la solución óptima es la asociada con la cota inferior más actualizada, es decir, $x_1 = 3, x_2 = 2$ y $z = 23$.

La secuencia de solución para obtener la solución en la figura 9.7 (PL1 → PL3 → PL5 → PL4 → PL7 → PL6 → PL2) es un escenario del peor caso que, sin embargo, muy bien puede ocurrir en la práctica. En la figura 9.6, tuvimos suerte de "tropezarnos" con una buena cota inferior en el primer subproblema (PL2), y que a su vez nos permitiera examinar a fondo PL3 sin necesidad de ningún examen adicional. En esencia, completamos el procedimiento resolviendo un total de dos subproblemas PL. En la figura 9.7 la historia es diferente, resolvimos siete subproblemas PL para completar el algoritmo de ramificación y acotamiento.

Comentarios. El ejemplo apunta hacia una debilidad importante en el algoritmo de ramificación y acotamiento. Dado que tenemos múltiples opciones, ¿cómo seleccionamos el siguiente subproblema y su variable de ramificación? Aun cuando hay métodos heurísticos para mejorar la habilidad del algoritmo de ramificación y acotamiento para "prever" cual rama puede conducir a una solución de PLE mejorada (vea Taha, 1975, págs. 154-171), no existe una teoría sólida con resultados consistentes, y aquí yace la dificultad que afecta los cálculos en la PLE. El problema 7, conjunto 9.2a, demuestra este extraño comportamiento del algoritmo de ramificación y acotamiento al investigar más de 25,000 PLs, antes de que se verifique la optimalidad, aun cuando el problema sea bastante pequeño (16 variables binarias y una restricción). Desafortunadamente, hasta la fecha, y después de décadas de investigación junto con tremendos avances en las computadoras, los códigos de PLE no son totalmente confiables. Sin embargo, los solucionadores comerciales disponibles (por ejemplo CPLEX y XPESS) son excelentes para resolver problemas muy grandes.

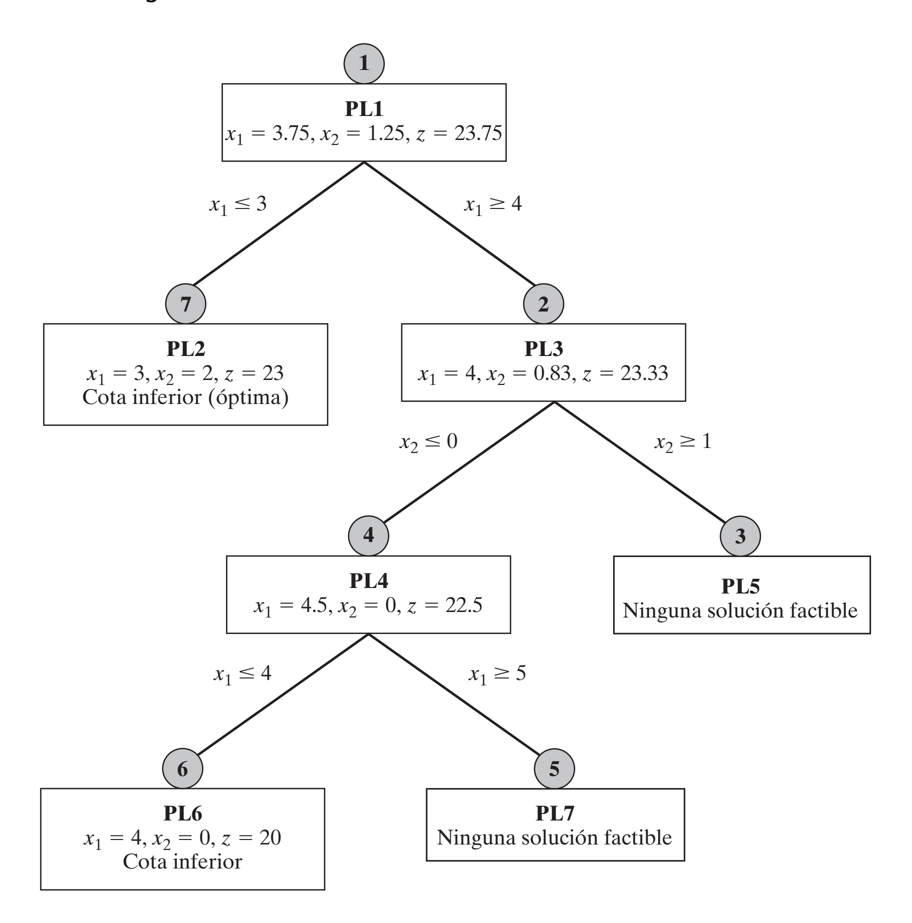


FIGURA 9.7

Árbol de ramificación y acotamiento alternativo para el problema 9.2-1

Momento de AMPL

AMPL puede usarse interactivamente para generar el árbol de búsqueda de ramificación y acotamiento. La siguiente tabla muestra la secuencia de comandos necesaria para generar el árbol del ejemplo 9.2-1 (figura 9.7) comenzando con PL1 continuo. El modelo AMPL (archivo *amplEx9.2-1.txt*) se compone de dos variables `x1` y `x2` y dos restricciones `c0` y `c1`. Verá que es útil sincronizar los comandos AMPL con las ramas que aparecen en la figura 9.7.

Comando AMPL	Resultado
ampl: `model amplEx9.2-1.txt;solve;display x1,x2;`	PL1 ($x_1 = 3.75, x_2 = 1.25$)
ampl: `c2:x1>=4;solve;display x1,x2;`	PL3 ($x_1 = 4, x_2 = .83$)
ampl: `c3:x2>=1;solve;display x1,x2;`	PL5 (ninguna solución)
ampl: `drop c3;c4:x2<=0;solve;display x1,x2;`	PL4 ($x_1 = 4.5, x_2 = 0$)
ampl: `c5:x1>=5;solve;display x1,x2;`	PL7 (ninguna solución)
ampl: `drop c5;c6:x1<=4;solve;display x1,x2;`	PL6 ($x_1 = 4, x_2 = 0$)
ampl: `drop c2;drop c4;drop c6;c7:x1<=3; solve; display x1,x2;`	PL2 ($x_1 = 3, x_2 = 2$)

Momento de Solver

La solución de los diferentes subproblemas puede obtenerse utilizando Solver por medio de las opciones add/change/delete en el cuadro de diálogo **Solver Parameters**.

Resumen del algoritmo de ramificación y acotamiento. Considere un problema de maximización. Establezca una cota inferior inicial $z = -\infty$ para el valor objetivo óptimo de la PLE y establezca $i = 0$.[6]

Paso 1. *Examen a fondo/acotamiento*). Seleccione PLi, el siguiente subproblema a ser examinado. Resuelva PLi, y trate de examinarlo a fondo utilizando una de estas tres condiciones.

(a) El valor z óptimo de PLi no puede dar un valor objetivo mejor que la cota inferior actual.
(b) PLi da por resultado una solución entera factible mejor que la cota inferior actual.
(c) PLi no tiene ninguna solución factible.

Surgirán dos casos.

(a) Si PLi se examina a fondo y se determina una solución mejor, actualice la cota inferior. Si todos los subproblemas han sido examinados a fondo, deténgase; la cota inferior da la solución óptima (si no existe una cota inferior finita, el problema no tiene ninguna solución factible). De otro modo, establezca $i = i + 1$, y repita el paso 1.
(b) Si PLi no se ha examinado a fondo, proceda al paso 2 para ramificación.

Paso 2. (*Ramificación*). Seleccione una de las variables enteras x_j, cuyo valor óptimo x_j^* en la solución de PLi no es entero. Cree los dos subproblemas de PL correspondientes a

$$x_j \leq [x_j^*] \text{ y } x_j \geq [x_j^*] + 1$$

Establezca $i = i + 1$, y proceda el paso 1.

El algoritmo de ramificación y acotamiento puede ampliarse a problemas combinados (en los que sólo algunas de las variables son enteras). Nunca se selecciona una variable continua como variable de ramificación. Un subproblema factible proporciona una nueva cota del valor objetivo si los valores de las variables discretas son enteros con un valor objetivo mejorado.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.2a[7]

1. Resuelva la PLE del ejemplo 9.2-1 por medio del algoritmo de ramificación y acotamiento con x_2 como variable de ramificación. Inicie el procedimiento resolviendo el subproblema asociado con $x_2 \leq [x_2^*]$.

2. Desarrolle el árbol de ramificación y acotamiento para cada uno de siguientes problemas. Por comodidad, seleccione siempre x_1 como la variable de ramificación en el nodo 0.

***(a)** Maximizar $z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeto a

$$2x_1 + 5x_2 \leq 9$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entera}$$

[6]Para problemas de minimización, reemplace la cota inferior con una cota superior inicial $z = -\infty$.
[7]En este conjunto, los subproblemas pueden resolverse interactivamente con AMPL o Solver o por medio de la opción MODIFY de TORA para las cotas superior e inferior.

(b) Maximizar $z = 2x_1 + 3x_2$
Sujeto a

$$5x_1 + 7x_2 \leq 35$$
$$4x_1 + 9x_2 \leq 36$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ y entera}$$

(c) Maximizar $z = x_1 + x_2$
Sujeto a

$$2x_1 + 5x_2 \leq 16$$
$$6x_1 + 5x_2 \leq 27$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ y entera}$$

(d) Minimizar $z = 5x_1 + 4x_2$
Sujeto a

$$3x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 7$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entera}$$

(e) Maximizar $z = 5x_1 + 7x_2$
Sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 13$$
$$5x_1 + 9x_2 \leq 41$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ y entera}$$

*__3.__ Repita el problema 2, suponiendo que x_1 es continua.

4. Demuestre gráficamente que la siguiente PLE no tiene una solución factible, y luego verifique el resultado utilizando el algoritmo de ramificación y acotamiento.

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2$$

Sujeto a

$$10x_1 + 10x_2 \leq 9$$
$$10x_1 + 5x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entera}$$

5. Resuelva el siguiente problema por medio del algoritmo de ramificación y acotamiento.

$$\text{Maximizar } z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$$

Sujeto a

$$15x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 37$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = (0, 1)$$

6. Convierta el siguiente problema en una PLE combinada, y halle la solución óptima.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

Sujeto a

$$|-x_1 + 10x_2 - 3x_3| \geq 15$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

7. *Experimento con TORA/Solver/AMPL*. El siguiente problema está diseñado para demostrar el extraño comportamiento del algoritmo de ramificación y acotamiento, incluso en problemas pequeños. En particular, observe cuántos problemas se examinan antes de que se halle la solución óptima y cuánto se requiere para verificar la optimalidad.

$$\text{Minimizar } y$$

Sujeto a

$$2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{15}) + y = 15$$
$$\text{Todas los variables son } (0, 1)$$

(a) Use la opción automática de TORA para demostrar que aunque la solución óptima se determina después de sólo 9 subproblemas, se examinan más de 25,000 subproblemas antes de que se confirme la optimalidad.

(b) Demuestre que Solver exhibe un comportamiento similar al de TORA [*Nota:* En Solver puede vigilar el cambio del número de ramas generadas (subproblemas) al pie de la hoja de cálculo.]

(c) Resuelva los problemas con AMPL, y demuestre que la solución se obtiene al instante con 0 iteraciones simplex MIP y 0 nodos de ramificación y acotamiento. La razón de este desempeño superior sólo puede atribuirse a los pasos de presolución realizados por AMPL y/o el solucionador CPLEX.

8. *Experimento con TORA*. Considere la siguiente PLE:

$$\text{Maximizar } z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3$$

Sujeto a

$$15x_1 + 12x_2 + 7x_3 \leq 43$$
$$x_1, x_2, x_3 \text{ enteras no negativas}$$

Use la opción de ramificación y acotamiento guiada por el usuario de TORA para generar el árbol de búsqueda y sin activar la cota del valor objetivo. ¿Cuál es el impacto de activar la cota del valor objetivo en el número de subproblemas generados? Por consistencia, seleccione siempre la variable de ramificación como la del índice menor e investigue todos los subproblemas en una fila existente de izquierda a derecha antes de proseguir con la siguiente fila.

***9.** *Experimento con TORA*. Reconsidere el problema 8 anterior. Conviértalo en una PLE 0-1 equivalente, y luego resuélvalo con la opción automática de TORA. Compare el tamaño de los árboles de búsqueda en los dos problemas.

10. *Experimento con AMPL*. En la siguiente PLE 0-1, use AMPL interactivamente para generar el árbol de búsqueda asociado. En cada caso, demuestre cómo se utiliza la cota z para examinar a fondo subproblemas.

$$\text{Maximizar } z = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 3x_5$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &\leq 4 \\ 7x_1 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 &\leq 8 \\ 11x_1 - 6x_2 + 3x_4 - 3x_5 &\geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &= (0, 1) \end{aligned}$$

9.2.2 Algoritmo de plano de corte

Como en el algoritmo de ramificación y acotamiento, el algoritmo de plano de corte también se inicia en la solución óptima continua. Se agregan restricciones especiales (llamadas **cortes**) al espacio de soluciones para que produzcan un punto extremo óptimo entero. En el ejemplo 9.2-2, primero demostramos gráficamente cómo se utilizan los cortes para producir una solución entera y después cómo se implementa la idea algebraicamente.

Ejemplo 9.2-2

Considere la siguiente PLE.

$$\text{Maximizar } z = 7x_1 + 10x_2$$

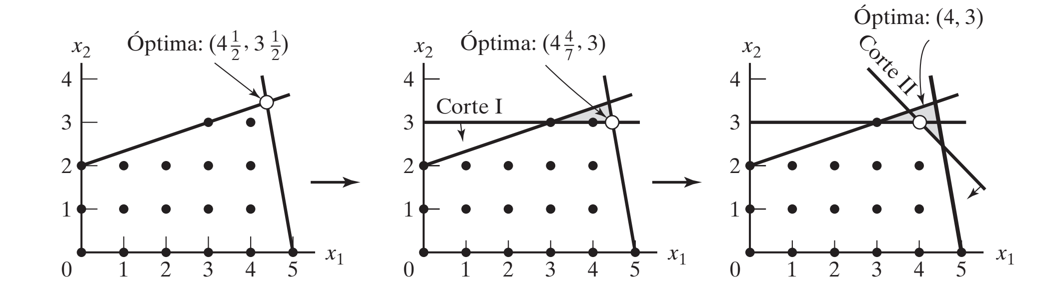
Sujeto a

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 7x_1 + x_2 &\leq 35 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ y entera} \end{aligned}$$

La figura 9.8 presenta un ejemplo de tales cortes. Inicialmente, comenzamos con la solución óptima continua de la PL $z = 66\frac{1}{2}$, $x_1 = 4\frac{1}{2}$, $x_2 = 3\frac{1}{2}$. Luego agregamos el corte 1, el cual produce la solución óptima (continua) de la PL $z = 62$, $x_1 = 4\frac{4}{7}$, $x_2 = 3$. Agregamos posteriormente el corte II, el cual (junto con el corte I y las restricciones originales) produce la solución óptima entera de la PL $z = 58, x_1 = 4, x_3 = 3$.

FIGURA 9.8

Ilustración del uso de cortes en una PLE



Los puntos agregados no eliminan ninguno de los puntos enteros factibles originales, pero deben pasar al menos por un punto entero factible o no factible. Éstos son requerimientos básicos de cualquier corte.

Es puramente accidental que un problema de 2 variables utilizara exactamente 2 cortes para llegar a la solución entera óptima. En general, el número de cortes, aun cuando es finito, no puede determinarse con base en el tamaño del problema, en el sentido que un problema pequeño puede requerir más cortes que uno grande.

A continuación, utilizamos el mismo ejemplo para demostrar cómo se construyen los cortes e implementan algebraicamente. Dadas las holguras x_3 y x_4 para las restricciones 1 y 2, la tabla de PL óptima se da como

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	$66\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	$3\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	$4\frac{1}{2}$

La solución óptima continua es $z = 66\frac{1}{2}$, $x_1 = 4\frac{1}{2}$, $x_2 = 3\frac{1}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. El corte se desarrolla de acuerdo con la suposición de que *todas* las variables, *incluidas las holguras*, son enteras. Observe, además, que como todos los coeficientes objetivo originales son enteros en este ejemplo, el valor de z también es entero.

La información en la tabla óptima puede escribirse explícitamente como

$$z + \frac{63}{22}x_3 + \frac{31}{22}x_4 = 66\frac{1}{2} \qquad \text{(ecuación } z\text{)}$$

$$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = 3\frac{1}{2} \qquad \text{(ecuación } x_2\text{)}$$

$$x_1 - \frac{1}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 = 4\frac{1}{2} \qquad \text{(ecuación } x_1\text{)}$$

Se puede utilizar una ecuación de restricción como **fila origen** para generar un corte, siempre que su lado derecho sea fraccionario. Asimismo, la ecuación z puede utilizarse como fila origen en este ejemplo porque sucede que z es entera. Demostraremos cómo se genera un corte con cada una de estas filas origen, comenzando con la ecuación z.

Primero, factorizamos todos los coeficientes no enteros de la ecuación en un valor entero y un componente fraccionario *positivo*. Por ejemplo,

$$\frac{5}{2} = \left(2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{7}{3} = \left(-3 + \frac{2}{3}\right)$$

La factorización de la ecuación z da por resultado

$$z + \left(2 + \frac{19}{22}\right)x_3 + \left(1 + \frac{9}{22}\right)x_4 = \left(66 + \frac{1}{2}\right)$$

Si movemos todos los componentes enteros al lado izquierdo y todos los componentes fraccionarios al lado derecho, obtenemos

$$z + 2x_3 + 1x_4 - 66 = -\frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 + \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Como x_3 y x_4 son no negativas y todas las fracciones son positivas por construcción, el lado derecho debe satisfacer la siguiente desigualdad:

$$-\frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Ahora, como el lado izquierdo de la ecuación (1), $z + 2x_3 + 1x_4 - 66$, es un valor entero por construcción, el lado derecho, $-\frac{19}{22}x_3 - \frac{19}{22}x_4 + \frac{1}{2}$, también debe ser entero. Se deduce entonces que (2) puede ser reemplazada con una desigualdad:

$$-\frac{19}{22}x_3 - \frac{9}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

Este resultado se justifica porque un valor *entero* menor que una fracción positiva necesariamente debe ser ≤ 0.

La última desigualdad es el corte deseado, y representa una condición *necesaria* (pero no suficiente) para obtener una solución entera. También se conoce como **corte fraccionario** porque todos sus coeficientes son fracciones.

Como $x_3 = x_4 = 0$ en la tabla de PL continua óptima dada antes, la solución continua actual viola el corte (porque da $\frac{1}{2} \leq 0$ como resultado). Por lo tanto si agregamos este corte a la tabla óptima, el punto extremo óptimo resultante mueve la solución hacia la satisfacción de las restricciones enteras.

Antes de demostrar cómo se implementa un corte en la tabla óptima, demostraremos cómo también se pueden construir los cortes a partir de las ecuaciones de restricción. Considere la fila x_1:

$$x_1 - \frac{1}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 = 4\tfrac{1}{2}$$

Factorizando la ecuación obtenemos

$$x_1 + \left(-1 + \frac{21}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{3}{22}\right)x_4 = \left(4 + \frac{1}{2}\right)$$

El corte asociado es

$$-\frac{21}{22}x_2 - \frac{3}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

Asimismo, la ecuación x_2

$$x_2 + \frac{7}{22}x_3 + \frac{1}{22}x_4 = 3\tfrac{1}{2}$$

se factoriza como

$$x_2 + \left(0 + \frac{7}{22}\right)x_3 + \left(0 + \frac{1}{22}\right)x_4 = 3 + \frac{1}{2}$$

Por consiguiente, el corte asociado es

$$-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

Cualquiera de los tres cortes antes dados puede usarse en la primera iteración del algoritmo de plano de corte. No es necesario generar los tres cortes antes de seleccionar uno.

Seleccionando arbitrariamente el corte generado con la fila x_2, podemos escribirlo en forma de ecuación como

$$-\frac{7}{22}x_3 - \frac{1}{22}x_4 + s_1 = -\frac{1}{2},\ s_1 \geq 0 \qquad \text{(Corte I)}$$

Esta restricción se agrega a la tabla óptima de PL como sigue:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Solución
z	0	0	$\frac{63}{22}$	$\frac{31}{22}$	0	$66\frac{1}{2}$
x_2	0	1	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$	0	$3\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{22}$	0	$4\frac{1}{2}$
s_1	0	0	$-\frac{7}{22}$	$-\frac{1}{22}$	1	$-\frac{1}{2}$

La tabla es óptima pero no factible. Aplicamos el método simplex dual (sección 4.4.1) para recuperar la factiblidad, lo cual da por resultado

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	Solución
z	0	0	0	1	9	62
x_2	0	1	0	0	1	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$4\frac{4}{7}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	$1\frac{4}{7}$

La última solución sigue siendo no entera en x_1 y x_3, y arbitrariamente seleccionamos x_1 como la siguiente fila origen, es decir,

$$x_1 + (0 + \tfrac{1}{7})x_4 + (-1 + \tfrac{6}{7})s_1 = 4 + \tfrac{4}{7}$$

El corte asociado es

$$-\tfrac{1}{7}x_4 - \tfrac{6}{7}s_1 + s_2 = -\tfrac{4}{7},\ s_2 \geq 0 \quad \text{(Corte II)}$$

Agregando el corte II a la tabla óptima previa, obtenemos

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Solución
z	0	0	0	1	9	0	62
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$4\frac{4}{7}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{22}{7}$	0	$1\frac{4}{7}$
s_2	0	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$	1	$-\frac{4}{7}$

El método simplex dual da la siguiente tabla:

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	Solución
z	0	0	0	0	3	7	58
x_2	0	1	0	0	1	0	3
x_1	1	0	0	0	–1	1	4
x_3	0	0	1	0	–4	1	1
x_4	0	0	0	1	6	–7	4

La solución óptima ($x_1 = 4, x_3 = 3, z = 58$) es totalmente entera. No es accidental que todos los coeficientes de la última tabla sean también enteros, una consecuencia de utilizar el corte fraccionario.

Comentarios. Es importante señalar que el corte fraccionario asume que *todas* las variables, *incluidas las de holgura y superávit* son enteras. Esto significa que el corte tiene que ver sólo con problemas enteros puros. La importancia de esta suposición se ilustra con un ejemplo.

Considere la restricción

$$x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 \leq \tfrac{13}{2}$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0 \text{ y entera}$$

Desde el punto de vista de resolver la PLE asociada, la restricción se trata como una ecuación utilizando la holgura no negativa s_1, es decir,

$$x_1 + \frac{1}{3}x_2 + s_1 = \frac{13}{2}$$

La aplicación del corte fraccionario asume que la restricción tiene una solución *entera* factible en x_1, x_2 y s_1. Sin embargo, la ecuación dada tendrá una solución entera factible en x_1 y x_2 *sólo si* s_1 *es no entera*. Esto significa que el algoritmo de plano de corte concluirá, gracias a la aplicaciones del simplex dual, que el problema no tiene una solución factible (entera), aun cuando las variables de interés, x_1 y x_2 pueden asumir valores enteros factibles.

Hay dos formas de remediar esta situación.

1. Multiplique la restricción por una constante apropiada para eliminar todas las fracciones. Por ejemplo, multiplicando la restricción anterior por 6, obtenemos

$$6x_1 + 2x_2 \leq 39$$

   Cualquier solución entera de x_1 y x_2 da automáticamente por resultado la holgura entera. Sin embargo, en algunos casos este tipo de conversión puede producir coeficientes enteros excesivamente grandes, y esto a su vez puede conducir a errores de redondeo de cálculo en la computadora.
2. Use un corte especial llamado **corte combinado**, el cual permite que sólo un subconjunto de variables asuma valores enteros, con todas las demás variables (incluidas las de holgura y superávit) permaneciendo continuas. Los detalles de este corte no se presentarán en este capítulo (vea Taha, 1975, págs. 198-202).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 9.2B

1. En el ejemplo 9.2-2, demuestre gráficamente si cada una de las restricciones siguientes puede o no formar un corte legítimo:
   *(a) $x_1 + 2x_2 \leq 10$
   (b) $2x_1 + x_2 \leq 10$
   (c) $3x_2 \leq 10$
   (d) $3x_1 + x_2 \leq 15$
2. En el ejemplo 9.2-2, demuestre gráficamente cómo los dos siguientes cortes (legítimos) pueden conducir a la solución entera óptima:

$$x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad \text{(Corte I)}$$
$$3x_1 + x_2 \leq 15 \quad \text{(Corte II)}$$

3. Exprese los cortes I y II del ejemplo 9.2-2 en función de x_1 y x_2, y demuestre que son los que se utilizaron gráficamente en la figura 9.8.
4. En el ejemplo 9.2-2, derive el corte II desde la fila x_3. Use el nuevo corte para completar la solución del ejemplo.

5. Demuestre que, aun cuando el siguiente problema tiene una solución entera factible en x_1 y x_2, el corte fraccionario no dará una solución factible a menos que se eliminen todas las fracciones que hay en la restricción.

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2$$

Sujeto a

$$x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \leq \tfrac{13}{4}$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entera}$$

6. Resuelva los siguientes problemas por medio del corte fraccionario, y compare la solución entera óptima verdadera con la solución obtenida redondeando la solución óptima continua.

(a) Maximizar $z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$
Sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 \qquad &\leq 5 \\ -x_1 + 6x_2 \qquad &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 &\text{ y entera} \end{aligned}$$

(b) Maximizar $z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$
Sujeto a

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ 4x_2 - 3x_3 &\leq 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 &\text{ y entera} \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

Barnett, A., "Misapplication Review: High Road to Glory", *Interfaces,* vol. 17, núm. 5, págs. 51-54, 1987.

Chen, D.S., R. Batson, y Y. Dang, *Applied Integer Programming: Modeling and Solutions,* Wiley, Nueva York, 2010.

Gavernini, S., C. Clark, y G. Pataki, "Schlumberger Optimizes Receiver Location for Automated Meter Reading", *Interfaces,* vol. 34, núm. 3, págs. 208-214,2004.

Graves, R., L. Schrage, y J. Sankaran, "An Auction Method for Course Registration", *Interfaces,* vol. 23, núm. 5, págs. 81-97, 1993.

Guéret, C., C. Prins, y M. Sevaux, *Applications of Optimization with Xpress-MP,* Dash Optimization, Londres, 2002.

Jarvis, J., R. Rardin, V. Unger, R. Moore, y C. Schimpler, "Optimal design of Regional Wastewater Systems: A Fixed Charge Network Flow Model", *Operations Research,* vol. 26, núm. 4, págs. 538-550, 1978.

Lee, J., *A First Course in Combinatorial Optimization,* Cambridge University Press, 2004.

Liberatore, M., y T. Miller, "A Hierarchical Production Planning System," *Interfaces,* vol. 15, núm. 4, págs. 1-11, 1985.

Nemhauser, G y L. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optitnization,* Wiley, Nueva York, 1988.

Schrijver, A., *Theory of Linear and Integer Programming,* Wiley, Nueva York, 1998.

Taha, H., *Integer Programming: Theory, Applications, and Computations,* Academic Press, Orlando, FL, 1975.

Weber, G., "Puzzle contests in MS/OR Education", *Interfaces,* vol. 20, núm. 2, págs. 72-76, 1990.

Wolsey, L., *Integer Programming,* Wiley, Nueva York, 1998.

CAPÍTULO 10

Programación heurística

Aplicación de la vida real. FedEx genera líneas de oferta mediante recocido simulado

FedEx entrega millones de artículos alrededor del mundo diariamente utilizando una flota de más de 500 aviones y más de 3000 pilotos. Las líneas de oferta (viajes redondos), que se inician y terminan en uno de nueve domicilios de las tripulaciones (o centros de distribución), deben satisfacer numerosos reglamentos de la Federal Aviation Administration y FedEx y, hasta donde es posible, las preferencias personales basadas en la antigüedad de los pilotos. El objetivo principal es minimizar la cantidad requerida de líneas de oferta (es decir, la dotación necesaria de personal). La complejidad de las restricciones impide la implementación de un modelo de programación entera. En su lugar, se utiliza una heurística de recocido simulado para resolver el problema.

Fuente: Camplell, K., B. Durfee, y G. Hines, "FedEx Bid Lines Using Simulated Annealing", *Interfaces*, vol. 27, núm. 2, 1997, págs. 1-16.

10.1 INTRODUCCIÓN

La heurística está diseñada para encontrar buenas soluciones aproximadas de problemas combinatorios difíciles que de lo contrario no pueden resolverse mediante los algoritmos de optimización disponibles. Una heurística es una técnica de búsqueda directa que utiliza reglas favorables prácticas para localizar soluciones mejoradas. La ventaja de la heurística es que en general determina (buenas) soluciones con rapidez, utilizando reglas de solución simples. La desventaja es que la calidad de la solución (con respecto a la óptima) suele desconocerse.

Las primeras generaciones de heurística se basan en la regla de *búsqueda codiciosa* que dicta que se mejore el valor de la función objetivo con cada movimiento de búsqueda. La búsqueda termina en un óptimo local donde ya no son posibles más mejoras.

En la década de 1980, una nueva generación de metaheurística buscó mejorar la calidad de las soluciones heurísticas al permitir la búsqueda de una trampa de escape en óptimos locales. La ventaja obtenida se logra a expensas de los cálculos incrementados.

La sección 10.2 se ocupa de la heurística codiciosa. La sección 10.3 presenta tres metaheurísticas prominentes: tabú, recocido simulado y genética. La sección 10.4 aplica la metaheurística al problema de programación entera general. El capítulo concluye en la sección 10.5 con una breve exposición de la búsqueda basada en restricciones relacionadas conocida como programación de restricción.

10.2 HEURÍSTICA CODICIOSA (BÚSQUEDA LOCAL)

Las ideas principales de la heurística codiciosa se explican por medio de un problema de una sola variable. Defina el problema de optimización con espacio de soluciones S como

$$\text{Minimizar } z = F(x), x \epsilon S$$

El proceso iterativo de una heurística codiciosa se inicia en un punto factible (aleatorio) y luego intenta moverse a un punto de mejor solución en las **inmediaciones** (**vecindad**) del punto de solución actual. Específicamente, en la iteración k, dado el punto de solución x_k, la heurística examina todos los puntos factibles en las inmediaciones $N(x_k)$ en busca de una mejor solución. La búsqueda finaliza cuando ya no son posibles más mejoras.

La definición de $N(x_k)$es importante en el diseño de la heurística. Por ejemplo, para x entera, $N(x_k) = [x_k - 1, x_k + 1]$ define la vecindad *inmediata* de x_k. Alternativamente, una vecindad *expandida* puede incluir puntos de solución cercanos adicionales. La primera definición implica menos cálculos de búsqueda local pero podría deteriorar la calidad de la solución final. La segunda definición (vecindad expandida) requiere más cálculos de búsqueda local, pero podría mejorar la calidad de la solución.

Las secciones 10.2.1 y 10.2.2 aplican la heurística codiciosa a variables únicas discretas y continuas. La ampliación de la heurística a múltiples variables se analiza al final de la sección 10.2.2.

10.2.1 Heurística de variable discreta

Esta sección presenta dos ejemplos que utilizan la heurística codiciosa para estimar el óptimo de una función de una sola variable discreta. El primer ejemplo utiliza la vecindad inmediata y el segundo expande el dominio para incluir más puntos de solución.

Ejemplo 10.2-1

Considere la función $F(x)$ dada en la figura 10.1 y defina el problema de optimización como

$$\text{Minimizar } F(x),\ x \in S = \{1, 2, \ldots, 8\}$$

La función tiene un mínimo local en $x = 3(B)$ y un mínimo global en $x = 7D$).

La tabla 10.1 proporciona las iteraciones de la heurística mediante una vecindad inmediata, $N(x_k) = \{x_k - 1, x_k + 1\}$. El número aleatorio $R = .1002$ selecciona el punto de inicio $x = 1$ de entre todos los puntos factibles $x = 1, 2, \ldots, 8$. En la iteración 1, $N(1) = \{2\}$ porque $x = 0$ es no factible. La búsqueda termina en la iteración 3 porque $F(x) > F(x^* = 3)$ para todas las $x \in N(3)$. Esto significa que la búsqueda se detiene en el *mínimo local* $x^* = 3$ con $F(x^*) = 50$.

La tabla 10.1 muestra que la búsqueda codiciosa se detiene en un mínimo local ($x = 3$ en la figura 10.1). Podemos mejorar la calidad de la solución de dos maneras:

1. Repitiendo la heurística con puntos de inicio aleatorios.
2. Expandiendo el tamaño de la vecindad para llegar a más puntos de solución factible.

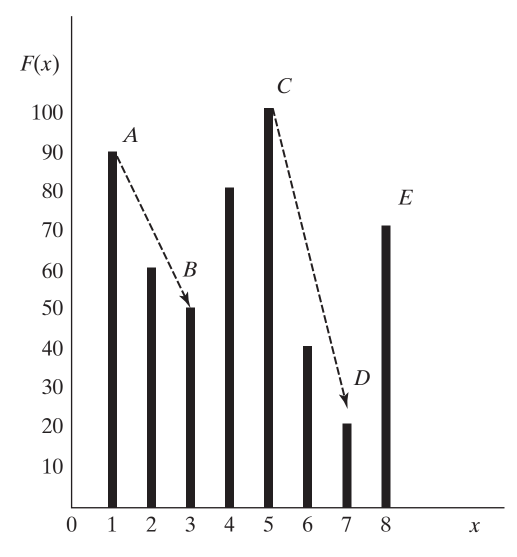


FIGURA 10.1

Función $F(x), x \in S$ {1, 2,…,8}, con mínimo local en $x = 3$ y mínimo global en $x = 7$

TABLA 10.1 Heurística codiciosa aplicada a $F(x)$ en la figura 10.1. Comenzando en $x_0 = 1$ con $N(x_k) = \{x_k - 1, x_k + 1\}$

Iteración k	x_k	$N(x_k)$	$F(x_k - 1)$	$F(x_k + 1)$	Acción
(Inicio) 0	1				Establecer $x^* = 1, F(x^*) = 90$, y $x_{k+1} = 1$
1	1	{2}		60	$F(x_k + 1) < F(x^*)$: Establecer $x^* = 2, F(x^*) = 60, x_{k+1} = 2$
2	2	{1, 3}	90	50	$F(x_k + 1) < F(x^*)$: Establecer $x^* = 3, F(x^*) = 50, x_{k+1} = 3$
(Termi- 3 nación	3	{2, 4}	60	80	$F(x_k - 1)$ y $F(x_k + 1) > F(x^*)$: Mínimo local alcanzado, detenerse.

Resultado de búsqueda: $x^* = 3, F(x^*) = 50$, ocurre en la iteración 2

La aplicación de la primera idea es directa y no necesita más explicación.

La búsqueda de vecindad expandida puede basarse en la evaluación de *todos* los puntos cercanos, una estrategia que incrementa la carga computacional. Alternativamente, podemos determinar el siguiente movimiento de búsqueda mediante la selección aleatoria de la vecindad. Específicamente, en la iteración k, el siguiente movimiento, $x_k + 1$, se selecciona de $N(x_k)$ con probabilidad de $1/m$, donde m es el número de elementos en el conjunto de vecindades. El muestreo de la vecindad se repite, si es necesario, hasta que se determina una solución mejorada, o hasta que un número especificado de iteraciones se ha alcanzado. La regla de selección aleatoria describe lo que se conoce como *heurística de caminata aleatoria*.

Ejemplo 10.2-2 (Heurística de caminata aleatoria)

Este ejemplo se aplica una vez más a $F(x)$ en la figura 10.1. Arbitrariamente definimos el conjunto de vecindades expandidas $N(x_k)$ como $\{1, 2,\ldots,x_k - 1, x_k + 1,\ldots,8\}$. La búsqueda continúa durante cinco iteraciones comenzando en $x_0 = 1$. Indique x'_k [seleccionada de entre $N(x_k)$] como un *posible* siguiente movimiento. Se acepta como el nuevo movimiento de búsqueda sólo si mejora la solución. Si no lo hace, se intenta una nueva selección aleatoria de $N(x_k)$.

La tabla 10.2 detalla la aplicación de la heurística de caminata aleatoria. En contraste con la heurística de vecindad inmediata del ejemplo 10.2-1, la heurística de caminata aleatoria produce la solución $x = 7$ y $F(x) = 40$ en la iteración 4, la que por accidente resulta ser mejor que la obtenida en el ejemplo 10.2-1.

TABLA 10.2 Heurística de caminata aleatoria aplicada a $F(x)$ en la figura 10.1. Comenzando en $x_0 = 1$

Iteración k	x_k	$F(x_k)$	$N(x_k)$	R_k	x'_k	$F(x'_k)$	Acción
(Inicio) 0	1	90					$x^* = 1, F(x^*) = 90$
1	1	90	{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	.4128	4	80	$F(x'_k) < F(x^*)$: Establecer $x^* = 4, F(x^*) = 80, x_{k+1} = 4$
2	4	80	{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8}	.2039	2	60	$F(x'_k) < F(x^*)$: Establecer $x^* = 2, F(x^*) = 60, x_{k+1} = 2$
3	2	60	{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	.0861	1	100	$F(x'_k) > F(x^*)$: Volver a muestrear desde $N(x_k)$
4	2	60	{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	.5839	6	40	$F(x'_k) < F(x^*)$: Establecer $x^* = 6, F(x^*) = 40, x_{k+1} = 6$
(Terminación) 5	6	40	{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8}	.5712	4	80	$F(x'_k) > F(x^*)$: Volver a muestrear desde $N(x_k)$

Mejor solución: $x = 6, F(x) = 40$, ocurre en la iteración 4

Observe el comportamiento de la heurística. En la iteración 3, el posible movimiento aleatorio $x'_k = 1$ desde $N(x_k) = 2) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ no mejora la solución. Por consiguiente, en la iteración 4 se intenta otro movimiento aleatorio desde la misma vecindad. En esta ocasión el movimiento produce la solución superior $x^* = 6$.

10.2.2 Heurística de variable continua

El problema de optimización se define como

$$\text{Minimizar } F(x),\ L \le x \le U$$

La heurística de caminata aleatoria difiere de la del caso discreto (ejemplo 10.2-2) en la definición de la vecindad (continua) y la selección del siguiente movimiento a partir de la vecindad. El dominio $L \le x \le U$ define la vecindad continua de x_k en cualquier iteración k (un subconjunto de este dominio también es aceptable).

El siguiente movimiento, x_{k+1}, se calcula como un desplazamiento aleatorio (positivo o negativo) por encima o por debajo de x_k. Hay dos formas de lograr este resultado:

1. El desplazamiento se basa en una distribución uniforme en el intervalo $\left(-\frac{U-L}{2}, \frac{U-L}{2}\right)$ Dado que R es un número aleatorio (0,1), entonces

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \left(-\left(\tfrac{U-L}{2}\right) + R(U-L)\right) \\ &= x_k + (R - .5)(U - L) \end{aligned}$$

2. El desplazamiento se basa en una distribución normal con una media de x_k y desviación estándar $\frac{U-L}{6}$ (la estimación de la desviación estándar se basa en el supuesto de que $U - L$ representa de forma aproximada la dispersión 6-sigma de la distribución normal). Por lo tanto,

$$x_{k+1} = x_k + \left(\tfrac{U-L}{6}\right) N(0, 1)$$

La desviación estándar $N(0,1)$ se determina con tablas normales en el apéndice A, o utilizando *ExcelStatTables.xls*. También puede utilizarse la función NORMSINV(R) de Excel.

En las dos fórmulas dadas antes quizá sea necesario volver a calcular x_{k+1} más de una vez, utilizando la misma x_k, hasta que x_{k+1} quede dentro del intervalo factible (L,U). Además, si $F(x_{k+1})$ no es una solución mejorada con respecto a $F(x^*)$, la selección aleatoria se repite durante una cantidad específica de iteraciones o hasta se logre una mejora, lo que ocurra primero.

Ejemplo 10.2-3

Aplique la heurística de caminata aleatoria al problema

$$\text{Minimizar } F(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x, 0 \leq x \leq 4$$

Use $x = .5$ como punto de inicio.

Las tablas 10.3 y 10.4 proporcionan 5 iteraciones cada una utilizando muestreo uniforme y normal. Un incremento en el número de iteraciones por lo general produce soluciones de mejor calidad (con respecto a la óptima verdadera). Aunque el muestreo normal produce una solución de mejor calidad en este ejemplo, en general el resultado puede no ser cierto.

Los dos procedimientos de muestreo pueden combinarse en una heurística híbrida. Primero, implementamos la heurística de muestreo uniforme. Luego se utiliza la solución resultante para iniciar la heurística de muestreo normal. La idea es que la heurística de muestreo normal pueda "afinar" la solución obtenida por la heurística de muestreo uniforme (vea más adelante el momento de Excel), que se implementa utilizando Excel.

TABLA 10.3 Minimización de $F(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x, 0 \leq x \leq 4$ aplicando la heurística de caminata aleatoria uniforme con $x_0 = .5$ y $x'_k = x_k + 4(R - .5)$

Iteración	x_k	$F(x_k)$	R_k	x'_k	$F(x'_k)$	Acción
(Inicio) 0	.5	3.281				Establecer $x^* = .5, F(x^*) = 3.281, x_{k+1} = .5$
1	.5	3.281	.4128	.151	2.602	$F(x'_k) < F(x^*)$: $x^* = .1512, F(x^*) = 2.602, x_{k+1} = .151$
2	.15	2.602	.2039	−1.033		Fuera de intervalo: Volver a muestrear usando $x_{k+1} = x_k$
3	.15	2.602	.9124	1.801	−.757	$F(x'_k) < F(x^*)$: $x^* = 1.801, F(x^*) = -.757, x_{k+1} = 1.801$
4	1.8	−.757	.5712	2.086	.339	$F(x'_k) > F(x^*)$: Volver a muestrear usando $x_{k+1} = x_k$
(Terminación) 5	1.8	−.757	.8718	3.288	−1.987	$F(x'_k) < F(x^*)$: $x^* = 3.288, F(x^*) = -1.987, x_{k+1} = 3.288$

Resultado de la búsqueda: $x = 1.801, F(x) = -.757$ ocurre en la iteración 3 [mínimo exacto global $x^* = 3.64438, F(x^*) = -3.631$]

TABLA 10.4 Minimización de $F(x) = x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x, 0 \leq x \leq 4$ utilizando la heurística de caminata aleatoria normal con $x_0 = .5$ y $x'_k = x_k + (4/6)N(0,1)$

Iteración k	x_k	$F(x_k)$	R_k	$N(0,1)$	x'_k	$F(x'_k)$	Acción
(Inicio) 0	.5	3.281					Establecer $x^* = .5, F(x^*) = 3.281, x_{k+1} = .5$
1	.5	3.281	.412	−.2203	.353	3.631	$F(x'_k) > F(x^*)$: Volver a muestrear usando $x_{k+1} = x_k$
2	.5	3.281	.203	−.8278	−.0519		Fuera de intervalo: Volver a muestrear usando $x_{k+1} = x_k$
3	.5	3.281	.912	1.3557	1.404	−1.401	$F(x'_k) < F(x^*)$: $x^* = 1.404, F(x^*) = -1.401, x_{k+1} = 1.404$
4	1.404	−1.401	.571	.1794	1.523	−1.390	$F(x'_k) > F(x^*)$: Volver a muestrear usando $x_{k+1} = x_k$
(Terminación) 5	1.404	−1.401	.871	1.1349	2.160	.6219	$F(x'_k) > F(x^*)$: Volver a muestrear usando $x_{k+1} = x_k$

Resultado de la búsqueda: $x = 1.404, F(x) = -1.401$, ocurre en la iteración 3 [mínimo exacto global $x^* = 3.64438, F(x^*) = -3.631$]

Extensión de la búsqueda codiciosa al caso de múltiples variables. Dada $\mathbf{X} = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$ y un espacio de soluciones S, el problema de optimización se define como

$$\text{Minimizar } z = F(\mathbf{X}), \mathbf{X} \,\varepsilon\, S$$

El algoritmo de búsqueda codiciosa se amplía al caso de múltiples variables poniendo en la mira las variables *una a la vez* en cada iteración, donde una variable puesta en la mira se selecciona al azar desde el conjunto $(x_1, x_2,\ldots,x_n)$. Las heurísticas continua y discreta de variable única dada en las secciones 10.2.1 y 10.2.2 se aplican entonces a la variable seleccionada.

Momento de Excel

La figura 10.2 es una reproducción de aplicación de la hoja de cálculo de Excel de la heurística de caminata aleatoria continua (archivo *excel/ContSingleVarHeuristic.xls*). Utilizando la sintaxis de Excel, la función *F*(*x*) se ingresa en la celda D2 con la celda D5 asumiendo el rol de la variable *x*. El sentido de optimización (máx o mín) se especifica en la celda C2. El intervalo de búsqueda se ingresa en las celdas D3 y D4. El menú desplegable en la celda D5 permite utilizar el muestreo uniforme o aleatorio.

Puede realizarse una heurística híbrida por medio de *muestreo uniforme* y *normal* conjuntamente como sigue:

1. Asigne un punto de inicio en la celda H3 y el número de iteraciones en la celda H4.
2. Seleccione muestreo uniforme en la celda D5, y ejecute la heurística oprimiendo el botón de comando en el paso 6.
3. Use la solución obtenida con el muestreo uniforme (celda D6) como un nuevo punto de inicio en la celda H3.
4. Seleccione el muestreo normal en la celda D5 y vuelva a ejecutar la heurística.

FIGURA 10.2

Heurística de caminata aleatoria realizada con Excel para hallar el óptimo (máximo o mínimo) de una función continua de una sola variable (archivo *excelContVarHeuristic.xls*)

D2 =D5^5-10*D5^4+35*D5^3-50*D5^2+24*D5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Random-Walk Heuristic for Continuos Single Variable functions								
2	Step 1:	Enter F(D5)	Max / Min	2.325007					
3	Step 2a:	Enter lower bound		0	Step 4:	Enter starting point, x0		0.5	
4	Step 2b:	Enter upper bound		4	Step 5:	Enter nbr of iterations, N		5	
5	Step 3:	Select sampling method		Uniform	Step 6:	Execute Heuristic			
6	Solution summary:		Best solution: x* = 1.455886		F(x*) = -1.418696				
7	Iteration, k	xk	F(xk)	R	Uniform	x'	F(x')	x*	F(x*)
8	start	0.5	3.28125					0.5	3.28125
9	1	0.5	3.28125	0.705547512	0.82219	1.322190046	-1.2972882	1.32219	-1.297288
10	2	1.32219005	-1.297288179	0.53342402	0.1336961	1.455886126	-1.4186964	1.4558861	-1.418696
11	3	1.45588613	-1.418696404	0.679518616	0.3180746	1.77396069	-0.8470017		
12	4	1.45588613	-1.418696404	0.289562464	-0.84175	0.614135981	2.65298409		
13	5	1.45588613	-1.418696404	0.301948011	-0.792208	0.663678169	2.32500697		

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.2A

1. Vuelva a resolver el problema del ejemplo 10.2-1 para calcular el valor máximo de $F(x)$. Repita los cálculos con $x = 3$ como solución inicial.

2. Vuelva a resolver el problema del ejemplo 10.2-2 para calcular el valor máximo de $F(x)$.

3. Vuelva a resolver el problema del ejemplo 10.2-3 para calcular el valor máximo de $F(x)$ utilizando el muestreo uniforme. luego utilice la solución obtenida con el muestreo uniforme como solución inicial para la aplicación del muestreo normal.

4. *Experimento con Excel.* Considere la siguiente función:

$$f(x) = .01172x^6 - .3185x^5 + 3.2044x^4 - 14.6906x^3 + 29.75625x^2 - 19.10625x$$

La función tiene múltiples máximos y mínimos en el intervalo $0 \leq x \leq 10$. Use el archivo *excelContVarHeuristic.xls* para estimar el máximo y mínimo de la función utilizando el muestreo uniforme en $x_0 = 5$ y luego refinando la solución por medio del muestreo normal en el cual el punto de inicio es la solución obtenida a partir del muestreo uniforme.

5. Considere el problema de formar un rectángulo de área máxima con una pieza de alambre de 40 pulgadas de longitud.

(a) Genere manualmente una iteración utilizando el muestreo uniforme en el intervalo (0,20), comenzando con un rectángulo de 4 pulgadas de base y aplicando $R = .7905$. Luego use el resultado como solución inicial para una iteración de muestreo normal adicional con $R = .9620$.

(b) *Experimento con Excel.* Utilice el archivo *excelContVarHeuristic.xls* con muestreo uniforme para generar 10 iteraciones de la heurística de la variable continua para estimar las dimensiones del rectángulo. Comience con una base del rectángulo igual a una pulgada.

(c) *Experimento con Excel.* Utilice el archivo *excelContVarHeuristic.xls* con muestreo normal para refinar la solución obtenida en (a). Realice 10 iteraciones.

***6.** La fijación de impuestos puede usarse como instrumento para frenar la demanda de cigarrillos. Suponga que, para una tasa tributaria t, el consumo diario promedio por fumador sigue la función lineal $53 - 100(t/100)$, $10 \leq t \leq 60$. Si la tasa tributaria se eleva, la demanda se reducirá, y la recaudación fiscal también lo hará. El objetivo es determinar la tasa tributaria que maximice la recaudación fiscal. Para el propósito de fijación de impuestos, el precio base por cigarrillo es de 15 centavos. Formule el problema como un modelo matemático, y utilice una heurística para determinar la tasa tributaria.

7. Aplique la heurística de muestreo uniforme para estimar la solución mínima de la siguiente función de dos variables $f(x) = 3x^2 + 2y^2 - 4xy - 2x - 3y$, $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$.

8. La altura de un tanque de agua cilíndrico debe ser al menos dos veces el diámetro de su base. Ni el diámetro ni la altura pueden exceder de 10 pies. El volumen del tanque debe ser al menos de 300 pies^3. El costo de la estructura elevada sobre la que se instala el tanque es proporcional al área de la base. El costo de la lámina es de $\$8/\text{pie}^2$ y el costo de la estructura de soporte es de $\$15/\text{pie}^2$. Formule el problema como un modelo matemático, y desarrolle una heurística de caminata aleatoria para estimar el diámetro y altura del tanque.

10.3 METAHEURÍSTICA

La heurística codiciosa presentada en la sección 10.2 comparte una estrategia común. En la iteración k la búsqueda se mueve a un nuevo punto $\mathbf{X}_{k+1} \in N(\mathbf{X}_k)$ sólo si el nuevo punto mejora el valor de la función objetivo $\boldsymbol{F}(\mathbf{X})$. Si no se puede hallar una $\mathbf{X}_{k+1}$ mejor en $N(\mathbf{X}_k)$ o si se llega a una cantidad de iteraciones especificada por el usuario, la solución se encuentra atrapada en un *óptimo local* y la búsqueda termina.

La metaheurística está diseñada principalmente para escapar del entranpamiento en el óptimo local al permitir movimientos inferiores, si es necesario. Se espera que la flexibilidad agregada a la búsqueda conduzca a una mejor solución.

A diferencia de la heurística codiciosa, la cual siempre termina cuando se llega a un óptimo local, la terminación de una búsqueda metaheurística se basa en los siguientes puntos de referencia:

1. La cantidad de iteraciones de búsqueda excede una cantidad especificada.
2. La cantidad de iteraciones desde la última mejor solución excede una cantidad especificada.
3. La vecindad asociada con el punto de búsqueda actual, o está vacía o no puede conducir a un nuevo movimiento de búsqueda viable.
4. La calidad de la mejor solución actual es aceptable.

Esta sección presenta tres búsquedas prominentes metaheurísticas: Tabú, recocido simulado y genética. Estos algoritmos difieren principalmente en la forma en que la búsqueda escapa de un óptimo local. Cada metaheurística se ilustra por medio de dos ejemplos: El primero, que se ocupa de una función $F(x)$ de una sola variable, está diseñado para explicar los fundamentos de la metaheurística. El segundo, que se ocupa del más complejo problema de secuenciación de tareas en un taller, revela complejidades adicionales en la implementación de la metaheurística. En el capítulo 11, las tres metaheurísticas se aplican al problema del agente viajero.

10.3.1 Algoritmo de búsqueda tabú

Cuando la búsqueda se queda atrapada en un óptimo local, la búsqueda tabú (BT) selecciona el siguiente movimiento de búsqueda (posiblemente inferior) de una manera que prohíbe *temporalmente*, volver a examinar las soluciones anteriores. El instrumento principal para alcanzar este resultado es la **lista tabú** que "recuerda" los movimientos de la búsqueda anterior y los deshabilita durante un **periodo de tenencia** especificada. Cuando un movimiento tabú completa su tenencia, se elimina de la lista tabú y se hace disponible para futuros movimientos.

Ejemplo 10.3-1 (Minimización de una función de una sola variable)

Este ejemplo detalla la aplicación de la BT a la minimización de la función $F(x)$ en la figura 10.1. Para la iteración k sean

x_k = Solución de prueba actual
$N(x_k)$ = Vecindad de x_k
L_k = Lista tabú de valores inadmisibles de x en la iteración k
τ = Periodo de permanencia tabú expresado en cantidad de iteraciones sucesivas
x^* = Mejor solución encontrada durante la búsqueda

En términos de la función $F(x)$ de la figura 10.1, los valores factibles son 1, 2,…, 8. En la iteración k, el conjunto de vecindades de x_k puede definirse como $N(x_k) = \{x_k - q, \ldots x_k - 1, x_k + 1, \ldots, x_k + q\} - L_k$ donde q es una constante entera. La definición excluye implícitamente los

TABLA 10.5 Minimización mediante el algoritmo de BT de $F(x)$, en la figura 10.1 con periodo de permanencia tabú $\tau = 3$ y $N(x_k) = \{x_k - 4, \ldots, x_k - 1, x_k + 1, \ldots, x_k + 4\} - L_k$

Iteración k	R_k	x_k	$F(x_k)$	L_k	$N(x_k)$
(Inicio)0	.0935	1	90		{2, 3, 4, 5}
1	.4128	3	50	{1}	{2, 4, 5, 6, 7}
2	.2039	4	80	{1, 3}	{2, 5, 6, 7, 8}
3	.0861	2	60	{1, 3, 4}	{5, 6}
4	.5839	5	100	{3, 4, 2}	{1, 6, 7, 8}
(Terminación)5	.5712	7	20	{4, 2, 5}	{3, 6, 8}

Mejor solución heurística: $x = 7, F(x) = 20$, en la iteración 5 (sucede que también es óptima).

puntos de solución no factibles.[1] Por ejemplo, en el caso en que $x_k = 3$, $q = 4$ y $L_k = \{6\}$, $N(x_k) = \{\cancel{-1}, \cancel{0}, 1, 2, 4, 5, 6, 7\} - \{6\} = \{1, 2, 4, 5, 7\}$. Los elementos tachados son no factibles.

Como se explica en la sección 10.2, el siguiente movimiento de búsqueda x_{k+1} puede seleccionarse como el mejor entre todas las soluciones en $N(x_k)$, o como un elemento aleatorio de $N(x_k)$ (selección de caminata aleatoria). Este ejemplo utiliza una selección aleatoria.

La tabla 10.5 proporciona 5 iteraciones del algoritmo de BT. La búsqueda se inicia en $x_0 = 1$ (seleccionado al azar desde $\{1, 2, \ldots, 8\}$, utilizando $R = .0935$). Defina la vecindad con $q = 4$ y considere un periodo de permanencia fijo $\tau = 3$ iteraciones (el periodo de permanencia puede ser aleatorio como el problema 3 del conjunto 10.3a lo demuestra).

Para ilustrar los cálculos, $N(x_0 = 1) = \{2, 3, 4, 5\}$. En la iteración 1, $L_1 = \{1\}$ y $R_1 = .4128$ seleccione $x_1 = 3$ a partir de $N(x_0)$, la cual resulta $N(x_1) = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\} - \{1\} = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ y actualiza la lista tabú en la iteración 2 para $L_2 = \{1, 3\}$.

Se elimina un elemento de la lista tabú según el primero en entrar es el primero en salir después de un periodo de permanencia de $\tau = 3$ iteraciones sucesivas. Por ejemplo el elemento {1} permanece en la lista tabú durante las iteraciones 1, 2, y 3 hasta que se elimina en la iteración 4.

Ejemplo 10.3-2 (Secuenciación de tareas)

Considere el caso de secuenciar n tareas en una sola máquina. El tiempo de procesamiento de la tarea j es t_j y su fecha límite es d_j (medida a partir de cero). Si la tarea j se completa con anticipación a su fecha límite se incurre en un costo de retención (almacenamiento) h_j por unidad de tiempo. Una tarea j retrasada provoca un costo de penalización p_j por unidad de tiempo. La tabla 10.6 da los datos para un problema de 4 tareas.

Defina

j_{ik} = La tarea j ocupa la posición i durante la iteración k

s_k = Secuencia de tareas utilizada en la iteración k

$N(s_k)$ = Secuencias de las vecindades de s_k

L_k = Lista tabú en la iteración k

τ = Periodo de permanencia expresado en cantidad de iteraciones sucesivas

z_k = Costo total (retención + penalización) de la secuencia s_k

s^* = Mejor secuencia disponible durante la búsqueda

z^* = Costo total asociado con s^*

[1]En realidad, un elemento tabú puede definir un siguiente movimiento de búsqueda si satisface el llamado *Criterio de Nivel de Aspiración,* como se explicará en el ejemplo 10.3-2.

TABLA 10.6 Datos del problema de secuenciación de tareas para el ejemplo 10.3-2

Tarea, j	Tiempo de procesamiento en días, T_j	Fecha límite, d_j	Costo de retención por día, h_j	Costo de penalización por día, p_j
1	10	15	\$3	\$10
2	8	20	2	22
3	6	10	5	10
4	7	30	4	8

Entre las posibles opciones para determinar la vecindad, $N(s_k)$, a partir de s_k se encuentran las siguientes:

1. Intercambiar las posiciones de pares sucesivos de tareas.
2. Intercambiar las posiciones de pares implícitos de cada dos tareas.
3. Intercambiar la posición de una tarea con otra seleccionada al azar de entre las tareas restantes.

En este ejemplo se utiliza la primera definición. Para demostrar su uso considere s_0 = (1-2-3-4). El conjunto de vecindades es $N(s_0)$ = {(**2-1**-3-4), (1-**3-2**-4, (1-2-**4-3**)}, el cual corresponde a intercambiar las posiciones (en s_0) de las tareas 1, y 2, las tareas 2 y 3, y las tareas 3 y 4, respectivamente. La selección del siguiente movimiento s_1 a partir de $N(s_0)$ puede hacerse al azar o basado en el criterio de costo mínimo. Este ejemplo emplea la selección aleatoria.

La tabla 10.7 resume 5 iteraciones suponiendo un periodo de permanencia $\tau = 2$ iteraciones. La secuencia (3-1-2-4) en la iteración 2 proporciona la mejor solución con $z^* = 126$. Para de-

TABLA 10.7 BT aplicada al problema de secuenciación de tareas con periodo de permanencia $\tau = 2$ iteraciones

Iteración, k	Secuencia, s_k	Costo total (retención) + (penalización)	z^*	Lista tabú $L(s_k)$	R	Vecindades $N(s_k)$*
(Inicio)0	(1-2-3-4)	$(5\times3+2\times2)+(14\times10+1\times8)=167$	167		.5124	(**2-1**-3-4) (1-**3-2**-4)✓ (1-2-**4-3**)
1	(1-**3-2**-4)	$(5\times3)+(6\times10+4\times22+1\times8)=171$		{3-2}	.3241	(**3-1**-2-4)✓ ~~(1-**2-3**-4)~~ (1-3-**4-2**)
2	(**3-1**-2-4)	$(4\times5)+(1\times10+4\times22+1\times8)=126$	126	{3-2, 3-1}	.2952	~~(**1-3**-2-4)~~ (3-**2-1**-4)✓ (3-1-**4-2**)
3	(3-**2-1**-4)	$(4\times5+6\times2)+(9\times10+1\times8)=130$		{3-1, 2-1}	.4241	(**2-3**-1-4)✓ ~~(3-**1-2**-4)~~ (3-2-**4-1**)
4	(**2-3**-1-4)	$(12\times2)+(4\times10+9\times10+1\times8)=162$		{2-1, 2-3}	.8912	~~(**3-2**-1-4)~~ (2-**1-3**-4) (2-3-**4-1**)✓
(Terminación) 5	(2-3-**4-1**)	$(12\times2+9\times4)+(4\times10+16\times10)=260$		{4-1, 1-3}	.0992	(**3-2**-4-1)✓ (2-**4-3**-1) (2-3-**1-4**)

Mejor secuencia de búsqueda: (3-1-2-4) con costo = 126 en la iteración 2

*La marca de verificación ✓ designa el elemento no tabú seleccionado al azar a partir de $N(s_k)$ utilizando R.

mostrar los cálculos de los costos en la tabla, el valor de z para la secuencia s_2 = (3-1-2-4) de la iteración 2 se determina en el siguiente orden:[2]

Tarea:	3	1	2	4
Tiempo de procesamiento:	6	10	8	7
Fecha límite:	10	15	20	30
Fecha de terminación:	6	16	24	31
Tiempo de retención:	4	0	0	0
Tiempo de retardo:	0	1	4	1
Costo de retención:	20	0	0	0
Costo de penalización por retraso	0	10	88	8

Por lo tanto, z = Costo de retención + Costo de penalización = 20 + (10 + 88 + 8) = \$126.

La heurística funciona de la siguiente manera: En la iteración 1, $R = .5124$ selecciona la secuencia s_1 = (1-**3**-**2**-4) al azar de $N(s_0)$. La lista tabú asociada es $L_1 = \{3\text{-}2\}$, lo que significa que las posiciones de las tareas 2 y 3 no pueden cambiarse durante el periodo de permanencia (es decir, durante dos iteraciones sucesivas). Ésta es la razón por la que la secuencia (1-**2**-**3**-4) se excluye en $N(s_1)$. El mismo razonamiento aplica a las secuencias tachadas en iteraciones subsiguientes. Observe que los cálculos en la tabla 10.7 aplican R sólo a elementos cercanos admisibles (no tachados).

"Afinación fina" de la BT. Los siguientes refinamientos pueden ser efectivos para mejorar la calidad de la solución final:

1. **Criterio de aspiración.** El diseño de la BT imposibilita los movimientos que aparecen en la lista tabú. Sin embargo, ocurre una excepción cuando un movimiento imposibilitado conduce a una solución mejorada. Por ejemplo, en la tabla 10.7 (ejemplo 10.3-2), las secuencias tabú tachadas en las iteraciones 1, 2, 3 y 4 deben examinarse en cuanto a la posibilidad de producir mejores movimientos de búsqueda. Si lo hacen, deben ser aceptadas como movimientos de búsqueda.
2. **Intensificación y diversificación.** Por lo general se aplican dos estrategias adicionales, llamadas intensificación y diversificación, cuando una cadena de iteraciones sucesivas no produce mejoras. La intensificación demanda un examen más completo de los puntos de solución cercanos, y la diversificación intenta desplazar la búsqueda a regiones de solución no exploradas. Una forma de implementar estas estrategias es controlando el tamaño de la lista tabú. Una lista tabú más corta aumenta el tamaño permisible del conjunto de vecindades y por consiguiente intensifica la búsqueda a puntos que queden cerca de la mejor solución. Una lista tabú más larga hace lo contrario puesto que deja escapar de un punto óptimo local al permitir explorar regiones "remotas".

Resumen del algoritmo de búsqueda tabú

Paso 0. Seleccione una solución de inicio $s_0 \in S$. Inicie la lista tabú $L_0 = \emptyset$, y seleccione un esquema para especificar el tamaño de la lista tabú. Establezca $k = 0$.

[2]Por comodidad, los cálculos de los costos se automatizan con la hoja de cálculo *excelJobSequencing.xls* en situaciones que implican cuatro y cinco tareas. Puede modificarla para tener en cuenta otras situaciones.

Paso 1. Determine la vecindad factible $N(s_k)$ que excluya miembros (inferiores) de la lista tabú L_k.

Paso 2. Seleccione el siguiente movimiento s_{k+1} a partir de $N(s_k)$ (o de L_k, si proporciona una mejor solución), y actualice la lista tabú L_{k+1}.

Paso 3. Si se llega a una condición de terminación, deténgase. Si no, establezca $k = k+1$ y vaya al paso 1.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.3A

1. Resuelva el ejemplo 10.2-1 para estimar el punto de solución máxima. Utilice $x_0 = 8$ y $t = 2$.

2. Considere la siguiente función:

$$f(x) = .01172x^6 - .3185x^5 + 3.2044x^4 - 14.6906x^3 + 29.75625x^2 - 19.10625x$$

La función tiene múltiples máximos y mínimos en el intervalo $x = 1, 2, \ldots, 10$. Aplique 10 iteraciones de búsqueda tabú para estimar el máximo y el mínimo. Use $x_0 = 5$ y periodo de permanencia tabú $\tau = 2$ iteraciones.

3. Aplique la BT con $\tau = 3$ iteraciones para resolver el problema de secuenciación de 5 tareas aplicando los datos de la tabla 10.8.
(*Sugerencia:* Quizá le sea cómodo utilizar el archivo *excelJobSequencing.xls* para calcular las funciones de costo.)

4. Considere 10 variables Booleanas, B_i, $i = 1, 2, ..., 10$. Cada variable asume el valor T (verdadero) o F (falso). Luego considere las siguientes seis expresiones (la notación $\underline{B}_i$ *no* define a B*i*):

(B1 y B3 y B8) o (B4 y B10) y B6

$\underline{\text{B}}$2 y $\underline{\text{B}}$7

(B2 o B5) y (B1 o B4 o B6)

(B1 y B3 o B4) o (B5)

(B4 y B6) o B9

B2 o B5 o B6 o (B1 y B3)

Use la BT para asignar una solución a cada variable Booleana que maximice la cantidad de expresiones lógicas verdaderas. Realice cinco iteraciones de BT empezando con una solución. $S_0 = (T, F, T, F, T, F, T, F, T, F)$ y un periodo de permanencia tabú de dos

TABLA 10.8 Datos para el problema 3, conjunto 10.3a

Tarea, j	Tiempo de procesamiento en días, T_j	Fecha límite, d_j	Costo de retención por día, h_j	Costo de penalización por día, p_j
1	10	12	\$3	\$10
2	12	30	1	20
3	5	9	5	12
4	7	25	2	8
5	9	40	4	15

TABLA 10.9 Datos para el problema 6, conjunto 10.2a

	c_{ij}				
i \ j	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
1	10	15	20	9	40
2	12	17	15	20	10
3	18	14	10	35	16
4	9	12	33	28	19

iteraciones. (*Sugerencia:* Por comodidad, el archivo *excelSAT.xls* automatiza la evaluación de las expresiones Booleanas.).

5. Repita el problema 4 para las siguientes expresiones Booleanas:

(B1 y B5) o (B3 y B9) y (B2 o B10)

B3 o B6 y (B7 o B9 y B10)

$\underline{\text{B}}$4 y $\underline{\text{B}}$7 y $\underline{\text{B}}$8

B2 o B3 y B4 y B5 o B8 y (B1 o B6)

(B3 y B4 y B10) o (B5 y B7) o (B9 y B10)

B1 o (B4 y B7) o B8

(B3 y B5 o B6) o (B1 o B8 y B9 o B10)

6. *Asignación de almacenes*. Considere el caso de 4 almacenes y 5 tiendas. El costo fijo de abrir un almacén es de 20 ($ mil). El costo de transporte, c_{ij}, de los envíos entre almacenes y las tiendas se resume en la tabla 10.9.

(a) Formule el problema como una PLE y determine la solución óptima (con AMPL o Solver).

(b) Resuelva el problema con la BT y un periodo de permanencia de dos iteraciones.

7. *Árbol de expansión mínima restringida*, *Glover (1990).* La sección 6.2 presenta un algoritmo óptimo para determinar el árbol de expansión mínima que enlace todos los nodos de una red (por definición, un árbol no contiene ciclos). En un entorno práctico, puede ser necesario imponer restricciones de interdependencia en los arcos (ramas) del árbol de expansión mínima (es decir, sólo uno de un subconjunto de arcos puede estar en el árbol de expansión). Puede usarse la BT para tener en cuenta todas las restricciones adicionales.

Considere la red de 6 arcos (a, b, c, d, e, f, g, h) que es muestra en la figura 10.3 con las siguientes restricciones adicionales:

1. Sólo uno de los dos arcos, a y c, puede estar en el árbol.

2. Si el arco b está en el árbol, entonces el arco d también debe estarlo.

La aplicación de la BT para determinar el árbol de expansión mínima restringida se realiza como sigue: El árbol de expansión mínima no restringida (b, c, f, g, h) de longitud $(2 + 3 + 1 + 6 + 4) = 16$ se utiliza como una solución de inicio. Los arcos restantes a, d y e, designan como *libres*. Un árbol de expansión de vecindad (solución) puede generarse agregando un arco al árbol de expansión actual y eliminando uno existente para evitar los ciclos. Por ejemplo, el arco b o c deben eliminarse si se admite al arco libre a en el

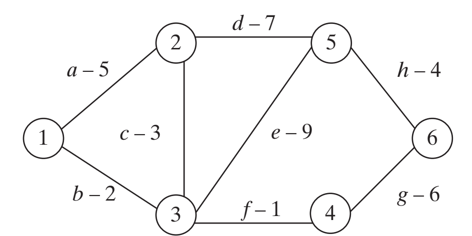


FIGURA 10.3
Red para el problema 7, conjunto 10.2a

árbol de expansión (b, c, f, g, h) para evitar que se forme el ciclo a, b, c. El cambio produce dos alternativas: agregar a y eliminar b, o agregar a y eliminar c. Se pueden generar alternativas similares cuando se consideran las variables libres restantes, d y e. El conjunto de todas estas alternativas define la vecindad.

La *aptitud* de una alternativa incluye la longitud del árbol de expansión más una penalización por la violación de las restricciones adicionales dadas antes. Por ejemplo, dado el árbol (b, c, f, g, h), la alternativa "agregar a y eliminar b" produce el árbol (a, c, f, g, h) cuya aptitud es [(5 + 3 + 1 + 6 + 4) + (penalización por violar la primera restricción)]. Asimismo, la alternativa "agregar el arco a y eliminar el arco c" produce el árbol (a, b, f, g, h) cuya aptitud es [5 + 2 + 1 + 6 + 4) + (penalización por violar la segunda restricción)]. La penalización debe ser suficientemente grande (es decir, un múltiplo de la suma de las longitudes de todos los arcos en la red). En la presente situación, la longitud total de la red es 37, y una penalización de 2000 es propicia. La alternativa con la menor aptitud proporciona la siguiente solución de prueba. La variable libre correspondiente se agrega entonces a la lista tabú para que no abandone el árbol durante su periodo de tenencia.

Aplique cinco iteraciones a la red en la figura 10.3.

8. *Colocación de rótulos cartográficos*, *Yamamoto and Associates (2002)*. La colocación inequívoca de los nombres de ciudades, calles, lagos y ríos en mapas impresos siempre ha sido un proceso manual que requiere mucho tiempo. Con el advenimiento de la generación de mapas en línea (como en Google y MapQuest), el proceso manual no es una opción viable. Se puede utilizar una heurística tabú para automatizar la colocación de rótulos en mapas. Este problema abordará el caso de rotulación de ciudades. El objetivo general es evitar que se traslapen los rótulos, al mismo tiempo que se toman en cuenta las preferencias para la colocación de los rótulos con respecto a la ubicación de la ciudad nombrada en el mapa.

La figura 10.4 proporciona un ejemplo de colocación de los nombres de cuatro ciudades, A, B, C y D en un mapa. Cada ciudad tiene cuatro opciones de colocación representadas por cuatro rectángulos. La prioridad para la colocación de los rótulos entre los cuatro rectángulos puede estar en cualquier orden. En la figura 10.4, asumimos un orden de preferencia de la mejor a la peor en sentido contrario al de las manecillas del reloj para los rectángulos de cada ciudad. Por ejemplo, para la ciudad A, el orden de las preferencias de rotulación es A1-A2-A3-A4. Una solución típica selecciona un rectángulo específico para cada ciudad. Por ejemplo (A1, B2, C3, D2) es una solución para las cuatro ciudades de la figura 10.4.

El "costo" de seleccionar un rectángulo específico en una solución es la suma de dos componentes: una calificación de preferencia numérica en el intervalo (0,1) donde cero es la mejor, y la cantidad de traslapes con otros rectángulos. La figura 10.4 presenta las calificaciones de las preferencias para la ciudad A(A1 = 0, A2 = .02, A3 = .03, y A4 = .04). Las mismas calificaciones se aplican a los rectángulos correspondientes en las ciudades B, C y D. Para determinar los traslapes considere la solución (A1, B2, C3, D2). Sólo C3 y D2 se traslapan.

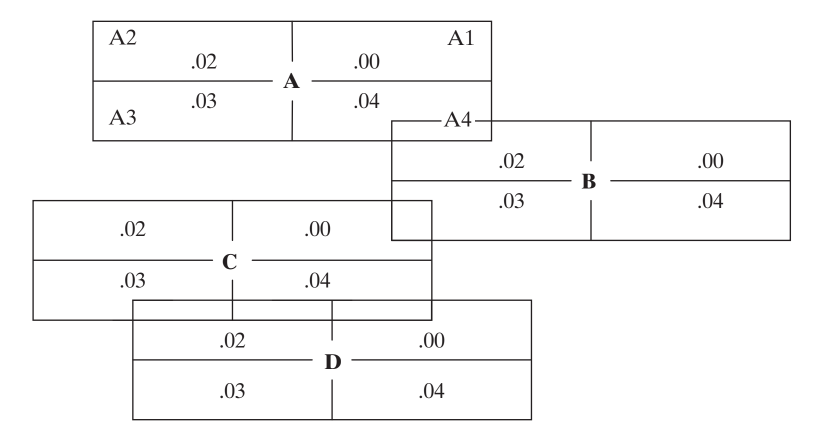


FIGURA 10.4
Opciones de rotulación para el problema 7, conjunto 10.2a

La siguiente matriz resume las calificaciones asociadas con la solución (A1, B2, C3, D2).

	A1	B2	C3	D2
A1	.00	.00	.00	.00
B2	.00	.02	.00	.00
C3	.00	.00	.03	1.00
D2	.00	.00	1.00	.02

Todas las entradas diagonales son las calificaciones de las preferencias del rectángulo asociado. Un elemento afuera de la diagonal es igual a 1 si los elementos correspondientes se traslapan. Si no, es cero. El costo asociado con la solución (A1, B2, C3, D2) es la suma de todas las entradas en la matriz [= (.02 + .03 + .02 + (1 + 1) = 2.7]. El objetivo del modelo es hallar la solución que minimice el costo total.

(a) Construya la tabla de aptitud (16×16) que tenga en cuenta todas las colocaciones posibles de los rótulos.

(b) Encuentre una solución al problema utilizando tres iteraciones de BT con un periodo tabú de permanencia de dos iteraciones. [*Sugerencia:* La solución óptima de este problema trivial es obvia: (A1, B1, B2, B3 y B4) con aptitud total cero. Para demostrar iteraciones de BT significativas, sin embargo, se requiere que inicie con la solución A1, B2, C3, D3. Una solución de vecindad se compone del reemplazo de uno de los rectángulos de una ciudad con otro: por ejemplo, reemplazando C3 con C1. En este caso, la ciudad *C* se coloca en la lista tabú durante el periodo de tenencia.

10.3.2 Algoritmo de recocido simulado

El recocido simulado (RS) escapa del atrapamiento en un óptimo local utilizando una condición de probabilidad que acepta o rechaza un movimiento inferior (siempre se acepta un mejor movimiento). La idea de determinar la probabilidad de aceptación del siguiente movimiento de búsqueda se explica como sigue: Suponga que el problema de optimización se da como

$$\text{Maximizar o minimizar } z = F(s),\ s\ \varepsilon\ S$$

A medida que la cantidad de iteraciones se incrementa, el RS busca una determinación más selectiva de estrategias de solución utilizando un parámetro ajustable T, llamado **temperatura**, es decir, se hace progresivamente más pequeño de acuerdo con un **programa de temperatura**.[3] Un programa de I elementos para T suele definirse como $[T = T_i, i = 0, 1,\ldots,I]$. Cada T_i solicita un número específico de iteraciones de *aceptación* consecutivas, t.[4] Dado que s_0 es la estrategia de inicio de la búsqueda, T_i se calcula típicamente como

$$T_0 = r_0 F(s_0), 0 < r_0 < 1,$$
$$T_i = r_i T_{i-1}, 0 < r_i < 1, i = 1, 2, \ldots, I$$

Defina s_a como la última estrategia de solución *aceptada*. En la iteración k, la probabilidad de aceptar una estrategia cercana como el siguiente movimiento de búsqueda, s_{k+1}, se calcula como

$$P\{\text{aceptar } s_{k+1} | \, s_{K+1} \in N(s_k)\} = \begin{cases} 1, \textit{ si } F(s_{k+1}) \text{ no es peor que } F(s_a) \\ e^{\frac{-|F(s)-F(s_{k+1})|}{T}}, \text{ si en caso contrario} \end{cases}$$

La fórmula dice que el siguiente movimiento de búsqueda, s_{k+1}, se acepta si $F(s_{k+1})$ no es peor que $F(s_a)$. De lo contrario, $F(s_{k+1})$ es una solución inferior y s_{k+1} se acepta sólo si $R_k \leq e^{\frac{-|F(s_a)-F(s_{k+1})|}{T}}$, donde R_k es un número aleatorio (0,1). Si s_{k+1} se rechaza, se intenta una estrategia de solución diferente con $N(s_a)$. Observe que el programa de temperatura reduce la probabilidad de aceptación a medida que la cantidad de iteraciones aumenta haciendo a T_i cada vez más pequeña.

Ejemplo 10.3-3 (Minimización de una función de una sola variable)

La tabla 10.10 aplica cinco iteraciones de RS para hallar el mínimo de la función de una sola variable que aparece en la figura 10.1. La solución define arbitrariamente la vecindad en cualquier iteración k como $N(x_k) = \{1, 2,\ldots,8\} - \{x_a\}$, donde x_a es la solución asociada con la iteración de aceptación más reciente.

Para ilustrar los cálculos, la búsqueda selecciona arbitrariamente $x_0 = 1$ con $t = 3$ iteraciones de aceptación y $r_0 = .5$. Por lo tanto, $N(x_0) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $F(1) = 90$, y $T_0 = .5F(1)= 45$. Para $k = 1$, el número aleatorio $R_{11} = .4128$ selecciona el siguiente punto de solución (posible) $x_1 = 4$ desde $N(x_0)$ con $F(4) = 80$. Como $F(x_1)$ es mejor que $F(x_0)$, aceptamos el movimiento. En la iteración 2 establecemos $a = 1$, con $F(x_a) = 80$. El siguiente movimiento $x_2 = 2$ se selecciona a partir de $N(x_1) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ utilizando $R_{12} = .2039$. De nuevo se acepta el movimiento porque mejora la solución desde $F(x_1) = 80$ hasta $F(x_2) = 60$. Esto hace $a = 2$ con $F(x_a) = 60$. En la iteración 3, $R_{13} = .0861$ selecciona $x_3 = 1$ a partir de $N(x_2) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ con $F(x_3) = 90$. La nueva solución es inferior a $F(x_a) =60$. Por lo tanto $\Delta = |60\text{-}90| = 30$, y $e^{-\Delta t} = .5134$. Dado $R_{23} = .5462$, se rechaza la solución $x_3 = 1$, lo cual requiere que se vuelva a muestrear desde la última vecindad aceptada $N(x_2)$. En la iteración 4, se acepta $x_4 = 6$ porque resulta una solución mejorada (con respecto a la de la iteración 2). En este momento se satisface la condición $t = 3$, lo que cambia la temperatura a $T_1 = .5T_0 = 22.5$ en la siguiente iteración. En la iteración 5, dada $x_5 = 5$, R_{25} (= .0197) $< e^{-\Delta t}$ (= .0695) acepta el movimiento aun cuando es una solución inferior $[F(5) = 100]$.

[3]El RS se inspiró en el proceso de recocido en la metalurgia, el cual implica el calentamiento y el enfriamiento controlado de un material, de ahí el uso del término *temperatura*. El uso de la jerga metalúrgica en la descripción del RS es puramente tradicional, sin ninguna relación técnica con el desarrollo de la heurística, guarda la idea general detrás del proceso de recocido.

[4]Basar el cambio de temperatura en la cantidad de iteraciones de *aceptación* es una regla arbitraria y puede ser reemplazada por otras, por ejemplo basar el cambio en el total de iteraciones (de aceptación o rechazo) que intervienen.

TABLA 10.10 Minimización de $F(x)$ utilizando heurística de RS con programa $T_0 = .5F(x_0), T_i = .5T_{i-1}, i = 1,2,3, \ldots$ y $t = 3$ iteraciones de aceptación

Iteración k	R_{1k}	x_k	$F(x_k)$	a	T	Δ = Cambio en F	$e^{-\Delta/T}$	R_{2k}	Decisión	$N(x_k)$
(Inicio) 0		1	90	0	45.0					$\{2,3,4,5,6,7,8\}$
1	0.4128	4	80	1	45.0				Aceptar: $F(x_1) < F(x_0)$	$\{1,2,3,5,6,7,8\}$
2	0.2039	2	60	2	45.0				Aceptar: $F(x_2) < F(x_1)$	$\{1,3,4,5,6,7,8\}$
3	0.0861	1	90	2	45.0	$\lvert 60 - 90 \rvert = 30$	.5134	.5462	Rechazar: $R_{2k} > e^{-\Delta/T}$	Igual que $N(x_2)$
4	0.5839	6	40	4	45.0				Aceptar: $F(x_4) < F(x_2)$	$\{1,2,3,4,5,7,8\}$
(Terminación) 5	0.5712	5	100	5	22.5	$\lvert 40 - 100 \rvert = 60$	.0695	.0197	Aceptar: $R_{2k} < e^{-\Delta/T}$	$\{1,2,3,4,6,7,8\}$

Buscar la mejor solución: $x = 6$ con $F(6) = 40$ en la iteración 4.

Ejemplo 10.3-4 (Secuenciación de tareas)

Este problema se resuelve en el ejemplo 10.3-2 utilizando la BT. Por comodidad, en este caso se repite el enunciado del problema. Las tareas se secuencian en una sola máquina. Cada tarea j tiene un tiempo de procesamiento t_j y una fecha límite d_j. Si se completa j antes de la fecha límite, se incurre en costo de retención h_j por unidad de tiempo. Una tarea retrasada j da por resultado un costo de penalización p_j por unidad de tiempo. La tabla 10.11 proporciona los datos para un problema de secuenciación de 4 tareas.
Defina

s_k = Secuencia de tareas utilizada en el iteración k

$N(s_k)$ = Secuencias de vecindades de s_k

T_i = Programa de temperatura, $i = 1,2,\ldots,I$

c_k = Costo total (retención + penalización) de la secuencia s_k

La tabla 10.12 proporciona cinco iteraciones de RS. La iteración 3 produce la mejor secuencia. Observe que cuando una secuencia se rechaza en la iteración k, volvemos a utilizar la vecindad de última iteración de *aceptación* para seleccionar al azar la secuencia para la iteración $k + 1$. Esto ocurre en la iteración 2, donde la vecindad no cambia como en la iteración 1. Observe también que $t = 3$ se satisface en la iteración 4, lo que hace que cambie la temperatura de 83.5 a 41.75 en la iteración 5.

Resumen del algoritmo de recocido simulado

Paso 0. Seleccione una solución de inicio $s_0 \varepsilon S$. Establezca $k = 0, p = 0$, e $i = 0$.

Paso 1. Genere la cercanía $N(s_k)$ y establezca la temperatura $T = T_i$.

TABLA 10.11 Datos para el problema de secuenciación de tareas del ejemplo 10.3-4

Tarea, j	Tiempo de procesamiento en días, T_j	Fecha límite, d_j	Costo de retención por día, h_j	Costo de penalización por día, p_j
1	10	15	\$3	\$10
2	8	20	2	22
3	6	10	5	10
4	7	30	4	8

TABLA 10.12 RS aplicado al problema de secuenciación de tareas con programa $T_0 = .5z_0$, $T_i = .5T_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ y $t = 3$ iteraciones de aceptación

Iteración k	Secuencia s_k	Costo total c_k = (retención) + (penalización)	T_k	$z = \frac{\lvert\text{Cambio de costo}\rvert}{T_k}$	e^{-z}	R_{1k}	Decisión	R_{2k}	Cercanía $N(s_k)$*
(Inicio)0	(1-2-3-4)	$(5\times3+2\times2)+(14\times10+1\times8) = 167$	83.5					.5462	(**2-1**-3-4) (1-**3-2**-4) ✓ (1-2-**4-3**)
1	(1-**3-2**-4)	$(5\times3)+(6\times10+4\times22+1\times8) = 171$	83.5	.0479	.9532	.5683	Aceptar: $R_{11} < e^{-z}$	.7431	(**3-1**-2-4) (1-**2-3**-4) (1-3-**4-2**) ✓
2	(1-3-**4-2**)	$(5\times3+7\times4)+(6\times10+11\times22) = 345$	83.5	2.083	.1244	.3459	Rechazar: $R_{12} > e^{-z}$	.1932	(**3-1**-2-4) ✓ (1-**2-3**-4) (1-3-**4-2**)
3	(**3-1**-2-4)	$(4\times5)+(1\times10+4\times22+1\times8) = 126$	83.5				Aceptar: $c_3 < c_1$	.6125	(**1-3**-2-4) (3-**2-1**-4) ✓ (3-1-**4-2**)
4	(3-**2-1**-4)	$(4\times5+6\times3)+(9\times10+1\times8) = 130$	83.5	.0479	.9532	.6412	Aceptar: $R_{14} < e^{-z}$	.2234	(**2-3**-1-4) ✓ (3-**1-2**-4) (3-2-**4-1**)
(Terminación)5	(**2-3**-1-4)	$(12\times2)+(4\times10+9\times10+1\times8) = 162$	41.75	.766	.4647	.5347	Rechazar: $R_{15} > e^{-z}$	.8127	(**2-3**-1-4) (3-**1-2**-4) (3-2-**4-1**) ✓

Búsqueda de la mejor solución: (3-1-2-4) con costo de 126 en la iteración 3.

*La marca de verificación ✓ indica la secuencia seleccionada utilizando el número aleatorio R_{2k}.

Paso 2. Determine la solución s_{k+1} al azar desde $N(s_k)$. Si s_{k+1} no es peor que la solución *última aceptada* o si $R < P$ {acepte s_{k+1}}, luego acepte s_{k+1}, establezca $p = p + 1$, y vaya al paso 3. De lo contrario, rechace s_{k+1} y establezca $N(s_{k+1}) = N(s_k)$. Establezca $k = k + 1$, y vaya al paso 1.

Paso 3. Si se llega a una condición de terminación, deténgase. De lo contrario, establezca $k = k + 1$. Si $p = t$, entonces establezca $i = i + 1$. Vaya al paso 1.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.3B

1. Realice cinco iteraciones en el ejemplo 10.3-3.
2. Resuelva el ejemplo 10.3-3 para estimar el punto de solución máximo. Use $x_0 = 8$ y $t = 3$.
3. Realice cuatro iteraciones más del problema de secuenciación de tareas en el ejemplo 10.3-4.
4. *Programación de horarios.* Considere un caso de desarrollo de un horario de 5 clases (C) impartidas por 5 profesores (T). Los profesores proporcionan las siguientes preferencias para impartir las clases (la parte superior de la lista es la más deseada):

T1: C1 - C2 - C3 - C5

T2: C2 - C1 - C4 - C5

T3: C1 - C5 - C4 - C3

T4: C4 - C2 - C5 - C3

T5: C2 - C5 - C3 - C1

La situación se simplifica al desarrollar un horario de cinco periodos de un día que minimiza la insatisfacción entre los profesores. Una medida de insatisfacción está representada por la asignación tan baja a un profesor en la lista de preferencias de un curso. Por ejemplo, la medida de insatisfacción es cero si C1 se asigna a T1 y 3 si C5 se asigna a T1. Un horario se evalúa por la suma de sus medidas individuales.

Desarrolle una heurística de RS de 5 iteraciones para el problema.

5. *Problema del coloreado de los mapas*. El problema de colorear tiene que ver con la determinación del mínimo de colores para pintar las regiones de un mapa de modo que dos regiones adyacentes no tengan el mismo color. La figura 10.5 (a) proporciona un ejemplo de un mapa de 6 regiones. El problema puede modelarse como una red en la cual los nodos representan las regiones como se muestra en la figura 10.5 (b). Un arco entre dos nodos significa que las dos regiones correspondientes son adyacentes (comparten una frontera común). El problema de colorear el mapa puede representar otras situaciones prácticas, como lo demuestra el problema 6.

Se puede aplicar una heurística de RS al problema de colorear. La solución de inicio, x_0, puede determinarse de una de dos maneras:

1. Asigne un color único a cada nodo de la red. Por lo tanto, $x_0 = (1, 2,\ldots,6)$ para la red de la figura 10.5(b).

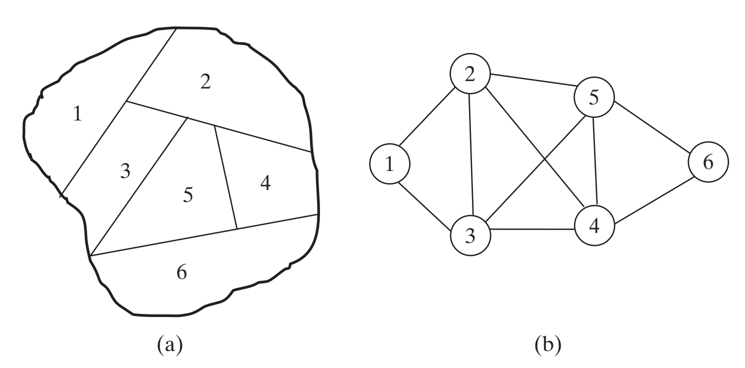
2. Use un algoritmo codicioso que se inicie asignando el color 1 al nodo 1. Luego, dado que los nodos $1, 2,\ldots$ e $i - 1$ utilizan los colores $1, 2,\ldots,$ y c, $c \leq i - 1$, asigne el color de número menor en el conjunto $(1, 2,\ldots,c)$ al nodo i sin crear arcos *malos* (aquellos cuyos dos nodos extremos utilizan el mismo color). Si no se puede hallar ninguno, aplique un nuevo color $c + 1$. Para la red de la figura 10.5(b), los pasos sucesivos para construir x_0 son

$$x_0^1 = (1)$$
$$x_0^2 = (1, 2)$$
$$x_0^3 = (1, 2, 3)$$
$$x_0^4 = (1, 2, 3, 1)$$
$$x_0^5 = (1, 2, 3, 1, 4)$$
$$x_0 = x_0^6 = (1, 2, 3, 1, 4, 2)$$

El algoritmo codicioso utiliza 4 clases de colores: $C_1 = (1,1)$, $C_2 = (2,2)$, $C_3 = (3)$, $C_4 = (4)$ que se aplican a los nodos 1 y 4, los nodos 2 y 6, el nodo 3, y el nodo 5, respectivamente.

FIGURA 10.5

(a) Mapa de seis regiones (b) representación de red para el problema 5, conjunto 10.3b



Una solución vecina, x_{i+1} se determina cambiando el color de un nodo aleatorio en x_i a un color aleatorio en el mismo conjunto. Por ejemplo, dado $x_0 = (1, 2, 3, 1, 4, 2)$ y su conjunto de colores asociado $c_0 = (1, 2, 3, 4)$, las selecciones aleatorias del color 1 a partir de c_0 y nodo (posición) 5 a partir de x_0 dan

$$x_1 = (1, 2, 3, 1, 1, 2)$$

Las nuevas clases de colores de x_1 son $C_1 = (1, 1, 1)$, $C_2 = (2,2)$ y $C_3 = (3)$ correspondientes a los nodos (1,4,5), (2,6) y (3), respectivamente. Para generar x_2 a partir de x_1, seleccione al azar un color de $c_1 = (1, 2, 3)$ para reemplazar el color de un nodo seleccionado al azar en x_1. Si es necesario, repita el intercambio aleatorio hasta que x_2 se vuelva distinto de x_1.

Luego desarrollamos una medida de desempeño para la solución. Una medida simple requiere la minimización de la cantidad de arcos *malos* (aquellos cuyos dos nodos extremos tienen el mismo color). Puede desarrollarse una medida más compleja como sigue: La solución x_1 es mejor que x_0 desde el punto de vista de reducir la cantidad de clases de colores (es decir, use menos colores al aumentar el tamaño de al menos una clase de color), pero al mismo tiempo aumenta la posibilidad de crear arcos *malos*. Específicamente, x_0 del algoritmo codicioso no tiene arcos malos, y x_1 tiene un arco malo, 4-5. Por lo tanto, una medida empírica del desempeño que balancea las dos situaciones conflictivas, incrementando los tamaños (cardinalidades) de las clases de colores y reduciendo, al mismo tiempo, el número de arcos malos, requiere *maximización*.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k}(|C_j|)^2 - 2\sum_{k=1}^{k}|C_j|.|A_j|$$

donde

k = Cantidad de clases de colores

A_j = Conjunto de arcos malos asociado con la clase de colores j

[La notación $|S|$ representa el número de elementos (cardinalidad) del conjunto S]. En función de x_0 y x_1 del algoritmo codicioso, tenemos

$$f(x_0) = (2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2) - 2(2 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0) = 10$$

$$f(x_1) = (3^2 + 2^2 + 1^2) - 2(3 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 0) = 8$$

Los dos valores muestran que x_1 es peor que x_0 [recordemos que estamos maximizando $f(x)$]. Por consiguiente, de acuerdo con la heurística para RS, aceptamos x_1 si $R < e^{-|f(x_0)-f(x_1)|/T}$.

Observe que la generación de x_{i+1} a partir de x_i puede redundar en una asignación de colores no factible (Este punto no surge en los ejemplos 10.3-3 y 10.3-4 debido a la naturaleza de los problemas asociados). En estos casos, puede aceptarse un movimiento no factible utilizando la condición de probabilidad del RS, pero la mejor solución se actualiza sólo si se encuentra una mejor solución *factible*.

Aplique tres iteraciones de RS adicionales a la red de colorear de la figura 10.5(b) por medio del algoritmo codicioso para determinar la solución de inicio y la medida de desempeño $f(x)$, como antes se explicó.

6. *Programación de cursos conflictivos*. Una versión simplificada de la programación de cursos requiere que se asignen ocho cursos (1,2,…,8) en el mínimo posible de periodos. La tabla 10.13 asigna una "x" a los cursos conflictivos (aquellos que no pueden ser programados en el mismo periodo).

(a) Exprese el problema como una red de colorear mapas (problema 5).

(b) Determine una solución de inicio por medio del algoritmo codicioso.

(c) Aplique tres iteraciones de RS para estimar el mínimo de periodos.

TABLA 10.13 Conflictos en la programación de cursos para el problema 6, conjunto 10.3b

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		x	x	x		x		
2	x				x		x	x
3	x			x		x		
4	x		x		x		x	
5		x		x		x		x
6	x		x		x		x	x
7		x		x		x		x
8		x			x	x	x	

7. Considere la conocida función del camello de seis jorobas:

$$f(x,\ y) = 4x^2 - 2.1x^4 + x^6/3 + xy - 4y^2 + 4y^4, -3 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq 2$$

Los mínimos globales exactos son $(-.08984, .71266)$ y $(.08984, -.71266)$ con $f^* = -1.0316$. Aplique cinco iteraciones de recocido simulado para estimar los mínimos de $f(x, y)$. Inicie con $(x_0, y_0) = (2,1)$, $T_0 = .5f(x_0, y_0)$, $T_i = .5T_{i-1}$ y $t = 3$ iteraciones de aceptación.

10.3.3 Algoritmo genético

El algoritmo genético (AG) imita el proceso de evolución biológica de "sobrevivencia del más apto". Cada solución factible de un problema se considera como un **cromosoma** codificado por un conjunto de **genes**. Los **códigos genéticos** más comunes son el **binario** (0,1) y el **numérico** (0, 1, 2,…,**n**). Por ejemplo, los cromosomas de una sola variable cuyos valores factibles son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 pueden ser representados por los códigos binarios (0000, 1000, 0100, 1100, 0010, 1010, 0110, 1110 y 0001). Los cromosomas para un problema de dos variables (x_1, x_2) con $x_1 = \{0,1\}$ y x_2 $\{0, 1, 2, 3\}$ pueden representarse por medio de los códigos numéricos (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2) y (1,3). Los códigos numéricos de múltiples variables también pueden representarse como códigos binarios. Por ejemplo, el código binario de $(x_1,x_2) = (0,3)$ es (000, 110). Existen otro esquemas de codificación, incluido el **código de nodo** para modelos de red (vea Beasley and Associates, 1993, parte 2).

Un conjunto de N soluciones factibles se conoce como **población** con N cromosomas. La **aptitud** de un cromosoma se mide en términos de una función objetivo apropiada. Un cromosoma más apto da un mejor valor a la función objetivo.

La idea general del AG es seleccionar dos **padres** a partir de una población. Los genes de los dos padres se **cruzan** entonces y (posiblemente) **mutan** (como se explicará en el ejemplo 10.3-5) para producir dos **hijos**. La descendencia reemplaza a los dos cromosomas más débiles (menos aptos) en la población, y el proceso de seleccionar nuevos padres se repite.

La implementación real del AG requiere detalles adicionales del problema-específico. Asimismo, las reglas para seleccionar padres y crear hijos pueden variar. Por ejemplo, los padres pueden ser seleccionados totalmente al azar de una población, o se pueden componer de los dos cromosomas más aptos. Algunos de estos detalles se proporcionarán mas adelante.

Ejemplo 10.3-5 (Minimización de una función de una sola variable)

El AG se aplica al problema discreto de una sola variable de la figura 10.1 con el dominio factible $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Especificaremos arbitrariamente una población de tamaño $N = 4$ padres cuyos cromosomas se determinan a partir de X mediante muestreo aleatorio uniforme.

El número aleatorio R se aplica a la distribución uniforme en la tabla 10.14 para generar los cuatro miembros ($N = 4$) de la población inicial y su aptitud, como se muestra en la tabla 10.15. La solución para $i = 4$ es una repetición de la solución para $i = 3$ ($x_3 = x_4$), de ahí que la solución para $i = 4$ se descarta. La población inicial es $X_0 = (8, 3, 5, 1)$, y la mejor solución asociada es $x^* = 3$ con $F(x^*) = 50$.

Pueden seleccionarse dos padres de la población inicial $X_0 = \{8, 3, 5, 1\}$ de varias maneras: (1) Seleccione los dos miembros más aptos. (2) Seleccione el miembro más apto y luego uno al azar de entre los miembros restantes. (3) Seleccione dos padres al azar a partir de X_0. En esta presentación utilizamos la tercera opción. Específicamente, los dos números aleatorios $R_1 = .2869$ y $R_2 = .0281$ que dan por resultado $x = 3$ con $F(3) = 50$ y $x = 8$ con $F(8) = 70$.

Los dos hijos se crean con los dos padres seleccionados por medio de un **cruce genético**. Hay varios métodos para implementar el cruce.

1. **Cruce uniforme.** En esta regla, los genes comunes se aplican a ambos hijos. Los genes restantes de un hijo se determinan al azar, mientras que el otro hijo obtiene el gen complemento.
2. **Cruce de un punto.** Los genes de los padres P1 y P2 se dividen al azar *en el mismo punto* y luego se intercambian; es decir, P1 = (P11, <u>P12</u>) y P2 = (P21, **P22**) producen los cromosomas hijos como C1 = {P11, **P22**} y C2 = {P21, <u>P12</u>}.
3. **Cruce de múltiples puntos.** Esta regla amplía el cruce de un punto a múltiples puntos aleatorios. Por ejemplo, en un cruce de dos puntos, P1 = (P11, <u>P12</u>, P13) y P2 = (P21, **P22**, P23) producen C1 = (P11, **P22**, P13) y C2 = (P21, <u>P12</u>, P23).

Este ejemplo utiliza la regla de cruce uniforme. En el ejemplo 10.3-6 se utilizará la regla de cruce de un punto.

Para los dos padres (3,8) generados en la tabla 10.15, tenemos

$$P1 = (1\ 1\ \underline{0}\ 0)$$
$$P2 = (0\ 0\ \underline{0}\ 1)$$

TABLA 10.14 Muestreo aleatorio uniforme a partir del dominio $X = \{x\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

x	1	2	3	4	5	6	7	8
Probabilidad acumulativa, $P(x)$	.125	.250	.375	.500	.625	.750	.875	1.

TABLA 10.15 Generación de la población inicial con $N = 4$

i	R_i	x_i	Código binario x_i	$F(x_i)$
1	.9842	8	0001	70
2	.3025	3	1100	50
3	.5839	5	1010	100
4	.5712	5	Se descarta	
5	.0926	1	1000	90

En el cruce uniforme, el tercer gen común (subrayado) en P1 y P2 se transmite a ambos hijos. Los tres genes restantes se determinan al azar como sigue. Para el hijo 1, el gen es 1 si $0 \leq R < .5$ y 0 si $.5 \leq R \leq 1$. Los genes correspondientes para el hijo 2 son los complementos de los asignados al hijo 1. Por ejemplo, los tres números aleatorios .2307, .7346 y .6220 muestran que los genes 1, 2 y 4 para el hijo 1 son 1, 0 y 0, respectivamente, lo que automáticamente asigna los genes complemento 0,1, y 1 al hijo 2. Por lo tanto

$$C1 = (1\,0\,\mathbf{0}\,0)\ (\text{o } x = 1)$$

$$C2 = (0\,1\,\mathbf{0}\,1)\ (\text{o } x = 10)$$

El hijo 2 corresponde a una solución no factible (recordemos que el intervalo factible es $x = (1, 2,\ldots,8)$. Sin embargo, antes de descartar una solución de hijo no factible, primero aplicamos la **mutación** aleatoria (reemplazando un gen con otro) y luego verificamos la descendencia mutada en cuanto factibilidad. Si persiste la no factibilidad, se debe crear en su totalidad una nueva descendencia (a partir de los mismos padres). El proceso puede repetirse cuantas veces sea necesario hasta que se logre la factibilidad.

La probabilidad de mutación suele ser de aproximadamente .1: es decir, un gen muta si $0 \leq R < .1$. Para el hijo 1, la secuencia de números aleatorios .6901, .7698, .0871, .9535 muestra que el tercer gen muta sólo de 0 a 1, lo que produce C1 = (1 0 **1** 0) [o $x = 5$ con $F(5) = 100$]. Para el hijo 2, la secuencia .5954, .2632, .6731, .0983 muta al gen 4 y produce C2 = (0 1 0 **0**) [o $x = 2$ con $F(2) = 60$]. Los cromosomas de ambos hijos son factibles, pero ninguno produce una mejor solución. De ahí que hasta ahora la solución $x^* = 3$ de la población inicial siga siendo la mejor.

Los padres menos aptos en X_0 ($x = 5$ y $x = 1$) ahora son reemplazados con las dos soluciones descendientes ($x = 5$ y $x = 2$). Esto, en realidad, dice que la siguiente población es $X_1 = (8, 3, 5, 2)$. Ahora utilizamos X_1 para iniciar una nueva iteración.

Tratamiento de las variables continuas. La codificación genética en el ejemplo 10.3-5 asume que la variable x es entera. La codificación puede modificarse para incluir variables continuas como sigue. Especifique un intervalo factible finito (de preferencia estrecho) de la forma $l \leq x \leq u$, donde l y u son constantes. Sea v el valor numérico de una cadena binaria s de n bits de longitud. La cadena s se transforma luego en un valor real (continuo) por medio de

$$x = l + (u - l)\left(\frac{v}{2^n - 1}\right)$$

La lógica de la fórmula es que el valor máximo de una cadena binaria de n bits es $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, y $\left(\frac{v}{2^n - 1}\right)$ es la proporción de la cantidad $(u - l)$, la cual cuando se agrega al límite inferior l produce el valor correspondiente de x en el intervalo (l, u). Por ejemplo, dado $-1 \leq x \leq 3$ y eligiendo arbitrariamente $n = 5$, la cadena binaria (0 0 1 0 1) tiene $v = 2^2 + 2^4 = 20$, y el valor asociado de x es

$$x = -1 + [3 - (-1)]\left(\frac{20}{2^5 - 1}\right) = 1.580645$$

El diseño del código indica que los valores grandes de n producen una mejor exactitud.

Las cadenas de n bits que representan v se utilizan de la misma manera que en el ejemplo 10.3-5. Esto significa que los hijos se crean por medio del cruce y mutación de los genes padre. En realidad, una situación de múltiples variables se maneja de una manera similar con cada variable representada por una cadena independiente de n bits.

Ejemplo 10.3-6 (Secuenciación de tareas)

Este problema se resolvió en el ejemplo 10.3-2 por medio de una BT y en el ejemplo 10.3-4 por medio de RS. Aquí, por comodidad, repetimos el enunciado (se agrega una quinta tarea para producir un ejemplo más viable). Las tareas se secuencian en una sola máquina. Cada tarea j tiene un tiempo de procesamiento t_j y una fecha límite d_j. Si la tarea j se completa antes de la fecha límite, se incurre en un costo de retención h_j por unidad de tiempo. Una tarea retardada j da por resultado un costo de penalización p_j por unidad de tiempo. La tabla 10.16 proporciona los datos para un problema de programación de 5 tareas.
Defina

s_k = Secuencias de las tareas utilizada en la iteración k
$N(s_k)$ = Secuencias de cercanías de s_k
z_k = Costo total (retención + penalización) de la secuencia s_k
s^* = Mejor secuencia disponible durante la búsqueda
z^* = Costo total asociado con s^*

La primera tarea es desarrollar el código genético de los cromosomas. Aunque en el problema de secuenciación de tareas puede usarse la codificación binaria (vea, por ejemplo, Yamada y Nakano, 1997), el algoritmo resultante es complejo porque las operaciones de cruce y mutación pueden dar por resultado programas no factibles que deben ser "reparados". Por lo tanto, en lugar de utilizar un código binario, la naturaleza del problema permite representar un cromosoma como una secuencia de tareas (a saber, 1-2-5-3-4).

Para demostrar cómo se crean los hijos, considere los cromosomas padres P1 = 1-3-5-2-4 y P2 = 5-4-2-3-1. Suponga que ocurre un cruce de un punto aleatorio en el tercer gen. Los dos primeros genes de C1(C2) se construyen intercambiando los dos primeros genes de P1(P2). Los últimos tres genes son los que permanecen a partir de P1(P2) después de excluir a los primeros dos genes, es decir

Primeros 2 genes de C1 = {5,4}
Primeros 2 genes de C2 = {1,3}
Últimos 3 genes de C1 = $\{1, 3, 5, 2, 4\} - \{5,4\} = \{1, 3, 2\}$
Últimos 3 genes de C2 = $\{5, 4, 2, 3, 1\} - \{1, 3\} = \{5, 4, 2\}$

Por lo tanto, C1 = 5-4-1-3-2 y C2 = 1-3-5-4-2.

A continuación, las mutaciones de C1 y C2 se transmiten de la siguiente manera. Si R < 1, un cromosoma hijo se somete a mutación. La mutación se implementa entonces para el hijo intercambiando dos genes seleccionados al azar (tareas). Por ejemplo, los números aleatorios $R = .8452$ ($>.1$) y $R = .0342$ ($< .1$) aplicados a C1 y C2, respectivamente, indican que sólo muta C2. Utilizando $R = .1924$ y $R = .8299$ para determinar los genes intercambiados en C2, el primer

TABLA 10.16 Datos para el problema de secuenciación de 5 tareas en una sola máquina

Tarea, j	Tiempo de procesamiento en días, T_j	Fecha límite, d_j	Costo de retención por día, h_j	Costo de penalización por día, p_j
1	10	15	\$3	\$10
2	8	20	2	22
3	6	10	5	10
4	7	30	4	8
5	4	12	6	15

TABLA 10.17 Iteraciones del AG aplicadas al problema de secuenciación de tareas del ejemplo 10.3-6

Iteración		Secuencia, s	z	Explicación
0	P1	1-2-3-4-5	512	-Población inicial aleatoria (P1,P2,P3,P4).
	P2	2-3-4-1-5	605	-Los padres seleccionados con P4 (mejor z) y P3 (al azar).
	P3	4-1-5-2-3	695	-El cruce de P3 y P4 se inicia en la posición 3.
	P4	3-2-1-4-5	475	
	C1	3-**2**-4-1-**5**	573	-C1 muta al intercambiar las posiciones 2 y 5.
	C2	**4**-1-3-2-**5**	829	-C2 muta al intercambiar las posiciones 1 y 5.
	mC1	3-5-4-1-2	534	
	mC2	5-1-3-2-4	367	
1	**P1**	1-2-3-4-5	512	-Los peores padres P2 y P3 en la iteración 0 son
	P2	3-5-4-1-2	534	reemplazados por sus mC1 y mC2.
	P3	5-1-3-2-4	367	-Los padres seleccionados son P3 (mejor z) y P1 (al azar).
	P4	3-2-1-4-5	475	-El cruce de P1 y P3 se inicia en la posición 4.
	C1	5-**1**-**3**-2-4	367	-C1 muta al intercambiar las posiciones 2 y 3.
	C2	1-**2**-3-**5**-4	439	-C2 muta al intercambiar las posiciones 2 y 4.
	mC1	5-3-1-2-4	314	
	mC2	1-5-3-2-4	361	
2	**P1**	5-3-1-2-4	314	-Los peores padres P1 y P2 en la iteración 1 son
	P2	1-5-3-2-4	361	reemplazados por sus mC1 y mC2.
	P3	5-1-3-2-4	367	-Los padres seleccionados son P1 (mejor z) y P4 (al azar).
	P4	3-2-1-4-5	475	-El cruce de P1 y P4 se inicia en la posición 3.
	C1	**3**-**2**-5-1-4	292	-C1 muta al intercambiar las posiciones 1 y 2.
	C2	5-3-2-1-4	222	-Ninguna mutación en C2.
	mC1	2-3-5-1-4	324	
	mC2	5-3-2-1-4	222	
3	P1	5-3-1-2-4	314	-Los peores padres P3 y P4 en la iteración 2 son
	P2	1-5-3-2-4	361	reemplazados por su mC1 y mC2.
	P3	2-3-5-1-4	324	-Los padres seleccionados son P4 (mejor z) y P2 (al azar).
	P4	5-3-2-1-4	222	-El cruce de P2 y P4 se inicia en la posición 3.
	C1	5-3-1-2-4	314	-Ninguna mutación.
	C2	1-5-3-2-4	361	-Ninguna mutación.

número aleatorio selecciona la posición 1 (tarea 1), y el segundo número aleatorio selecciona la posición 5 (tarea 2). Por lo tanto C2 muta de 1-3-5-4-2 a 2-3-5-4-1.

La tabla 10.17 resume los cálculos de las iteraciones 0 a 3. Por comodidad, los cálculos de los costos (valores de z) se automatizan por medio de la hoja de cálculo *excelJobSequencing.xls*. La mejor secuencia está asociada con P4 en la iteración 3.

Resumen del algoritmo genético

Paso 0:

(a) Genere una población aleatoria X de N cromosomas factibles.

(b) Para cada cromosoma s en la población seleccionada, evalúe su aptitud asociada. Registre s^* como la mejor solución disponible hasta ahora.

(c) Codifique cada cromosoma mediante una representación binaria o numérica.

Paso 1:

(a) Seleccione dos cromosomas padres de la población X.

(b) Cruce los genes padre para crear dos hijos.

(c) Mute los genes hijo al azar.

(d) Si las soluciones resultantes son no factibles, repita el paso 1 hasta lograr la factibilidad. Si no, reemplace los dos padres más débiles con los nuevos hijos para formar una nueva población X y actualice s^*. Vaya al paso 2.

Paso 2: Si se llega a una condición de terminación, deténgase: s^* es la mejor solución disponible. De lo contrario, repita el paso 1.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.3C

1. Suponga que se utiliza el AG para determinar el máximo de $F(x), x = 0, 1,\ldots,300$. Que $x = 171$ y $x = 220$ representen a los padres P1 y P2.

(a) Represente P1 y P2 como códigos binarios.

(b) Utilice el cruce uniforme para crear C1 y C2.

(c) Cree C1 y C2 por medio de un cruce de un punto.

(d) Cree C1 y C2 utilizando un cruce de dos puntos.

(e) En la parte (b), use números aleatorios para mutar C1 y C2.

2. Realice dos iteraciones adicionales del ejemplo 10.3-5.

3. Realice una iteración adicional del ejemplo 10.3-6.

***4.** Posee una baraja de diez cartas numeradas del 1 al 10. Tiene que dividir las diez cartas en dos pilas de modo que la *suma* de las cartas de la pila 1 sea 36 y el *producto* de las cartas de la pila 2 sea 36. Desarrolle un AG para el problema utilizando una población inicial de 4 padres, un cruce de 1 punto y una tasa de mutación de 1%. Realice 5 iteraciones.

5. Tiene un pedazo de alambre cuya longitud es $L = 107.1$ pulgadas y le gustaría darle una forma de marco rectangular. Use el AG para determinar el ancho y la altura que dará por resultado el área máxima del rectángulo.

6. Repita el problema 5 suponiendo que el alambre se utiliza para formar una caja de volumen máximo.

7. Considere el siguiente problema

$$\text{Maximizar } f(x, y) = x\,\text{sen}(4x) + 1.1\text{sen}(2y),\ x = 0, 1, 2, \ldots, 10,\ y = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

Realice cinco iteraciones de AG para estimar la solución óptima.

8. En el juego de ajedrez, las reinas se mueven horizontal, verticalmente a lo largo de trayectorias diagonales (45º). Tenemos que colocar N reinas en un tablero ($N \times N$) de modo que ninguna reina pueda "tomar" a otra reina. Diseñe un AG para el problema iniciando con una población aleatoria de 4 padres y utilizando un cruce de un punto. Una medida razonable de la efectividad es el número de reinas en conflicto. Realice tres iteraciones.

10.4 APLICACIÓN DE METAHEURÍSTICA A PROGRAMAS LINEALES ENTEROS

Esta sección muestra cómo se aplica la metaheurística desarrollada en la sección 10.3 a los siguientes PLE generales.

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(\leq, \geq, \text{o} =)\ b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$L_j \leq x_j \leq U_j,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_j \text{ entera},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Los elementos básicos de una metaheurística de PLE incluyen la selección de la solución de inicio, la definición de la vecindad y la determinación del siguiente movimiento de búsqueda.

1. **Selección de la solución de inicio.** La metaheurística utiliza la solución óptima continua *redondeada* como solución de inicio.
2. **Definición de las vecindades.** Es más manejable computacionalmente buscar las variables *una a la vez* definiendo las vecindades para la variable x_j como

$$N(x_j) = \{(x_1, \ldots x_j - 1, \ldots, x_n),\ (x_1, \ldots, x_j + 1, \ldots, x_n)\}$$

Por ejemplo, suponga que la solución actual en un problema de 5 variables es (8, 6, 4, 0, 2), y suponga que x_3 es objetivo de cambio. Entonces

$$N(x_3) = \{(8, 6, \mathbf{3}, 0, 2),\ (8, 6, \mathbf{5}, 0, 2)\}$$

Las soluciones no factibles que violan las cotas superior e inferior se excluyen de la vecindad. Por ejemplo, si x_4 está diseñada para que cambie y $0 \leq x_4 \leq \infty$, entonces $N(x_4) = \{(8, 6, 4, -\mathbf{1}, 2), (8,6, 4, \mathbf{1}, 2)\}$ porque $x_4 = 1$ es no factible.

3. **Determinación del siguiente movimiento de búsqueda.** El siguiente movimiento de búsqueda se determina a partir de una vecindad como la solución $\mathbf{X} = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ con no factibilidad mínima.[5] La *medida de no factibilidad* se calcula como

$$I_{\mathbf{X}} = \sum_{(\leq)} \text{máx}\,\{0, \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\} + \sum_{(\geq)} \text{máx}\,\{0, b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\}$$

$$+ \sum_{(=)} \text{máx}\,\{0, |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i|\} + \sum_{j=1}^{n}(\text{máx}\,\{0, L_j - x_j\} + \text{máx}\,\{0, x_j - U_j\})$$

Si $I_{\mathbf{X}} = 0$, entonces el siguiente movimiento de búsqueda es factible.

El resto de la sección detalla el desarrollo de la BT, el RS y el AG para PLE.[6] Las ideas pueden aplicarse a cualquier PLE y, de hecho, puede ampliarse a programas no lineales.

[5]La metaheurística más compleja incluye técnicas para restaurar la factibilidad o utilizar funciones lagrangianas para penalizar la violación de la factibilidad (vea, por ejemplo, Abramson y Randall, 1999).
[6]Se recomienda repasar la sección 10.3 antes de proceder con este material.

10.4.1 Algoritmo tabú aplicado a una PLE

La figura 10.6 presenta los pasos algorítmicos de la BT aplicados a una PLE de n variables. Utiliza las siguientes definiciones:

$\mathbf{X} = (x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$
L_j = Cota inferior en x_j (preestablecida = 0)
U_j = Cota superior en x_j (preestablecida = ∞)
$N(x_j) = \{(x_1,\ldots,x_j - 1,\ldots,x_n), (x_1,\ldots,x_j + 1,\ldots x_n)\}$
$\mathbf{X}_j^t(k)$ = Solución $\mathbf{X}$ en la cual x_j es reemplazada con $x_j + k$ ($k = \pm 1$) en la iteración t
$I_j^t(k)$ = Medida de no factibilidad de la solución $\mathbf{X}_j^t(k)$
$z_j^t(k)$ = Valor objetivo asociado con $\mathbf{X}_j^t(k)$
$\mathbf{X}^*$ = Mejor solución factible encontrada durante la búsqueda
z^* = Valor objetivo asociado con $\mathbf{X}^*$

FIGURA 10.6
Metaheurística tabú aplicada a una PLE.

1. **Set X** = solución redondeada de programación lineal y establecer $z^* = -\infty$ (caso de maximización)
2. **Iteración for** $t = 1$ a N
3. **Set** $I^* = \infty$, $j^* = 0$, y $k^* = 0$, $\mathbf{X}_{temp} = \mathbf{X}$
4. **For** $j = 1$ a n
5. **If** x_j alcanza su límite de permanencia, luego eliminar j desde la lista tabú
6. **For** $k = -1$ a 1 paso 2
7. **if** $x_j + k < L_j$ o $x_j + k > U_j$ **then next** k
8. **Set** $\mathbf{X} = \mathbf{X}_{temp}$
9. **Determinar** no factibilidad $I_j^t(k)$ para $\mathbf{X}_j^t(k) = (x_1,\ldots, x_j + k,\ldots, x_n)$
10. **If** $I_j^t(k) = 0$ **then**
11. **If** $z_j^t(k) > z^*$ **then**
12. **set** $j^* = j$, $k^* = k$, y $z^* = z_j^t(k)$
13. **Else: if** j es tabú **then next** j
14. **Else** $j^* = j$ y $k^* = k$
15. **Else: If** j es tabú then **next** j
16. **Else: If** $I_j^t(k) < I^*$ **then** set $I^* = I_j^t(k)$, $j^* = j$, y $k^* = k$
17. **next** k
18. **next** j
19. **If** $j^* > 0$, **then** establecer $\mathbf{X} = (x_1,\ldots, x_{j^*} + k^*,\ldots, x_n)$ y colocar j^* en la lista tabú.
20. **Else:** Vaciar la lista tabú (todas las variables son tabú o todos los vecinos no mejoran a z)
21. **Next** t

$I^* = \text{mín}\,\{I_j^t(k), j = 1, 2, \ldots, n; k = -1, 1\}$ encontrada en la iteración t

j^* = Índice j asociado con I^*

k^* = Valor de k ($= \pm 1$) asociado con I^*

τ = Periodo de permanencia tabú, expresado en número de iteraciones.

La lista tabú se compone de los *índices* de variables tabú.

El algoritmo se inicia estableciendo **X** igual a la solución de PL óptima redondeada (instrucción 1). En la iteración t, se permite que una variable tabú defina (de acuerdo con el criterio de aspiración) el siguiente movimiento de búsqueda si da por resultado una solución factible mejorada (instrucciones 11 y 12). En caso contrario, se excluye una variable tabú (instrucción 13).

En la iteración t, la búsqueda calcula la medida de no factibilidad asociada $I_j^t(k)$ y el valor objetivo $z_j^t(k)$ para todas las j y k. El algoritmo sigue la pista al candidato para el siguiente movimiento al actualizar los índices j^* y k^* (instrucción 14). Una mejor solución factible define automáticamente el siguiente movimiento (instrucciones 10, 11 y 12). De lo contrario, se selecciona el movimiento no tabú con la mínima medida de no factibilidad (≥ 0) (instrucción 16). Si $j^* = 0$, todas las soluciones vecinas son tabú y la lista se vacía para permitir que la búsqueda continúe (instrucción 20).

Ejemplo 10.4-1

Se aplica la BT a la siguiente PLE:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &\leq 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &\leq 14 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &\leq 9 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ enteros no negativos}$$

La solución continua óptima es $x_1 = 4.625, x_2 = 0, x_3 = 14.625, x_4 = 14.5$ con $z = 82.125$. Su solución entera óptima (obtenida por medio de TORA) es $x_1 = 5, x_2 = 1, x_3 = 14, x_4 = 14, x_4 = 13$ con $z = 79$. La solución redondeada es $\mathbf{X}_1 = (5, 0, 15, 14)$ o $\mathbf{X}_2 = (5, 0, 15, 15)$. Las medidas de no factibilidad asociadas son $I_{\mathbf{X}_1} = 83$ y $I_{\mathbf{X}_2} = 85$(¡compruébelo!). La solución $\mathbf{X}_1$ tiene una medida de no factibilidad menor. Por consiguiente, se utiliza para iniciar la búsqueda.

La tabla 10.18 da cinco iteraciones utilizando un periodo de permanencia $\tau = 4$ iteraciones. Un índice subrayado identifica una variable tabú. Por ejemplo, $x_2 = 1$ permanece en la lista durante las iteraciones 1, 2, 3 y 4. La búsqueda encuentra la primera solución factible en la iteración 3 (la que resulta ser la mejor solución en las 5 iteraciones). En la iteración 4, *todas* las variables son tabú, y ninguna solución vecina conduce a una mejor solución. Por lo tanto, la lista tabú se vacía en la iteración 5 (y retiene la misma solución de la iteración 4, sin etiqueta de tabú) para permitir que la búsqueda continúe. En problemas grandes típicos, es improbable que todas las variables aparezcan en la lista tabú al mismo tiempo.

TABLA 10.18 Búsqueda tabú del ejemplo de PLE con periodo de permanencia $\tau = 4$

Iteración	x_1	x_2	x_3	x_4	I^*	z	j^*	k^*
Inicio de la búsqueda	4.625	0	14.625	14.5		82.125		
óptima de PL	5	0	15	14	2	83		
1	5	<u>1</u>	15	14	1	84	2	1
2	5	<u>1</u>	15	<u>13</u>	2	82	4	–1
(mejores) 3	5	<u>1</u>	<u>14</u>	<u>13</u>	0	79	3	–1
(todos tabú) 4	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>14</u>	<u>13</u>	1	77	1	–1
5	4	1	14	13	1	77	1	–1

Momento de Excel

La figura 10.7 proporciona el diseño de una hoja de cálculo Excel para BT aplicada a una PLE (archivo *excelTabu-IP-Heuristic.xls*). Permite experimentar con problemas pequeños (hasta de 10 variables). La presentación de la hoja de cálculo es básicamente una herramienta de aprendizaje diseñada para reforzar su comprensión de los detalles de los AT. Los algoritmos de BT comerciales incluyen reglas adicionales para resolver problemas muy grandes.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.4A

1. Verifique las entradas en las iteraciones 1, 2 y 3 en la tabla 10.18.

2. Realice 10 iteraciones de BT en cada uno de los siguientes problemas.

(a) Maximizar $z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$
sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 \quad\quad &\leq 5 \\ -x_1 + 6x_2 \quad\quad &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \text{ y entera} \end{aligned}$$

(b) Maximizar $z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$
sujeto a

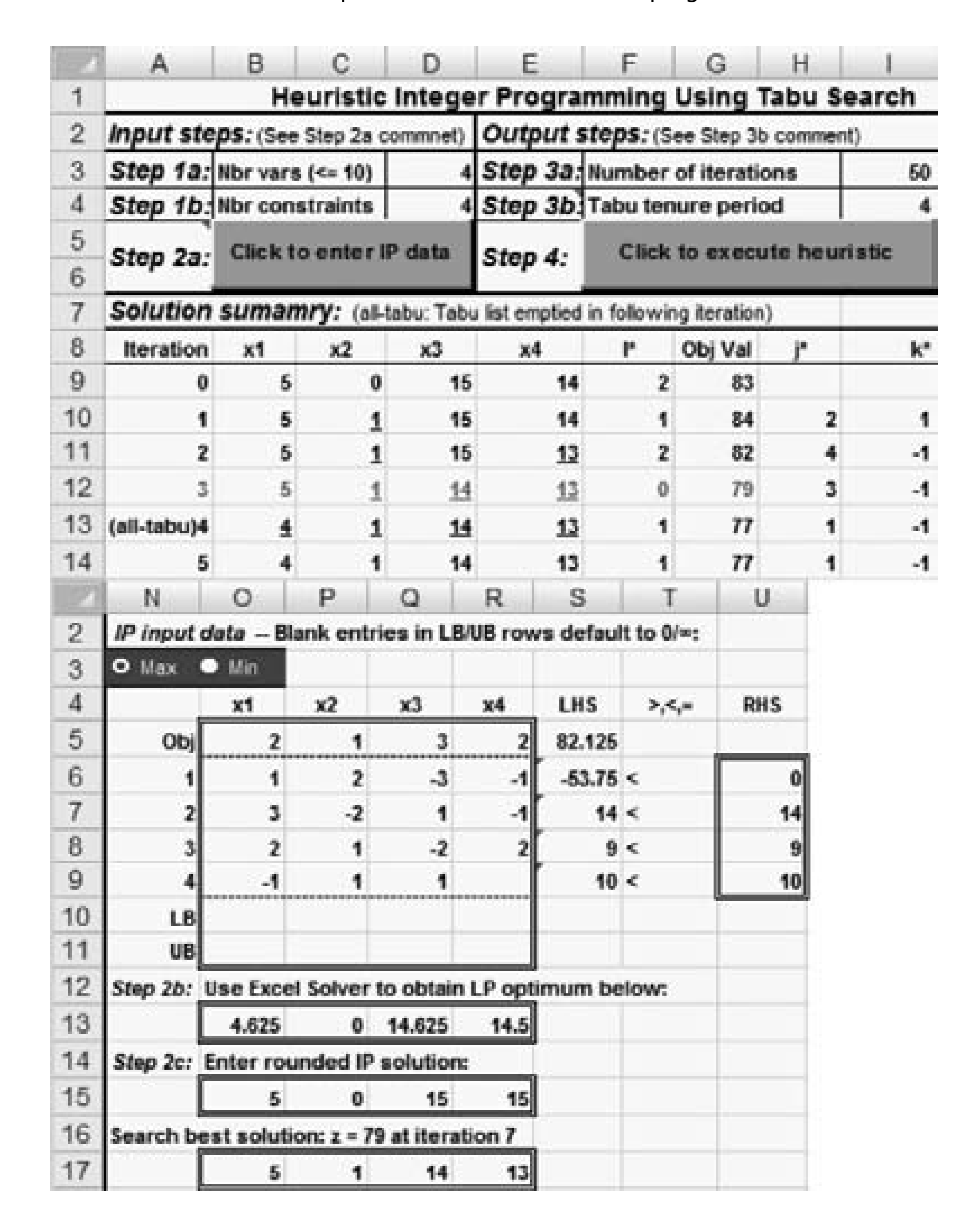
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ 4x_2 - 3x_3 &\leq 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \text{ y entera} \end{aligned}$$

3. *Experimento con Excel*. Use el archivo *excelTabu-IP-heuristic.xls*. para hallar una solución a los siguientes problemas:

(a) Problema de selección de un proyecto del ejemplo 9.1-1.

(b) Problema de cobertura de conjunto del ejemplo 9.1-2

Compare las soluciones heurísticas y exactas.



Heuristic Integer Programming Using Tabu Search

Input steps: (See Step 2a commnet)		Output steps: (See Step 3b comment)	
Step 1a: Nbr vars (<= 10)	4	Step 3a: Number of iterations	50
Step 1b: Nbr constraints	4	Step 3b: Tabu tenure period	4
Step 2a: Click to enter IP data		Step 4: Click to execute heuristic	

Solution sumamry: (all-tabu: Tabu list emptied in following iteration)

Iteration	x1	x2	x3	x4	I*	Obj Val	j*	k*
0	5	0	15	14	2	83		
1	5	1	15	14	1	84	2	1
2	5	1	15	13	2	82	4	-1
3	5	1	14	13	0	79	3	-1
(all-tabu)4	4	1	14	13	1	77	1	-1
5	4	1	14	13	1	77	1	-1

IP input data -- Blank entries in LB/UB rows default to 0/∞:

Max Min

	x1	x2	x3	x4	LHS	>,<,=	RHS
Obj	2	1	3	2	82.125		
1	1	2	-3	-1	-53.75	<	0
2	3	-2	1	-1	14	<	14
3	2	1	-2	2	9	<	9
4	-1	1	1		10	<	10
LB							
UB							

Step 2b: Use Excel Solver to obtain LP optimum below:

4.625	0	14.625	14.5

Step 2c: Enter rounded IP solution:

5	0	15	15

Search best solution: z = 79 at iteration 7

5	1	14	13

FIGURA 10.7

Aplicación de búsqueda tabú a la PLE al inicio de la sección 10.4, realizada con Excel (archivo *excelTabu-IP-Heuristic.xls*)

10.4.2 Algoritmo de recocido simulado aplicado a una PLE

En la sección 10.4.1 que aborda la BT, *todas* las variables se examinan antes de seleccionar el siguiente movimiento de búsqueda. La misma estrategia puede usarse con el RS. Sin embargo, como una variación, adoptaremos una nueva estrategia que requiere examinar una variable *seleccionada al azar* en cada iteración.

Se utilizan las siguientes definiciones al detallar los pasos del algoritmo de RS:

$\mathbf{X} = (x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n)$
L_j = Cota inferior en x_j (preestablecida = 0)
U_j = Cota superior en x_j (preestablecida = ∞)
$N(x_j) = \{(x_1,\ldots,x_j - 1,\ldots,x_n), (x_1,\ldots,x_j + 1,\ldots x_n)\}$
$\mathbf{X}_j^i(k)$ = Solución $\mathbf{X}$ en la cual x_j es reemplazada con
$x_j + k\,(k = \pm 1)$ en la iteración t
$I_j^t(k)$ = Medida de no factibilidad de la solución $\mathbf{X}_j^t(k)$
$z_j^t(k)$ = Valor objetivo asociado con $\mathbf{X}_j^t(k)$
$\mathbf{X}^*$ = Mejor solución factible encontrada durante la búsqueda
z^* = Valor objetivo asociado con $\mathbf{X}(\boldsymbol{k})$
$I^* = \text{mín}\{I_j^t(k), k = -1, 1; j = 1, 2, \ldots, n\}$ encontrada en la iteración t
j^* = Índice j asociado con I^*
k^* = Índice k asociado con I^*
T_0 = Temperatura inicial
r = Relación de reducción de la temperatura aplicada a todas las t iteraciones de aceptación
T_i = Temperatura en el nivel i
$= rT_{i-1}, 0 < r < 1$
a = Contador de la cantidad de iteraciones de aceptación desde la última reducción de temperatura
a^* = Cantidad de iteraciones de aceptación necesarias para activar la reducción de la temperatura
$z_{\text{último}}$ = Valor objetivo de la última solución *aceptada*.
R = (0,1) número aleatorio

La figura 10.8 resume los pasos del algoritmo. Al inicio del algoritmo, $\mathbf{X}$ se establece igual a la solución de la PL redondeada (instrucción 1). En cada iteración se selecciona al azar un índice $j = j^*$ de entre el conjunto de variables $\{1, 2,\ldots,n\}$ (instrucción 4), y la medida de factibilidad $I_j^t(k)$ se determina para las soluciones de vecindad (instrucciones 5 a 8). La factibilidad incluye la verificación de las cotas superior e inferior U_j y L_j.

1. Si la solución $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$ ya se encontró antes (es decir, es redundante), recházela e inicie una nueva iteración (instrucción 9).
2. Si $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$ es no factible, acéptela como el siguiente movimiento (instrucción 10).

1. **Set** $a = 0, i = 0$, **X** = solución de PL redondeada inicial
2. **Set** $l^* = \infty$, y $z_{\text{último}} = -\infty$ (asumir maximización)
3. **For** iteración $t = 1$ a N
4.   **Seleccionar** j al azar en el intervalo $[1, n]$ y establecer $j^* = j$
5.   **For** $k = -1$ a 1 paso 2
6.   **Determinar** $l_{j^*}^t(k)$ para $\mathbf{X}_{j^*}^t(k) = (x_1, \ldots, x_{j^*} + k, \ldots, x_n)$
7.   **If** $l_{j^*}^t(k) < l^*$ **then** $l^* = l_{j^*}^t(k), k^* = k$
8.   **next** k
9.   **If** $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$ es redundante, **then** rechazar el movimiento, **next** t
10.   **If** $l^* > 0$, **then** $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$ es el siguiente movimiento
11.   **Else: If** $z_{j^*}^t(k^*) > = z_{\text{último}}$ **then**
12.   **aceptar** $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$, **set** $z_{\text{último}} = z_{j^*}^t(k^*)$ y $a = a + 1$
13.   **Else: If** $R \leq \exp(-|z_{\text{último}} - z_{j^*}^t(k^*)|/T_i)$ **then**
14.   **aceptar** $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$, **set** $z_{\text{último}} = z_{j^*}^t(k^*)$ y $a = a + 1$
15.   **Else** rechazar $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$ e iniciar una nueva iteración
16.   **If** $a = a^*$ **then** $a = 0, i = i + 1, T_i = rT_{i-1}$
17. **Next** t

FIGURA 10.8
Metaheurística de recocido simulado aplicada a una PLE

3. Si $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$ no es una solución factible peor, acéptela como el siguiente movimiento (instrucción 12).

4. Si $\mathbf{X}_{j^*}^t(k^*)$ es una solución inferior factible, acéptela como el siguiente movimiento si

$$R \leq \exp\left(\frac{-|z_{\text{último}} - z_{j^*}^t(k^*)|}{T}\right).$$ De lo contrario rechácela (instrucciones 13 a 15).

Antes de iniciar una nueva iteración, la temperatura T se reduce si $a = a^*$ (instrucción 16).

Ejemplo 10.4-2

Utilizamos la PLE definida en el ejemplo 10.4.1 e iniciamos con la solución redondeada ($x_1 = 5$, $x_2 = 0, x_3 = 15, x_4 = 15$) y la temperatura inicial $T_0 = .75 \times$ (valor objetivo óptimo de PL) = .75(82.125) ≈ 62. La reducción de temperatura se activa cada $a^* = 2$ iteraciones de aceptación utilizando una relación de reducción $r = .5$. La tabla 10.19 resume 10 iteraciones. En cada iteración se subraya la variable seleccionada al azar. Por ejemplo, x_1 es la selección aleatoria en la iteración 1 y x_4 en la iteración 2. De acuerdo con las reglas del algoritmo, una solución no factible no redundante se acepta como un movimiento hacia la consecución de la factibilidad. Esto ocurre en las iteraciones 1, 2 y 4. Además, siempre se genera un movimiento a partir del movimiento aceptado o permitido más reciente. Por ejemplo, el movimiento en la iteración 6 se genera a partir del movimiento permitido en la iteración 4 porque se rechaza el movimiento en la iteración 5.

El movimiento en la iteración 3 se acepta porque es la *primera* solución factible encontrada en la búsqueda. Esto establece $z^* = 78$ y $\mathbf{X}^* = (4, 0, 14, 14)$. En la iteración 6, la solución factible

TABLA 10.19 Recocido simulado aplicado a la PLE del ejemplo 10.4-1 con $T_0 = .75$ (valor objeto de la PL), $r = .5$, y $a^* = 2$

Iteración t	x_1	x_2	x_3	x_4	I^*	$z^t_{j^*}(k^*)$	$z_{\text{último}}$	Temp T	$\exp\left(\frac{-\lvert z_{\text{último}} - z^t_{j^*}(k^*)\rvert}{T}\right)$	R	Explicación
Inicio de la búsqueda	5	0	15	15	2	85	$-\infty$	62			Primera solución de prueba no factible
1	4	0	15	15	3	83	$-\infty$	62			Movimiento no factible: Permitir
2	4	0	15	14	1	81	$-\infty$	62			Movimiento no factible: Permitir
(Mejor)3	4	0	14	14	0	78	$-\infty$	62			Primer movimiento factible: Aceptar
4	4	0	13	14	1	75	78	62			Movimiento no factible: Permitir
5	4	0	14	14	0	78	78	62			Redundante: Rechazar
6	4	0	13	13	0	73	78	62	0.92	0.11	$R <$ P{aceptar}: Aceptar
7	4	1	13	13	0	74	73	31			$z^t_{j^*k^*} > z_{\text{último}}$: Aceptar
8	4	1	13	12	0	72	74	31	0.94	0.93	$R <$ P{aceptar}: Aceptar
9	4	1	12	12	0	69	72	15.5	0.82	0.96	$R >$ P{aceptar}: Rechazar
10	4	0	13	12	0	71	72	15.5	0.94	0.38	$R <$ P{aceptar}: Aceptar

La mejor solución ocurre en la iteración 3

inferior se acepta porque satisface la condición $R < P$ {aceptar}. En la iteración 7, el movimiento factible se acepta porque es una mejora sobre la última solución *aceptada* ($z_{\acute{u}ltima}$) en la iteración 6. Observe que la temperatura se ajusta cada 2 iteraciones de aceptación en las iteraciones 7 y 9.

Momento de Excel

La figura 10.9 muestra una hoja de cálculo Excel para la aplicación del RS a la PLE (archivo *excelSA-IP-Heuristic.xls*). Como en la BT, la aplicación permite experimentar con problemas de tamaño pequeño (número de variables ≤ 10). El usuario puede estudiar el impacto de cambiar los datos en los pasos 2 y 3 en la eficacia del algoritmo. Una de las observaciones inmediatas acerca del comportamiento del algoritmo es que la "frecuencia" de rechazo de las soluciones factibles se incrementa con la cantidad de iteraciones, un comportamiento típico del RS.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.4B

1. Realice 5 iteraciones del ejemplo 10.4-2 suponiendo $c_j = 1$ para todas las j.
2. Realice 5 iteraciones de RS para el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } z = 99x_1 + 90x_2 + 58x_3 + 40x_4 + 79x_5 + 92x_6 + 102x_7 + 74x_8 + 67x_9 + 80x_{10}$$

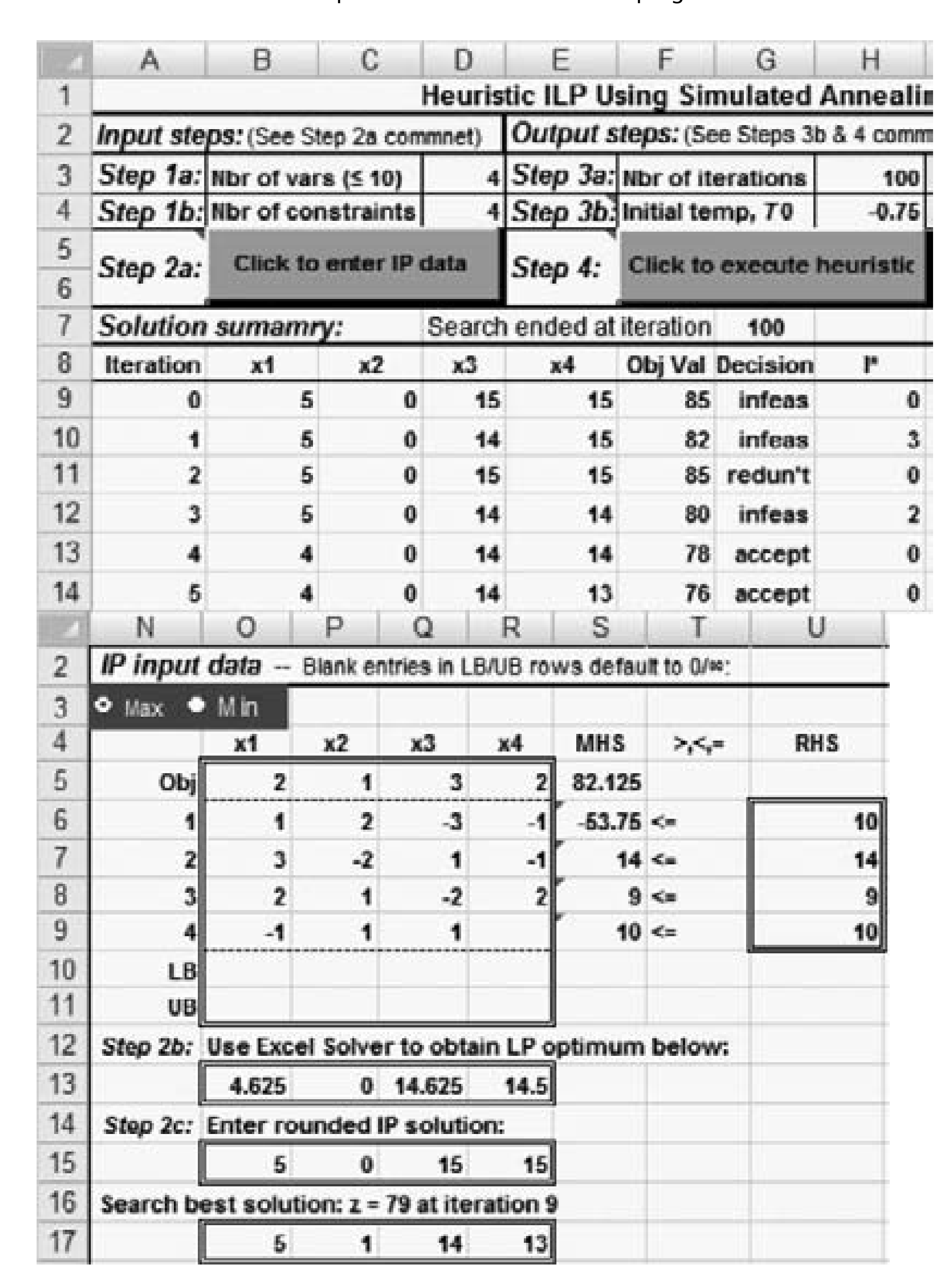
sujeto a

$$30x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 20x_5 + 12x_6 + 25x_7 + 24x_8 + 32x_9 + 29x_{10} \leq 100$$

Todas las variables son binarias

3. *Experimento con Excel*. Utilice el archivo *excels-IP-Heuristic.xls* para hallar una solución a la siguiente PLE:

$$\text{Minimizar } z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$



	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Heuristic ILP Using Simulated Annealin				
2	Input steps: (See Step 2a commnet)				Output steps: (See Steps 3b & 4 comm			
3	Step 1a:	Nbr of vars (≤ 10)		4	Step 3a:	Nbr of iterations		100
4	Step 1b:	Nbr of constraints		4	Step 3b:	Initial temp, T0		-0.75
5	Step 2a:	Click to enter IP data			Step 4:	Click to execute heuristic		
6								
7	Solution sumamry:			Search ended at iteration			100	
8	Iteration	x1	x2	x3	x4	Obj Val	Decision	I*
9	0	5	0	15	15	85	infeas	0
10	1	5	0	14	15	82	infeas	3
11	2	5	0	15	15	85	redun't	0
12	3	5	0	14	14	80	infeas	2
13	4	4	0	14	14	78	accept	0
14	5	4	0	14	13	76	accept	0

	N	O	P	Q	R	S	T	U
2	IP input data -- Blank entries in LB/UB rows default to 0/∞:							
3	○ Max ● Min							
4		x1	x2	x3	x4	MHS	>,<,=	RHS
5	Obj	2	1	3	2	82.125		
6	1	1	2	-3	-1	-53.75	<=	10
7	2	3	-2	1	-1	14	<=	14
8	3	2	1	-2	2	9	<=	9
9	4	-1	1	1		10	<=	10
10	LB							
11	UB							
12	Step 2b:	Use Excel Solver to obtain LP optimum below:						
13		4.625	0	14.625	14.5			
14	Step 2c:	Enter rounded IP solution:						
15		5	0	15	15			
16	Search best solution: z = 79 at iteration 9							
17		5	1	14	13			

FIGURA 10.9

Aplicación Excel de recocido simulado a la PLE del ejemplo 10.4-1 (archivo *excelSA-IP-Heuristic.xls*)

sujeto a

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1 & & & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 & \geq 20 \\
x_1 & + x_2 & & & + x_5 & + x_6 & + x_7 & \geq 12 \\
x_1 & + x_2 & + x_3 & & & + x_6 & + x_7 & \geq 14 \\
x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & & & + x_7 & \geq 17 \\
x_1 & + x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & & & \geq 18 \\
 & x_2 & + x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & & \geq 19 \\
 & & x_3 & + x_4 & + x_5 & + x_6 & + x_7 & \geq 14
\end{array}
$$

Todas las variables son binarias

10.4.3 Algoritmo genético aplicado a la PLE

En la sección 10.2.3, se utiliza codificación binaria en el desarrollo del AG. La misma idea se puede aplicar a la PLE. Por ejemplo, en un problema de 3 variables, la solución $(x_1, x_2, x_3) = (100, 24, 60)$ puede representarse mediante el código binario de la tabla 10.20. Por lo general, el número de bits binarios se ajusta para representar el valor máximo de cualquiera de las variables.

Una forma cómoda de representar las variables de PLE es utilizar una codificación numérica. En este caso, la solución de PLE redondeada en un problema de n variables se representa como $\overline{\mathbf{X}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Los cromosomas de la población inicial pueden generarse al azar a partir del intervalo $(\bar{x}_j - q\bar{x}_j, \bar{x}_j + q\bar{x}_j), 0 < q < 1$. Los límites resultantes del intervalo se ajustan, si las cotas $L_j \leq x_j \leq U_j, j = 1, 2, 3,\ldots, n$ son más estrechas. Una forma cómoda de determinar los genes es muestrear desde el intervalo de búsqueda *continuo* y luego aproximar el resultado a un valor entero.

La tabla 10.21 demuestra la idea de generar una población de tres cromosomas padre comenzando con la solución $(x_1, x_2, x_3) = (100, 1, 60)$ con cotas $0 \leq x_1 \leq 99, 0 \leq$

TABLA 10.20 Codificación binaria de $(x_1,x_2,x_3) = (100,24,60)$

$x_1 = 100$	$x_2 = 24$	$x_3 = 60$
0010011	0001100	0011110

TABLA 10.21 Generación aleatoria de la población inicial de 3 padres comenzando con la solución $(x_1,x_2,x_3) = (100,24,60)$

	x_1	x_2	x_3
Valor inicial	100	8	60
$L_j \leq x_j \leq U_j$	$0 \leq x_1 \leq 99$	$0 \leq x_2 \leq \infty$	$50 \leq x_3 \leq \infty$
$(x_j - qx_j, x_j + qx_j), q = .2$	(80, 120)	(6.4, 9.6)	(48, 72)
Intervalos de búsqueda ajustados	(80, 99)	(6, 10)	(50, 72)
Padre 1	92	7	58
Padre 2	81	9	70
Padre 3	90	8	62

$x_2 \leq \infty, 50 \leq x_3 \leq \infty$, y utilizando $q = 2$. Los genes de cada padre se determinan al azar a partir de los intervalos respectivos (ajustados).

Supongamos que se seleccionan los padres 1 y 2 en la tabla 10.21 para crear los dos hijos basados en un cruce de un punto en x_3. Esto significa que el gen 3 se intercambia entre los padres 1 y 2 para proporcionar los cromosomas hijos como

$$\text{Hijo 1: } (92, 7, \underline{70})$$

$$\text{Hijo 2: } (81, 9, \underline{58})$$

(Es irrelevante cuál cromosoma está diseñado como hijo 1 o hijo 2.)

La mutación se aplica de acuerdo con una probabilidad (pequeña) especificada. Supongamos que el gen 1 del hijo 1 muta a partir del valor original de 92 al nuevo valor aleatorio de 89 seleccionado desde el intervalo de búsqueda (80,99). Por lo tanto, el cromosoma mutado del hijo 1 se transforma en (89, 7, 70).

La figura 10.10 describe los pasos algorítmicos para la aplicación del AG a una PLE de n variables. Se utilizan las siguientes definiciones:

$\mathbf{X} = (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_j, \ldots, \underline{x}_n)$

q = Relación de búsqueda vecina (< 1)

$\mathbf{X}^*$ = Mejor solución factible encontrada durante la búsqueda

z^* = Valor objetivo asociado con $\mathbf{X}^*$

I_i = No factibilidad asociada con el cromosoma i

I^* = Menor no factibilidad asociada con la población actual

i^* = Cromosoma con el mejor valor objetivo o la mínima no factibilidad en la población actual

i^{**} = Cromosoma con la peor no factibilidad en la población actual

i^{***} = Cromosoma con la siguiente peor no factibilidad con respecto a i^{**}

P = Tamaño de la población

c = Cantidad de cruces

p = Probabilidad de mutación

La metaheurística se inicia con una población de P cromosomas (instrucción 3). Luego se examina la población en busca de la mejor solución factible (instrucciones 5 a 8). Si tal solución existe, identifica al padre 1. Si no existe ninguna solución factible, se utiliza el cromosoma con la no factibilidad mínima en lugar de identificar al padre 1 (instrucción 9). Luego se determina el padre 2 al azar de entre los cromosomas restantes (después de excluir el del padre 1) (instrucción 11). El padre 1 y el padre 2 crean al hijo 1 y al hijo 2 (utilizando cruces o algún otro método) con mutación aleatoria (instrucción 12). A continuación, el hijo 1 y el hijo 2 reemplazan a los cromosomas i^{**} e i^{***} que tienen las dos no factibilidades *peores* (instrucciones 13 a 16).

```
Set X = solución de PL redondeada inicial, z* = − ∞ (suponga maximización)
Calcular los intervalos de búsqueda utilizando q
Crear la población inicial de tamaño P al azar utilizando los intervalos de búsqueda
Iteración For i = I a N
    For i = 1 a P
        Determinar la no factibilidad I_i asociada con el cromosoma i
        If I_i = 0 then
            If z_j > z*then establecer I* = 0, z* = z_j y X* = Xi
        Else: If I_j < I* then establecer I* = I_i e i* = i
    Next i
    Set i* como Padre 1 y seleccionar al azar el Padre 2 de entre {1, 2,…, P} − {i*}
    Crear los Hijos 1 y 2 de los padres 1 y 2 utilizando cruces c
    Mutar los genes de los hijos con probabilidad p
    For i = 1 a P
        Determinar la no factibilidad I_i para el cromosoma i
        Identificar i** e i*** con las dos peores no factibilidades
    Next i
    If i*** e i*** tienen no factibilidad cero then
        Set i** e i*** para que correspondan a los dos peores valores objetivo
        Reemplazar i** e i*** con el Hijo 1 y el Hijo 2, respectivamente
Next t
```

FIGURA 10.10

Metaheurística genética aplicada **a** una PLE

Ejemplo 10.4-3

Para la PLE en el ejemplo 10.4-1, la tabla 10.22 proporciona una población inicial de 10 cromosomas generados al azar con la solución de programación lineal redondeada (5, 0, 15, 15).

Los intervalos de búsqueda, basados en $q = .2$ se dan en la parte inferior de la tabla. Los diez cromosomas resultan ser no factibles. Se elige el cromosoma 5 como padre 1 porque tiene la no factibilidad mínima. El cromosoma 2 se selecciona al azar de entre los cromosomas restantes para representar el padre 2. Por lo tanto

$$\text{Padre 1: } (4, 0, 15, 16)$$

$$\text{Padre 2: } (5, 0, 15, 17)$$

Con sólo un cruce ($c = 1$), la partición (seleccionada al azar) ocurre en la variable 4. Por lo tanto, los hijos se crean intercambiando el gen 4 (mostrado en negritas) como:

Hijo 1: (4, 0, 15, **17**)

Hijo 2: (5, 0, 15, **16)**

TABLA 10.22 Población inicial de tamaño $p = 10$ generada a partir de la solución redondeada de PL (5, 0, 15, 15) con $q = 2$, cruce $c = 1$ y probabilidad de mutación de .1

Cromosoma	x_1	x_2	x_3	x_4	I	z
1	4	1	16	15	3	87
(Padre 2) 2	5	0	15	17	5	89
3	6	1	17	12	9	88
4	4	0	12	14	3	72
(Padre 1) 5	4	0	15	16	2	85
6	5	1	12	13	4	73
7	6	0	14	13	6	80
8	6	1	15	12	5	82
9	6	0	15	15	7	87
10	4	0	12	16	7	76
Hijo 1	4	0	15	14	1	81
Hijo 2	5	0	15	16	3	87
Intervalos de búsqueda	(4, 6)	(0, 1)	(12, 18)	(12, 18)		

A continuación aplicamos mutación a cada hijo. La probabilidad de mutación de .1 exige mutar un gen (a un nuevo valor en el intervalo de búsqueda) si $R < .1$. Como se muestra en la tabla, sólo el gen 14 (subrayado) del hijo 1 muta de 17 a 14.

En la siguiente iteración, el hijo 1 y el hijo 2 reemplazan a dos padres en la población actual. El padre 3 tiene la no factibilidad más alta (= 9), de ahí que $i^{**} = 3$. Hay un empate entre los padres 9 y 10 por la siguiente no factibilidad peor. El empate se rompe a favor del cromosoma con el peor valor objetivo (87 para el padre 9 contra 76 para el padre 10), lo cual da $i^{***} = 10$. Por consiguiente, el padre 3 y el padre 10 son reemplazados por el hijo 1 y el hijo 2, respectivamente. La nueva población ya esta lista para una nueva iteración.

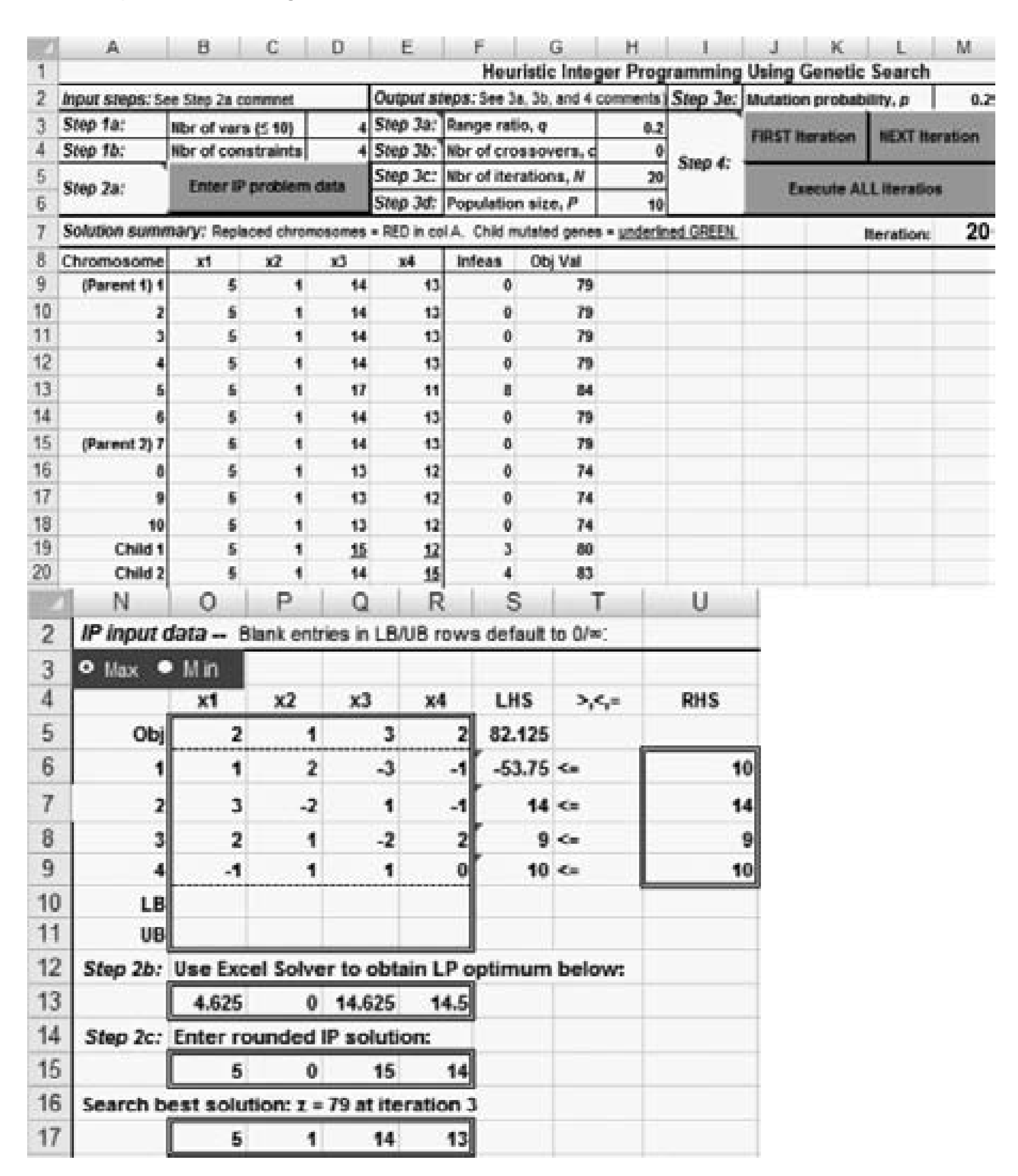
Momento de Excel

La figura 10.11 muestra una implementación Excel del algoritmo genético (archivo *excelGA-IP-Heuristic.xls*). Puede ejecutar las iteraciones una por una o ejecutarlas todas de forma automática. En el primer caso, el botón *FIRST Iteration* inicia los cálculos. Cada clic adicional del botón *Next Iteration* genera una nueva iteración. Este diseño iterativo utiliza códigos de colores para demostrar cómo un cromosoma hijo reemplaza a un cromosoma padre en la siguiente iteración.

Si la cantidad de cruces, c, en la celda H4 se establece igual a cero, las medias aritmética y geométrica de los padres dan los genes de los dos hijos.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.4C

1. Realice la siguiente iteración que sigue de la que se da en la tabla 10.22.
2. Realice dos iteraciones del problema 2, conjunto 10.4b.
3. *Experimento con Excel.* Aplique *excelIPHeuristicGA.xls* al problema 3, conjunto 10.4b.



Heuristic Integer Programming Using Genetic Search

Input steps: See Step 2a commnet			*Output steps:* See 3a, 3b, and 4 comments			*Step 3e:* Mutation probability, *p* 0.2
Step 1a:	Nbr of vars (≤ 10)	4	*Step 3a:*	Range ratio, *q*	0.2	FIRST iteration / NEXT iteration
Step 1b:	Nbr of constraints	4	*Step 3b:*	Nbr of crossovers, *c*	0	*Step 4:*
Step 2a:	Enter IP problem data		*Step 3c:*	Nbr of iterations, *N*	20	Execute ALL iteratios
			Step 3d:	Population size, *P*	10	

Solution summary: Replaced chromosomes = RED in col A. Child mutated genes = underlined GREEN. Iteration: 20

Chromosome	x1	x2	x3	x4	Infeas	Obj Val
(Parent 1) 1	5	1	14	13	0	79
2	5	1	14	13	0	79
3	5	1	14	13	0	79
4	5	1	14	13	0	79
5	5	1	17	11	8	84
6	5	1	14	13	0	79
(Parent 2) 7	5	1	14	13	0	79
8	5	1	13	12	0	74
9	5	1	13	12	0	74
10	5	1	13	12	0	74
Child 1	5	1	15	12	3	80
Child 2	5	1	14	15	4	83

IP input data — Blank entries in LB/UB rows default to 0/∞:

Max / Min

	x1	x2	x3	x4	LHS	>,<,=	RHS
Obj	2	1	3	2	82.125		
1	1	2	-3	-1	-53.75	<=	10
2	3	-2	1	-1	14	<=	14
3	2	1	-2	2	9	<=	9
4	-1	1	1	0	10	<=	10
LB							
UB							

Step 2b: Use Excel Solver to obtain LP optimum below:

4.625	0	14.625	14.5

Step 2c: Enter rounded IP solution:

5	0	15	14

Search best solution: z = 79 at iteration 3

5	1	14	13

FIGURA 10.11

Aplicación Excel de metaheurística genética a la PLE al inicio de la sección 10.4 (archivo *excelGA-IP-Heuristic.xls*)

10.5 INTRODUCCIÓN A LA PROGRAMACIÓN DE RESTRICCIÓN (PR)[7]

Supongamos que deseamos determinar los valores de las variables x, y y z que satisfagan los siguientes requerimientos:

$$x \, \varepsilon \, \{1, 2, \ldots, 8\}$$

$$y \, \varepsilon \, \{1, 2, \ldots, 10\}$$

$$z \, \varepsilon \, \{1, 2, \ldots, 10\}$$

$$x \neq 7, y \neq 2, x - y = 3z$$

Una forma de resolver el problema es enumerar las 800 combinaciones, lo cual es computacionalmente ineficiente. La programación de restricción resuelve el problema produciendo dominios más estrechos para las variables y luego aplicando un árbol de búsqueda "inteligente" para hallar las soluciones factibles.

Las restricciones $x \neq 7$ y $y \neq 2$ reducen los dominios x e y a

$$\text{Dominio de } x\text{: } x \, \varepsilon \, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$\text{Dominio de } y\text{: } y \, \varepsilon \, \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Luego, la restricción $x - y = 3z$ requiere que el valor mínimo de x sea 4, lo cual ocurre cuando $y = z = 1$. El valor máximo de y es 5, que ocurre cuando $x = 8$ y $z = 1$. Luego, máx $(x - y) = 7$, lo cual ocurre cuando $x = 8$ y $y = 1$ y produce máx$(z) = 2$. Esta llamada **propagación de la restricción** produce los siguientes dominios factibles, pero estrechos:

$$x \, \varepsilon \, \{4, 5, 6, 8\}$$

$$y \, \varepsilon \, \{1, 3, 4, 5\}$$

$$z \, \varepsilon \, \{1, 2\}$$

El uso de la propagación de la restricción reduce la cantidad de combinaciones de 800 a 32. Aun cuando el nuevo problema es más computacionalmente manejable, podemos hacerlo mejor con el árbol de búsqueda que se muestra en la figura 10.12. Seleccionaremos z para iniciar la búsqueda porque tiene el dominio más pequeño, lo que da lugar a sólo dos ramas: $z = 1$ y $z = 2$. La rama $z = 1$ implica que $x - y = 3$, lo cual se satisface para $(x = 4, y = 1)$, $(x = 6, y = 3)$, y $(x = 8, y = 5)$, y el resultado son las tres soluciones que aparecen en la figura 10.12. Para $z = 2$, la condición resultante $x - y = 6$ es imposible para satisfacer los dominios dados. Esto completa el árbol de búsqueda. La ventaja computacional en este caso es que sólo tenemos que investigar 4 de las 32 posibles combinaciones.

[7]El material en esta sección está basado en parte en la información presentada en http://www.mozart.oz.org/documentation/fdt/node1.html.

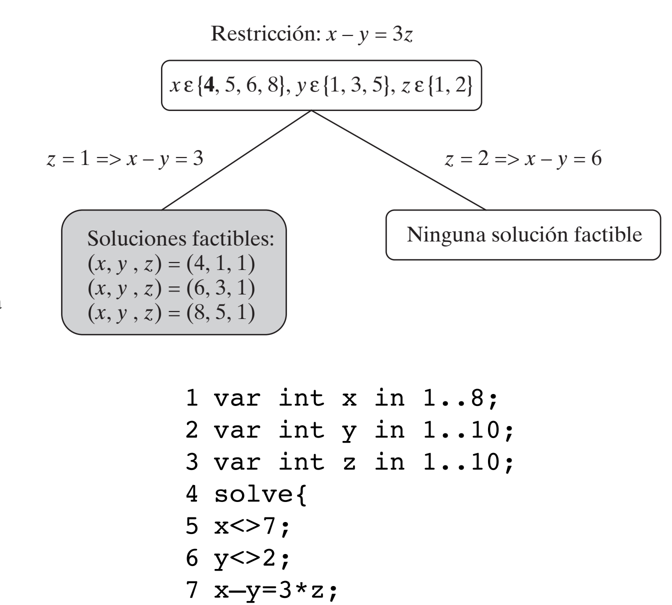


FIGURA 10.12

Construcción del árbol de búsqueda para el ejemplo de PR

```
var int x in 1..8;
var int y in 1..10;
var int z in 1..10;
solve{
x<>7;
y<>2;
x-y=3*z;
};
```

FIGURA 10.13

Código ILOG OPL para el ejemplo de PR

El ejemplo anterior proporciona la esencia de lo que hace la PR. Básicamente es un eficiente proceso de búsqueda basado en la descripción del problema en función de los dominios de las variables y un conjunto de restricciones. Para facilitar la búsqueda, se desarrollaron lenguajes de computadora especiales que permiten restringir los valores de las variables dentro de sus dominios para satisfacer las restricciones. Como una ilustración, la figura 10.13 codifica el problema en ILOG OPL. El código describe de manera directa el problema en función de los dominios de las variables y restricciones. Todas las reducciones de los dominios las realiza de forma automática el procesador de lenguaje utilizando procedimientos inteligentes.

Como el ejemplo lo demuestra, la PR no es una técnica de optimización en el sentido en que se utiliza en la programación matemática. Sin embargo, el hecho de que la PR pueda utilizarse para determinar soluciones factibles puede mejorar la eficiencia de algoritmos de programación matemáticos. En particular, la programación de restricción puede insertarse dentro del algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B) para el problema MIP.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 10.5A

1. Construya el árbol de búsqueda que aparece en la figura 10.12 utilizando la variable x para iniciar la búsqueda.
2. Repita el problema 1 utilizando la variable y.

BIBLIOGRAFÍA

Abramson, D., y M. Randall, "A Simulated Annealing Code for General Integer Linear Program", *Annals of Operations Research,* vol. 86, 1999, págs. 3-21.

Glover, F., "Tabu Search — Part I", *ORSA Journal on Computing,* vol. 1, 1989, págs. 190-206.

Glover, F., "Tabu Search — Part II", *ORSA Journal on Computing,* vol. 2. 1990, págs. 4-32.

Hertz, A., y D. de Werra. "The Tabu Search Metaheuristic: How We Used It", *Annals of Mathemarics and Artificial Intelligence,* vol. 1, 1991, págs. 111-121.

Kirkpatrick, S., C.D. Gelatt Jr., y M.P. Vecchi, "Optimization by Simulated Annealing", *Science*, vol. 220, 1983, págs. 671-680.

Michalewicz, Z., y D.B. Fogel, *How to Solve It: Modern Heuristics*, Springer-Verlag, 2000.

Yamada, T., y R. Nakano, Genetic algorithm for job-shop scheduling problems, *Proceeding of Modern Heuristic for Deccision Support, UNICOM Seminar (marzo 18-19),* Londres, 1997, págs.67-81.

Yamamoto, M., Cámara. G., y Lorena, L., "Tabu Search Heuristic for Point-Feature Cartographic Label Placement", *GeoInformatica*, vol. 6, núm. 1, 2002, págs. 77-90.

CAPÍTULO 11

Problema del agente viajero (TSP*)

Aplicación de la vida real

La Organización de Ciencias y Tecnología del Departamento de la Defensa de Australia emplea un radar de apertura sintética montado en un avión para obtener imágenes de alta resolución de hasta 20 franjas de tierra rectangulares. En sus orígenes, la trayectoria de vuelo para cubrir una secuencia de franjas de tierra se realizaba visualmente por medio de un software de trazado de mapas que se llevaba mucho tiempo y en general era subóptimo. Posteriormente se desarrolló un software basado en TSP para planificar misiones hasta de 20 franjas de tierra. El nuevo software puede planear una misión en menos de 20 segundos, comparado con una hora que requería el proceso visual. Además, la longitud promedio de la misión es 15 por ciento menor que la obtenida manualmente.

Fuente: D. Panton, y A. Elbers, "Misión Planning for Synthetic Aperture Radar Surveillance", *Interfaces*, vol. 29, núm. 2, 1999, págs. 73-88.

11.1 APLICACIONES DE EJEMPLO DE TSP

Clásicamente, el problema de TSP tiene que ver con hallar el recorrido más corto (cerrado) en una situación de n ciudades, donde cada ciudad es visitada exactamente una vez antes de regresar al punto de partida. El modelo TSP asociado se define por medio de dos datos:

1. El número de ciudades, n.
2. Las distancias d_{ij} entre las ciudades i y j ($d_{ij} = \infty$ si las ciudades i y j no están comunicadas).

El máximo de recorridos en una situación de n ciudades es ¡$(n - 1)$!

En realidad, las aplicaciones de TSP van más allá de la definición clásica de visitar ciudades. La *aplicación de la vida real* que se presenta al inicio de este capítulo

*Del inglés: *Traveling Salesperson Problem*.

describe la planificación de misiones de vigilancia por medio de radar de apertura sintética. Esta sección resume otras cinco aplicaciones que muestran cómo puede adaptarse el modelo TSP clásico ("ciudades" conectadas por "rutas") para representar otras situaciones. En el conjunto de problemas 11.2a se dan más aplicaciones.

1. ***Secuenciación de pinturas en una planta de producción.*** Una compañía produce lotes de diferentes pinturas en la misma planta de producción. Cuando se completa una secuencia de colores, se inicia un nuevo ciclo en el mismo orden. La secuenciación de los colores afecta el tiempo de preparación (arreglo) entre lotes sucesivos. La meta es seleccionar la secuencia que minimice el tiempo de preparación total por ciclo.

El modelo TSP en esta situación considera un color de pintura como una ciudad y el tiempo de preparación entre dos colores como una distancia.

2. ***Tarjeta de circuito integrado.*** Se perforan agujeros en tarjetas de circuito idénticas para montar los componentes electrónicos. Las tarjetas se alimentan en secuencia debajo de un taladro móvil. La meta es determinar la secuencia que complete la perforación de todos los agujeros en una tarjeta en el tiempo más corto posible.

En el modelo TSP, los agujeros representan las ciudades, y los desplazamientos entre los agujeros representan las distancias.

3. ***Agrupamiento de proteínas.*** Las proteínas se agrupan utilizando una medida numérica de similitud basada en la interacción de las proteínas. La información del agrupamiento se utiliza para predecir las funciones de proteínas desconocidas. El mejor agrupamiento es el que maximiza la suma de las medidas de similitud entre proteínas adyacentes.

En el modelo TSP cada proteína toma el lugar de una ciudad. La medida de similitud s_{ij} entre la proteína i y la proteína j puede convertirse en una medida de "distancia" teniendo en cuenta que

$$\text{máx}\left\{\sum_{i,j \text{ en el recorrido}} s_{ij}\right\} \equiv \text{mín}\left\{-\sum_{i,j \text{ en el recorrido}} s_{ij}\right\}$$

Las distancias pueden representarse como $-s_{ij}$ o $M - s_{ij}$ donde M es una constante mayor que la s_{ij} máxima, para todas las i y j.

4. ***Obtención de imágenes celestes.*** La agencia espacial de Estados Unidos, NASA, utiliza satélites para obtener imágenes de objetos celestes. La cantidad de combustible necesaria para reposicionar los satélites depende de la secuencia en la cual se toman las imágenes de los objetos. La meta es determinar la secuencia de obtención de imágenes óptima que minimice el consumo de combustible.

En el modelo TSP, un objeto celeste se considera como una ciudad. La distancia se transforma en el consumo de combustible entre dos objetos sucesivos.

5. ***Creación de la Mona Lisa con TSP.*** Esta intrigante aplicación "crea" la *Mona Lisa* de Leonardo da Vinci mediante el trazo de líneas continuas. La idea general es representar de forma aproximada la pintura original por medio de gráficos de computadora para agrupar puntos en una gráfica. Los puntos se conectan luego en secuencia mediante segmentos de línea (vea Bosch y Herman, 2004).

En el modelo TSP, los puntos representan ciudades y sus ubicaciones relativas en la gráfica proporcionan la matriz de distancias.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.1A

Nota: En cada una de las siguientes instancias, describa los datos (ciudades y distancias) necesarios para modelar el problema como TSP.

1. Seers Service Center programa sus visitas diarias de mantenimiento a los clientes. Los trabajos se clasifican y agrupan, y cada grupo se asigna a un técnico en mantenimiento. Al final de la asignación el técnico se reporta al centro de servicio.

2. A un fanático del béisbol le gustaría visitar ochos parques de ligas mayores en (1) Seattle, (2) San Francisco, (3) Los Ángeles, (4) Phoenix, (5) Denver, (6) Dallas, (7) Chicago, y (8) Tampa antes de regresar a casa en Seattle. Cada visita dura aproximadamente una semana. El objetivo es gastar lo menos posible en pasajes aéreos.

***3.** Un turista en la ciudad de Nueva York desea visitar 8 sitios turísticos utilizando el transporte local. El recorrido se inicia y termina en un hotel ubicado en el centro. El turista desea gastar la menor cantidad posible de dinero en el transporte.

4. Un gerente tiene *m* empleados que trabajan en *n* proyectos. Un empleado puede trabajar en más de un proyecto, lo que traslapa las asignaciones. En la actualidad, el gerente se entrevista con cada empleado una vez por semana. Para reducir el tiempo de entrevista con todos los empleados, el gerente desea realizar entrevistas en grupo que impliquen proyectos compartidos. El objetivo es reducir el tráfico (cantidad de empleados) que entren y salgan de la sala de juntas.

5. Meals-on-Wheels es un servicio de caridad que prepara comidas en su cocina central para personas que califican para el servicio. Idealmente, todas las comidas deben ser entregadas en un máximo de 20 minutos después de que salen de la cocina. Esto significa que el tiempo de regreso desde la última ubicación hasta la cocina no es un factor al determinar la secuencia de las entregas.

6. *Secuenciación del DNA*. En ingeniería genética, un conjunto de cadenas de DNA, cada una de una longitud específica, se concatena para formar una cadena universal. Los genes de cadenas de DNA individuales pueden traslaparse. La cantidad de traslapes entre dos cadenas sucesivas es medible en unidades de longitud. La longitud de la cadena universal es la suma de las longitudes de las cadenas individuales menos los traslapes. El objetivo es concatenar las cadenas individuales de una manera que minimice la longitud de la cadena universal.

7. *Vehículo guiado automático*. Un vehículo guiado automático (VGA) realiza un viaje redondo que inicia y termina en el cuarto de correo, para entregar correspondencia a departamentos en el piso de la fábrica. El vehículo guiado automático se desplaza a lo largo de pasillos horizontales y verticales. El objetivo es minimizar la longitud del viaje redondo.

11.2 MODELO TSP MATEMÁTICO

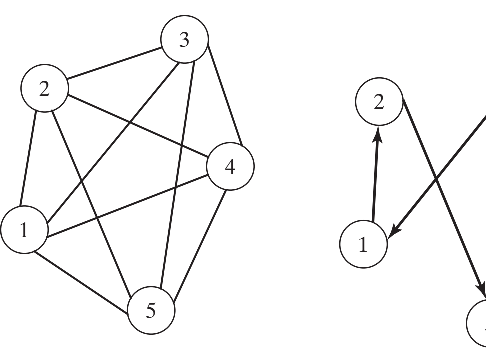
Como se planteó en la sección 11.1, un modelo TSP se define mediante el número de ciudades n y la matriz de distancias $\|d_{ij}\|$. La definición de un recorrido prohíbe conectar una ciudad a sí misma al asignar una penalización muy alta a los elementos diagonales de la matriz de distancias. Un modelo TSP es **simétrico** si $d_{ij} = d_{ji}$ para todas las i y j. De lo contrario, el modelo TSP es **asimétrico**.

Defina

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si se llega a la ciudad } j \text{ desde la ciudad } i \\ 0, \text{ de lo contrario} \end{cases}$$

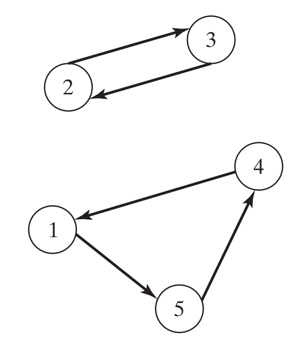
El modelo TSP se da como

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}, d_{ij} = \infty \text{ para todas las } i = j$$



Problema de 5 ciudades

Solución del recorrido
($x_{12} = x_{25} = x_{54} = x_{43} = x_{31} = 1$)



Solución de subrecorrido
($x_{23} = x_{32} = -1$)($x_{15} = x_{54} = x_{41} = 1$)

FIGURA 11.1
Un ejemplo TSP de 5 ciudades con una solución de recorrido o subrecorrido del modelo de asignaciones asociado según la instancia de matriz de distancias específica

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

$$x_{ij} = (0, 1) \qquad (3)$$

La solución forma un viaje redondo por las ciudades (4)

Las restricciones (1), (2) y (3) definen un modelo de asignación regular (sección 5.4) donde $x_{ij} = 1$ si el nodo (ciudad) i está conectado a un nodo (ciudad) j, y cero en caso contrario. Si la solución del modelo de asignaciones resulta ser un recorrido [es decir, satisface la restricción (4)], entonces automáticamente es óptimo para el TSP. Esta es una rara ocurrencia, sin embargo, y es problema que el modelo de asignaciones se componga de **subrecorridos**. En ese caso se requieren cálculos adicionales para determinar la solución de recorrido óptima.

La figura 11.1 muestra un modelo TSP de 5 ciudades. Los nodos representan ciudades, y los arcos representan rutas en dos sentidos que pueden ser distintas si el modelo es asimétrico. Como antes se explicó, el modelo de asignaciones puede producir una solución de recorrido o subrecorrido como lo demuestra la figura.

Ejemplo 11.2-1

El programa de producción diaria en la compañía Rainbow incluye lotes de pintura blanca (W), amarilla (Y), roja (R), y negra (B). Las instalaciones de producción se deben limpiar entre uno y otro lotes. La tabla 11.1 resume en minutos los tiempos de limpieza. El objetivo es determinar la secuencia de los colores que minimice el tiempo de limpieza total.

TABLA 11.1 Tiempos de limpieza entre lotes (en minutos) para el problema de producción de pintura

	Limpieza entre lotes (min)			
Pintura	*Blanca*	*Amarilla*	*Negra*	*Roja*
Blanca	∞	10	17	15
Amarilla	20	∞	19	18
Negra	50	44	∞	22
Roja	45	40	20	∞

En el modelo TSP, cada color representa una "ciudad", y el tiempo de limpieza entre dos colores sucesivos representa "distancia". Sea M una penalización suficientemente grande y defina

$$x_{ij} = 1 \text{ si la pintura } j \text{ sucede a la pintura } i \text{ y cero de lo contrario}$$

El modelo TSP se da como

$$\text{Minimizar } z = 10x_{WY} + 17x_{WB} + 15x_{WR} + 20x_{YW} + 19x_{YB} + 18x_{YR} + 50x_{BW} + 44x_{BY} + 22x_{BR} + 45x_{RW} + 40x_{RY} + 20x_{RB} + M(x_{WW} + x_{YY} + x_{BB} + x_{RR})$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
x_{WW} + x_{WY} + x_{WB} + x_{WR} &= 1\\
x_{YW} + x_{YY} + x_{YB} + x_{YR} &= 1\\
x_{BW} + x_{BY} + x_{BB} + x_{BR} &= 1\\
x_{RW} + x_{RY} + x_{RB} + x_{RR} &= 1\\
x_{WW} + x_{YW} + x_{BW} + x_{RW} &= 1\\
x_{WY} + x_{YY} + x_{BY} + x_{RY} &= 1\\
x_{WB} + x_{YB} + x_{BB} + x_{RB} &= 1\\
x_{WR} + x_{YR} + x_{BR} + x_{RR} &= 1\\
x_{ij} = (0, 1) &\text{ para todas las } i \text{ y } j
\end{aligned}$$

La solución es un recorrido (bucle)

El uso de la penalización M en la función objetivo equivale a eliminar x_{WW}, x_{YY}, x_{BB}, y x_{RR} del modelo. Sin embargo, la eliminación de estas variables destruye la estructura del modelo de asignaciones subyacente necesaria para resolver los modelos de TSP y de ramificación y acotamiento.

Solución del modelo TSP. Una forma simple de resolver el modelo de TSP es una enumeración exhaustiva. El máximo de recorridos en un problema de n ciudades es ¡$(n - 1)$!. En este ejemplo la enumeración exhaustiva es factible porque el número de recorridos posibles es pequeño (= 6). La tabla 11.2 muestra y evalúa los seis recorridos e indica que el recorrido $W \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow W$ es óptimo.

La enumeración exhaustiva no es práctica para el modelo TSP general. La sección 11.3 presenta por lo tanto dos algoritmos de programación entera exactos: el de ramificación y acotamiento, y el de plano de corte. Ambos algoritmos tienen su raíz en la solución del modelo de asignaciones, con restricciones agregadas para garantizar una solución de recorrido. Por desgracia, como es típico con la mayoría de los algoritmos de programación entera, los métodos pro-

TABLA 11.2 Solución del problema de secuenciación de las pinturas mediante enumeración exhaustiva

Bucle de producción	Tiempo de limpieza total
$W \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow W$	10 + 19 + 22 + 45 = **96**
$W \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow W$	10 + 18 + 20 + 50 = 98
$W \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow W$	17 + 44 + 18 + 45 = 124
$W \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow Y \rightarrow W$	17 + 22 + 40 + 20 = 99
$W \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow Y \rightarrow W$	15 + 20 + 44 + 20 = 99
$W \rightarrow R \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow W$	15 + 40 + 19 + 50 = 124

puestos no son computacionalmente confiables. Por esa razón se utilizan heurísticas para obtener soluciones (pero no necesariamente óptimas) del problema. Tres de estas heurísticas se presentan en la sección 11.4.

Interpretación de la solución óptima. La secuencia de producción óptima $W \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow W$ en la tabla 11.2 se inicia con el color blanco seguido por el amarillo, luego el negro, y luego el rojo. Es realmente irrelevante qué color utilicemos para iniciar el ciclo de producción porque la solución es un *recorrido cerrado*. Por ejemplo, las secuencias $B \rightarrow R \rightarrow W \rightarrow Y \rightarrow B$ y $Y \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow W \rightarrow Y$ también son óptimas.

TSP de recorrido abierto. Los recorridos abiertos ocurren cuando no es necesario regresar a la ciudad de inicio. Este caso puede demostrarse en el problema de las pinturas cuando la producción se limita a exactamente un lote de cada color. Por ejemplo, en la secuencia de recorrido abierto, $B \rightarrow W \rightarrow Y \rightarrow R$, la última "ciudad" ($R$) no conecta de vuelta a la "ciudad" de inicio (B).

Esta condición se puede tener en cuenta en una situación de n ciudades agregando una ciudad ficticia, $n + 1$, con distancias cero hasta y desde todas las ciudades reales; es decir, $d_{i,\,n+1} = 0, i = 1, 2,\ldots,n$ y $d_{n+1,\mathrm{J}} = 0, j = 1, 2,\ldots,n$. Para el ejemplo de las pinturas, la nueva matriz de distancias es

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 15 & 0 \\ 20 & \infty & 19 & 18 & 0 \\ 50 & 44 & \infty & 22 & 0 \\ 45 & 40 & 20 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

La fila 5 y la columna 5 representan el color ficticio.

El recorrido óptimo es

$$W \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow \text{Ficticio} \rightarrow W, \text{longitud} = 48 \text{ minutos}$$

La solución puede leerse reacomodando los puntos de inicio y terminación del recorrido con el color ficticio:

$$\text{Ficticio} \rightarrow W \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow B \rightarrow \text{Ficticio}$$

Si eliminamos el color ficticio, obtenemos la siguiente solución de recorrido abierto:

$$W \rightarrow Y \rightarrow R \rightarrow B$$

Es importante observar que la solución óptima de recorrido abierto no puede obtenerse a partir de la solución de recorrido cerrado óptima ($W \rightarrow Y \rightarrow B \rightarrow R \rightarrow W$) de forma directa.

Cota inferior en la longitud de recorrido óptima. Una cota inferior en la longitud del recorrido óptima puede ser útil al resolver el modelo TSP o con los algoritmos exactos o con los algoritmos heurísticos. En el caso de los algoritmos exactos, una cota inferior estrecha restringe el espacio factible, y por consiguiente hace más eficiente el algoritmo (particularmente en el caso del algoritmo de ramificación y acotamiento). Para los heurísticos puede usarse una cota inferior para evaluar la calidad de la solución heurística.

Hay varios métodos para estimar una cota inferior. Dos de ellos son los siguientes:

1. ***Modelo de asignación.*** El modelo de asignación es una simplificación del modelo TSP, y su solución óptima proporciona una cota inferior en la longitud de recorrido óptima. En realidad, si la solución óptima del modelo de asignaciones es factible (es decir, un recorrido), también es óptima para el modelo TSP.

   La solución del modelo de asignación (recorrido cerrado) del problema de las pinturas produce una cota inferior de 72 minutos.

2. ***Programación lineal.*** Una cota inferior en una situación de n ciudades puede determinarse inscribiendo los *círculos más grandes no traslapantes* alrededor de todas las ciudades. Sea $r_j, j = 1, 2,\ldots,n$ el radio más grande de un círculo inscrito alrededor de la ciudad j. El valor óptimo de la siguiente programación lineal proporciona una cota inferior:

$$\text{Maximizar } z = 2(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$$

sujeto a

$$r_i + r_j \leq \min(d_{ij}, d_{ji})\ i, j = 1, 2, \ldots, n, i < j$$

La función objetivo reconoce que un agente viajero que entra al círculo alrededor de la ciudad i debe cubrir una distancia de al menos $2r_i$ antes de entrar al dominio del círculo de cualquier otra ciudad en la red. Las restricciones garantizan que ninguno de los círculos se traslape.

Para el ejemplo de las pinturas, tenemos

$$\text{Maximizar } z = 2(r_W + r_Y + r_B + r_R)$$

sujeto a

$$r_W + r_Y \leq \min(10, 20)$$
$$r_W + r_B \leq \min(17, 50)$$
$$r_W + r_R \leq \min(15, 45)$$
$$r_Y + r_B \leq \min(19, 44)$$
$$r_Y + r_R \leq \min(18, 40)$$
$$r_B + r_R \leq \min(22, 20)$$
$$r_W, r_Y, r_B, r_R \geq 0$$

La solución produce una cota inferior de 60 minutos, la cual no es tan ajustada al obtenido con el modelo de asignación (= 72 minutos) En realidad, la experimentación con los métodos sugiere que el modelo de asignación produce de manera consistente cotas inferiores más estrechas, en particular cuando el modelo TSP es asimétrico. Observe que la programación lineal siempre proporciona una cota inferior de valor cero trivial para un TSP de recorrido abierto debido a que las distancias de entrada y salida de la ciudad ficticia limitan todos los radios a cero.

Momento de AMPL

Los modelos de asignación y programación lineal previamente dados para estimar la cota inferior pueden resolverse con los archivos AMPL proporcionados con este capítulo.

`model amplAssign.txt; data amplInputData.txt; commands solutionAssign.txt;`
`model amplLP.txt; data amplInputData.txt; commands solutionLP.txt;` File `amplInputData.txt` proporciona los datos TSP del problema de las pinturas.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.2A

*1. Un vendedor de libros que vive en Basin debe visitar una vez al mes a cuatro clientes localizados en Wald, Bon, Mena y Kiln antes de regresar a su casa en Basin. La siguiente tabla muestra las distancias en millas entre las diferentes ciudades.

	Millas entre ciudades				
	Basin	Wald	Bon	Mena	Kiln
Basin	0	120	220	150	210
Wald	120	0	80	110	130
Bon	220	80	0	160	185
Mena	150	110	160	0	190
Kiln	210	130	185	190	0

El objetivo es minimizar la distancia total recorrida por el vendedor.

(a) Escriba la programación lineal para calcular una cota inferior en la longitud de recorrido óptima.

(b) Compare las cotas inferiores en la longitud de recorrido óptima tanto con un modelo de asignación como con una programación lineal. ¿Es óptima la solución del modelo de asignación para el TSP?

2. Seers Service Center programa sus visitas diarias de mantenimiento a sus clientes. La matriz $\|T_{ij}\|$ siguiente presenta el tiempo de recorrido (en minutos) entre el centro de servicio (fila 1 y columna 1) y las siete órdenes de mantenimiento. Las órdenes se asignan a uno de los técnicos en mantenimiento durante un turno de 8 horas. Al final del día, el técnico regresa al centro de servicio para completar la documentación.

$$\|T_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 19 & 24 & 14 & 21 & 11 \\ 20 & 0 & 18 & 22 & 23 & 22 & 9 & 10 \\ 15 & 18 & 0 & 11 & 21 & 14 & 32 & 12 \\ 19 & 22 & 11 & 0 & 20 & 27 & 18 & 15 \\ 24 & 23 & 21 & 20 & 0 & 14 & 25 & 20 \\ 14 & 22 & 14 & 27 & 14 & 0 & 26 & 17 \\ 21 & 9 & 32 & 18 & 25 & 26 & 0 & 20 \\ 11 & 10 & 12 & 15 & 20 & 17 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Compare las cotas inferiores en la longitud de recorrido óptima utilizando tanto el modelo de asignación como la programación lineal. ¿Es óptima la solución del modelo de asignación para el TSP?

(b) Dado que el desplazamiento entre los clientes no es productivo, y suponiendo una pausa para el almuerzo de una hora, determine la productividad máxima del técnico durante el día.

3. Un fanático del béisbol desea visitar ocho parques de ligas mayores en (1) Seattle, (2) San Francisco, (3) Los Ángeles, (4) Phoenix, (5) Denver, (6) Dallas, (7) Chicago, y (8) Tampa antes de regresar a casa a Seattle. El fanático utilizará transportación aérea entre las diferentes ciudades. La matriz $\|p_{ij}\|$ siguiente proporciona el precio en dólares de un boleto de viaje sencillo entre las 8 ciudades.

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 250 & 300 & 290 & 240 & 320 & 380 & 450 \\ 250 & 0 & 190 & 220 & 230 & 300 & 310 & 390 \\ 300 & 190 & 0 & 140 & 310 & 295 & 390 & 410 \\ 290 & 220 & 140 & 0 & 200 & 275 & 285 & 350 \\ 240 & 230 & 310 & 200 & 0 & 240 & 255 & 400 \\ 320 & 300 & 295 & 275 & 240 & 0 & 260 & 370 \\ 380 & 310 & 390 & 285 & 255 & 260 & 0 & 420 \\ 450 & 390 & 410 & 350 & 400 & 370 & 420 & 0 \end{pmatrix}$$

El fanático ha presupuestado $2000 para los viajes aéreos. ¿Es realista este presupuesto de viaje?

4. *Agrupamiento de proteínas*. Las proteínas se agrupan utilizando una medida total de similitud basada en la información de interacción entre las proteínas. La información de agrupamiento se utiliza para predecir las funciones de proteínas desconocidas. Por definición, el mejor agrupamiento maximiza la suma de las medidas de similitud entre proteínas adyacentes. La matriz $\|s_{ij}\|$ siguiente proporciona las medidas de las similitudes (expresadas como un porcentaje) entre las 8 proteínas.

$$\|s_{ij}\| = \begin{pmatrix} 100 & 20 & 30 & 29 & 24 & 22 & 38 & 45 \\ 20 & 100 & 10 & 22 & 0 & 15 & 31 & 0 \\ 30 & 10 & 100 & 14 & 11 & 95 & 30 & 41 \\ 29 & 22 & 14 & 100 & 20 & 27 & 28 & 50 \\ 24 & 0 & 11 & 20 & 100 & 24 & 55 & 0 \\ 22 & 15 & 95 & 27 & 24 & 100 & 26 & 37 \\ 38 & 31 & 30 & 28 & 55 & 26 & 100 & 40 \\ 45 & 0 & 41 & 50 & 0 & 37 & 40 & 100 \end{pmatrix}$$

(a) Defina la matriz de distancias del TSP.

(b) Determine una cota superior en la medida de similitud del agrupamiento de proteínas óptimo.

5. Un turista en la ciudad de Nueva York utiliza el transporte local para visitar 8 sitios. El inicio y la terminación, así como el orden en el cual se visitan los sitios, no son importantes. Lo que es importante es gastar la cantidad mínima de dinero en el transporte. La matriz $\|c_{ij}\|$ siguiente proporciona los pasajes en dólares entre los diferentes lugares.

$$\|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 30 & 25 & 12 & 33 & 44 & 57 \\ 22 & 0 & 19 & 20 & 20 & 29 & 43 & 45 \\ 28 & 19 & 0 & 17 & 38 & 48 & 55 & 60 \\ 25 & 20 & 19 & 0 & 28 & 35 & 40 & 55 \\ 12 & 18 & 34 & 25 & 0 & 21 & 30 & 40 \\ 35 & 25 & 45 & 30 & 20 & 0 & 25 & 39 \\ 47 & 39 & 50 & 35 & 28 & 20 & 0 & 28 \\ 60 & 38 & 54 & 50 & 33 & 40 & 25 & 0 \end{pmatrix}$$

El turista está presupuestando \$120 para el costo del taxi a todos los ochos sitios. ¿Es realista esta expectativa? (*Sugerencia:* Éste es un modelo TSP de recorrido abierto.)

***6.** Un gerente tiene en total 10 empleados que trabajan en seis proyectos. Los proyectos se revisan semanalmente con cada empleado. Un proyecto puede emplear más de un empleado por lo que las asignaciones se traslapan, como se muestra en la siguiente tabla.

	Proyecto 1	2	3	4	5	6
Empleado 1		x		x	x	
2	x		x		x	
3		x	x	x		x
4			x	x	x	
5	x	x	x			
6	x	x	x	x		x
7	x	x			x	x
8	x		x	x		
9					x	x
10	x	x		x	x	x

En la actualidad, el gerente se reúne con cada empleado una vez por semana. Cada reunión dura aproximadamente 20 minutos para un total de 3 horas 20 minutos para los 10 empleados. Para reducir el tiempo total, el gerente desea realizar reuniones de grupo dependiendo de los proyectos compartidos. El objetivo es programar las reuniones de modo que se reduzca el tráfico (cantidad de empleados) que entra y sale de la sala de juntas.

(a) Defina las ciudades y la matriz de distancias del modelo TSP.

(b) Determine una cota inferior en la longitud de recorrido óptima utilizando el modelo de asignación. ¿Es óptima la solución del modelo de asignación para el TSP?

7. Meals-on-Wheels es un servicio de caridad que prepara comidas en su cocina central para personas que califican para el servicio. Idealmente, todas las comidas deben ser entregadas en un máximo de 20 minutos después de que salen de la cocina. Esto significa que el tiempo de regreso desde la última ubicación hasta la cocina no es un factor al determinar la secuencia de las entregas. El servicio de caridad se encuentra en el proceso de determinar la ruta de entrega. El primer itinerario piloto incluye siete recipientes con los siguientes tiempos de viaje $\|t_{ij}\|$ (la fila 1 y la columna 1 representan la cocina).

$$\|t_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 12 & 5 & 17 & 9 & 13 & 7 \\ 10 & 0 & 9 & 20 & 8 & 11 & 3 & 5 \\ 12 & 9 & 0 & 14 & 4 & 10 & 1 & 16 \\ 5 & 20 & 14 & 0 & 20 & 5 & 28 & 10 \\ 17 & 8 & 4 & 20 & 0 & 21 & 4 & 9 \\ 9 & 11 & 10 & 5 & 21 & 0 & 2 & 3 \\ 13 & 3 & 1 & 28 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 16 & 10 & 9 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Compare las cotas inferiores en la longitud de recorrido óptima utilizando tanto el modelo de asignación como la programación lineal. ¿Es óptima la solución de modelo de asignación para el TSP?

(b) Basado en la información en (a), ¿es posible entregar las ocho comidas dentro de la ventana de tiempo de 20 minutos?

8. *Tarjetas de circuito integrado.* A las tarjetas de circuito integrado (como las que se utilizan en las computadoras personales) se les perforan agujeros para montar los diferentes componentes electrónicos. Las tarjetas son alimentadas de una en una bajo un taladro móvil. La matriz $\|d_{ij}\|$ siguiente proporciona las distancias (en milímetros) entre pares de 6 agujeros de una tarjeta específica.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} - & 1.2 & .5 & 2.6 & 4.1 & 3.2 \\ 1.2 & - & 3.4 & 4.6 & 2.9 & 5.2 \\ .5 & 3.4 & - & 3.5 & 4.6 & 6.2 \\ 2.6 & 4.6 & 3.5 & - & 3.8 & .9 \\ 4.1 & 2.9 & 4.6 & 3.8 & - & 1.9 \\ 3.2 & 5.2 & 6.2 & .9 & 1.9 & - \end{pmatrix}$$

Suponga que el taladro se mueve a una velocidad lineal de 7 milímetros por segundo y que le lleva medio segundo taladrar un agujero. Determine una cota superior en la tasa de producción (tarjetas por hora).

9. *Secuenciación del DNA.* En ingeniería genética, un conjunto de cadenas de DNA, cada una de 10 pies de longitud, se concatena para formar una cadena universal. Los genes de cadenas de DNA individuales pueden traslaparse, lo que produce una cadena universal de longitud menor que la suma de las longitudes individuales. La matriz $\|O_{ij}\|$ siguiente proporciona la longitud en pies de traslapes para un caso hipotético de seis cadenas de DNA.

$$\|O_{ij}\| = \begin{pmatrix} - & 1 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & - & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & - & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & - & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & - & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 2 & - \end{pmatrix}$$

Compare las cotas inferiores en la longitud de recorrido óptima utilizando tanto el modelo de asignación como la programación lineal. ¿Es óptima la solución obtenida con el modelo de asignación para el TSP?

10. La Agencia Espacial de Estados Unidos, NASA, utiliza satélites para formar imágenes de objetos celestes. La cantidad de combustible necesaria para reposicionar los satélites es una función de la secuencia en la cual se forman las imágenes de los objetos. La matriz $\|c_{ij}\|$ siguiente proporciona las unidades de combustible utilizadas para realinear los satélites con los objetos.

$$\|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} - & 1.5 & 2.6 & 3.1 & 4.4 & 3.8 \\ 1.9 & - & 4.7 & 5.3 & 3.9 & 2.7 \\ 2.9 & 4.3 & - & 3.5 & 5.4 & 6.2 \\ 3.4 & 5.1 & 3.6 & - & 2.2 & 1.9 \\ 4.4 & 3.4 & 5.9 & 2.4 & - & 2.6 \\ 3.1 & 2.7 & 6.5 & 1.1 & 2.9 & - \end{pmatrix}$$

Suponga que el costo por unidad de combustible es de $12. Estime una cota inferior en el costo de formar las imágenes de los seis objetos.

11. *Vehículo guiado automático.* Un VGA realiza un viaje redondo (que empieza y termina en el cuarto de correo) para entregar correspondencia a 5 departamentos de una fábrica. Utilizando el cuarto de correo como el origen (0,0), las ubicaciones (x,y) de los puntos de entrega son (10,30), (10,50), (30,10), (40,40) y (50,60) para los cinco departamentos. Todas

las distancias están en metros. El vehículo se mueve sólo a lo largo de pasillos horizontales y verticales. El objetivo es minimizar la longitud del viaje redondo.

(a) Defina las ciudades y la matriz de distancias del modelo TSP.

(b) Suponiendo que el vehículo se mueve a una velocidad de 35 metros por minuto, ¿puede hacerse el viaje redondo en menos de 5 minutos?

12. *Corte de papel tapiz, Garfinkel (1977).* Usualmente, tapizar los muros de una habitación requiere cortar hojas de diferentes longitudes de acuerdo con las puertas y ventanas, y algo más. Las hojas se cortan de un solo rollo, y sus puntos de inicio deben alinearse para que coincidan con el dibujo repetitivo del rollo. Por tanto, la cantidad de desperdicio depende de la secuencia en que se cortan las hojas. Con el objeto de determinar el desperdicio, podemos considerar un solo dibujo como una unidad de longitud (independientemente de su medida real) y luego expresar la longitud de una hoja en función de esta unidad. Por ejemplo, una hoja de dibujos de 9.50 de longitud requiere diez dibujos consecutivos. Si la correspondencia de los dibujos en el muro requiere iniciar la hoja a un cuarto hacia abajo del primer dibujo, entonces la hoja (de 9.5 dibujos de longitud) debe terminar a tres cuartos hacia abajo del décimo dibujo. Por lo tanto, el desperdicio en una hoja puede presentarse en el primero y último dibujos únicamente, y su cantidad siempre es menor que la longitud completa de un dibujo completo.

Defina $0 \le s_i \le 1$ y $0 \le e_i \le 1$ como las ubicaciones de los cortes debajo del primero y el último dibujos. Luego, para la hoja i con dibujo de longitud L_i, tenemos

$$e_i = (s_i + L_i) \bmod (1)$$

Para el ejemplo que se acaba de citar, $s = .25$ y $e = (.25 + 9.5) \bmod(1) = .75$.

El desperdicio entre dos hojas secuenciales, i y j, en la que la hoja j sucede de inmediato a la hoja i, puede calcularse como sigue: Si $s_j \ge e_i$, el desperdicio es $s_j - e_i$. De lo contrario, si $s_j < e_i$, entonces el corte final de i y el corte de inicio de j se traslapan. El resultado es que el corte de inicio s_j de la hoja j debe hacerse en el dibujo que sigue inmediatamente del dibujo donde se hizo del corte final e_i de la hoja i. En este caso, el desperdicio resultante es $1 - e_i + s_j$.

En realidad, las dos cantidades de desperdicio ($s_i - e_i$ y $1 - e_i + s_j$) pueden expresarse como

$$w_{ij} = (s_j - e_i) \bmod(1)$$

Por ejemplo, dados $e_1 = .8$ y $s_2 = .35$, utilizamos la fórmula para $s_2 < e_1$ para obtener $w_{12} = 1 - .8 + .35 = .55$. Se obtiene el mismo resultado utilizando $w_{12} = (.35 - .8) \bmod(1) = (-.45) \bmod(1) = (-1 + .55) \bmod(1) = .55$.

Para tener en cuenta el desperdicio resultante del corte en el primer dibujo de la primera hoja (nodo 1) y el último dibujo de la última hoja (nodo n), se agrega una hoja ficticia (nodo $n + 1$) con su $s_{n+1} = e_{n+1} = 0$. La longitud de un recorrido que pasa por todos los $n + 1$ nodos proporciona el desperdicio total que resulta de una secuencia específica. Ahora el problema puede modelarse como modelo TSP de $(n + 1)$ nodos con distancia w_{ij}.

(a) Calcule la matriz w_{ij} con el siguiente conjunto de datos sin procesar (por comodidad, la hoja de cálculo *excelWallPaper.xls* realiza los cálculos de w_{ij} de forma automática):

Hoja, i	Corte de inicio en el dibujo, s_i	Longitud de la hoja, L_i
1	0	10.47
2	.342	3.82
3	.825	5.93
4	.585	8.14
5	.126	1.91
6	.435	6.32

(b) Demuestre que la solución óptima de la asignación asociada produce el recorrido óptimo.

(c) Cuantifique el desperdicio total como un porcentaje de la longitud de todas las hojas.

13. *Recolección de pedidos en un almacén, Ratliff y Rosenthal (1983)*. En un almacén rectangular se utiliza una grúa elevada para recolectar y entregar pedidos entre lugares específicos en el almacén. Las tareas de la grúa implican lo siguiente: (1) Recolectar una carga en un lugar; (2) entregarla en un lugar, y (3) moverse descargada para llegar a un lugar de recolección. Supongamos que hay n pedidos que se tiene que recolectar y entregar. El objetivo sería completar todos los pedidos al mismo tiempo que se minimiza el tiempo no productivo de la grúa [elemento (3)]. Los tiempos no productivos pueden calcularse con base en los lugares de recolección y entrega de los pedidos y las velocidades lateral y transversal de la grúa, entre otros factores. Para el propósito de esta situación, la grúa inicia con los pedidos desde un estado inactivo y también termina en un estado inactivo después de completar todos los pedidos.

Para un grupo especifico de ocho pedidos, los tiempos (en minutos) para llegar a los lugares de los pedidos 1, 2,…, y 8 desde un estado inactivo son .1, .4, 1.1, 2.3, 1.4, 2.1, 1.9 y 1.3, respectivamente. La siguiente tabla proporciona los tiempos no productivos (en minutos) asociados con la secuenciación de los pedidos.

$$\|t_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1.0 & 1.2 & .5 & 1.7 & .9 & 1.3 & .7 \\ 1.1 & 0 & .9 & 2.0 & .8 & 1.1 & .3 & .5 \\ 1.2 & 1.9 & 0 & 1.4 & .4 & 1.0 & 1.0 & 1.6 \\ 1.5 & 2.3 & .4 & 0 & 2.0 & 1.5 & 2.8 & 1.0 \\ 1.2 & 1.8 & 1.4 & 2.5 & 0 & 2.1 & .4 & .9 \\ .9 & 1.1 & 1.0 & .5 & 2.1 & 0 & .2 & .3 \\ 1.3 & .8 & 1.1 & 2.2 & 1.4 & .6 & 0 & 1.2 \\ 1.7 & 1.5 & 1.6 & 1.0 & 1.9 & .9 & 2.0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Defina las ciudades y la matriz de distancias para el modelo TSP.

(b) Determine una cota inferior en el tiempo no productivo durante la finalización de todos los pedidos.

11.3 ALGORITMOS TSP EXACTOS

Esta sección presenta dos algoritmos de PE exactos: el de ramificación y acotamiento (B&B) y el plano de corte. En teoría, ambos algoritmos garantizan la optimalidad. El tema computacional es una historia diferente; esto quiere decir que los algoritmos pueden no producir la solución óptima en una cantidad razonable de tiempo y el impulso del desarrollo de la heurística de las secciones 11.4 y 11.5.

11.3.1 Algoritmo de ramificación y acotamiento

La idea del algoritmo de ramificación y acotamiento (B&B) es iniciar con la solución óptima del problema de asignación asociado. Si la solución es un recorrido, el proceso termina. De lo contrario, se imponen restricciones en la solución resultante para imposibilitar los subrecorridos. La idea es crear ramas que asignen un valor cero a cada una de las variables de uno de los subrecorridos. Por lo común, el subrecorrido con la menor cantidad de ciudades se selecciona para la ramificación porque es el que crea el menor número de ramas.

Si la solución del problema de asignación en cualquier nodo es un recorrido, su valor objetivo proporciona una cota superior en la longitud óptima del recorrido. Si no, se requiere más ramificación en el nodo. Un subproblema se *sondea a fondo* si produ-

ce una cota superior más pequeña, o si hay evidencia de que no puede conducir a una mejor cota superior. El recorrido óptimo se da en el nodo con la menor cota superior.

El siguiente ejemplo proporciona los detalles de los algoritmos de ramificación y acotamiento, y TSP.

Ejemplo 11.3-1

Considere la siguiente matriz TSP de 5 ciudades:

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & \infty & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & \infty & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 3 & \infty & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

La asignación asociada se resuelve utilizando AMPL, TORA o Excel. La solución es

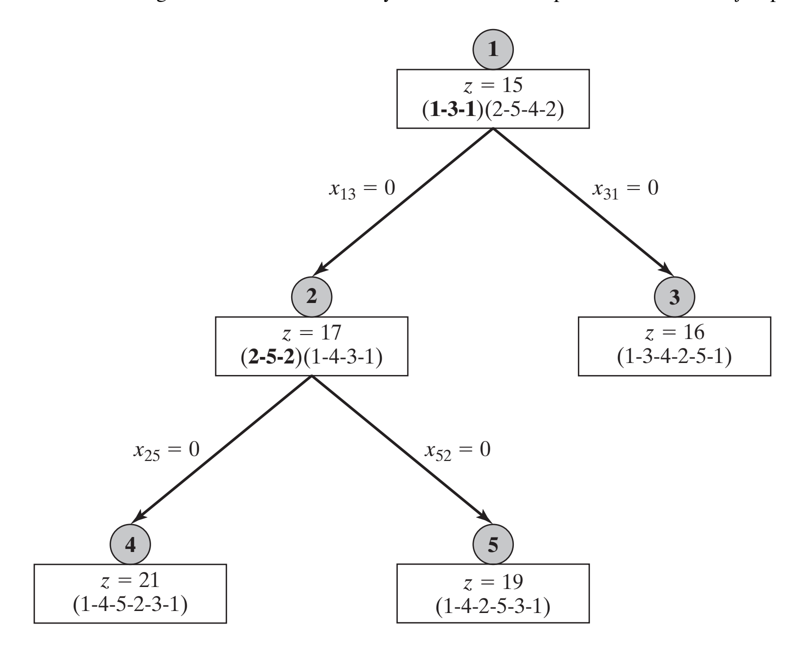
$$z = 15, (x_{13} = x_{31} = 1), (x_{25} = x_{54} = x_{42} = 1), \text{todas las demás} = 0$$

Se compone de dos subrecorridos, 1-3-1 y 2-5-4-2, además de constituir el nodo de inicio del árbol de búsqueda de ramificación y acotamiento, como se muestra en el nodo 1 en la figura 11.2.

En este ejemplo utilizaremos un recorrido arbitrario, 1-2-3-4-5-1, para determinar la cota superior inicial; es decir, 10 + 5 + 7 + 4 + 3 = 29 unidades. Como alternativa, se pueden utilizar las heurísticas en las secciones 11.4 y 11.5 para producir cotas superiores mejoradas (más pequeñas). La cota superior estimada significa que la longitud del recorrido *óptima* no puede exceder de 29. Los futuros nodos de ramificación y acotamiento buscan cotas superiores más pequeñas, si existe alguna.

FIGURA 11.2

Solución obtenida con el algoritmo de ramificación y acotamiento del problema TSP del ejemplo 11.3-1



En el nodo 1 del árbol de ramificación y acotamiento, el subrecorrido más corto 1-3-1 crea la rama $x_{13} = 0$ que conduce al nodo 2 y $x_{31} = 0$ que conduce al nodo 3. Los problemas de asignación asociados en los nodos 2 y 3 se crean a partir del problema en el nodo 1 estableciendo $d_{13} = \infty$ y $d_{31} = \infty$, respectivamente.

En este momento, podemos examinar el nodo 2 o el nodo 3, y elegir arbitrariamente explorar el nodo 2. Su solución de asignación es 2-5-2 y 1-4-3-1 con $z = 17$. Como la solución no es un recorrido, seleccionamos el subrecorrido más corto 2-5-2 para ramificación: la rama $x_{25} = 0$ conduce al nodo 4, y la rama $x_{52} = 0$ conduce al nodo 5.

Ahora tenemos tres subproblemas sin explorar: los nodos 3, 4, y 5. Examinamos arbitrariamente el subproblema en el nodo 4, estableciendo $d_{25} = \infty$ en la matriz de distancias en el nodo 2. La solución resultante, el recorrido 1-4-5-2-3-1, produce la cota superior más pequeña $z = 21$.

Los dos subproblemas en los nodos 3 y 5 permanecen sin explorar. Seleccionando arbitrariamente el subproblema 5, establecemos $d_{52} = \infty$ en la matriz de distancias en el nodo 2. El resultado es el recorrido 1-4-2-5-3-1 con la cota superior más pequeña $z = 19$. El subproblema 3 es el único que permanece sin explorar. Sustituyendo $d_{31} = \infty$ en la matriz de distancias en el nodo 1, obtenemos una mejor solución de recorrido: 1-3-4-2-5-1 con la cota superior más pequeña $z = 16$.

Se han examinado todos los nodos del árbol, y por consiguiente se completa la búsqueda de ramificación y acotamiento. El recorrido óptimo es el asociado con la cota superior más pequeña: 1-3-4-2-5-1 de 16 unidades de longitud.

Comentario. La solución del ejemplo 11.3-1 revela dos puntos:

1. La secuencia de búsqueda $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 3$ se seleccionó deliberadamente para demostrar un escenario del peor caso en el algoritmo de ramificación y acotamiento, en el sentido de que requiere explorar 5 nodos. Si hubiéramos explorado el nodo 3 ($x_{31} = 0$) antes que el nodo 2 ($x_{13} = 0$), habríamos encontrado la cotas superior $z = 16$ unidades, y concluido que la ramificación en el nodo 2, con $z = 17$, no puede conducir a una mejor solución, y por lo tanto se eliminaría la necesidad de explorar los nodos 4 y 5.

   Por lo general no hay reglas exactas para seleccionar la mejor secuencia de búsqueda, excepto algunas reglas prácticas. Por ejemplo, en un nodo dado podemos iniciar con una rama que tenga la d_{ij} *más larga* entre todas las ramas creadas. La esperanza es que la eliminación del segmento que tenga el recorrido más largo conduzca a un recorrido de menor longitud. En el ejemplo 11.3-1, esta regla le habría dado prioridad al nodo 3 sobre el nodo 2 porque d_{31} (=4) es mayor que d_{13}(=3), como se desea. Otra regla demanda secuenciar la exploración de los nodos horizontalmente (en lugar de verticalmente), es decir, el ancho antes que la profundidad. La idea es que es más probable que los nodos más cercanos al nodo de inicio produzcan cotas superiores más estrechas debido a que el número de restricciones adicionales (del tipo $x_{ij} = 0$) es más pequeño. Esta regla también habría producido la búsqueda computacionalmente eficiente $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$.

2. Las heurísticas de las secciones 11.4 y 11.5 pueden mejorar la eficiencia computacional del algoritmo de ramificación y acotamiento al proporcionar una cota superior "estrecha". Por ejemplo, la heurística vecina más cercana en la sección 11.4-1 produce el recorrido 1-3-4-2-5-1 con longitud $z = 16$. Esta cota superior estrecha habría eliminado de inmediato la necesidad de explorar el nodo 2 (la matriz de distancias es totalmente entera, por lo que no se puede encontrar una mejor solución en el nodo 2.)

Momento de AMPL

Los comandos interactivos de AMPL son ideales para implementar el algoritmo TSP de ramificación y acotamiento por medio del archivo del modelo de asignación general *amplAssign.txt.* Los datos del problema se proporcionan en el archivo *Ex11.3-1.txt*. El archivo *solutionAssign.txt* resuelve y despliega la solución en pantalla. La siguiente tabla resume los comandos AMPL necesarios para crear el árbol de ramificación y acotamiento mostrado en la figura 11.2 (ejemplo 11.3-1) interactivamente.

Comandos AMPL	Resultado
ampl: `model amplAssign.txt; data Ex11.3-1.txt; commands solutionAssign.txt;`	Solución del nodo 1
ampl: `fix x[1,3]: = 0; commands solutionAssign.txt;`	Solución del nodo 2
ampl: `fix x[2,5]: = 0; commands solutionAssign.txt;`	Solución del nodo 4
ampl: `unfix x[2,5]; fix x[5,2]: = 0; commands solutionAssign.txt;`	Solución del nodo 5
ampl: `unfix x[5,2]; unfix x[1,3]; fix x[3,1]: = 0; commands solutionAssign.txt;`	Solución del nodo 3

Momento de TORA

También puede usarse TORA para generar el árbol de ramificación y acotamiento. Inicie con el modelo de asignación en el nodo 1. La condición de rama $x_{ij} = 0$ se ve afectada al utilizar Solve/Modify Input Data para cambiar a cero la cota superior en x_{ij}.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.3A

1. Resuelva el ejemplo 11.3-1 con un subrecorrido 2-5-4-2 para iniciar el proceso de ramificación en el nodo 1, utilizando las siguientes secuencias para explorar los nodos.
   (a) Explore todos los subproblemas horizontalmente de izquierda a derecha en cada hilera antes de proseguir con la siguiente.
   (b) Siga cada ruta verticalmente a partir del nodo 1, seleccionando siempre la rama más a la izquierda, hasta que la ruta termine en un nodo sondeado a fondo.
2. Resuelva el problema 1, conjunto 11.2a por el algoritmo de ramificación y acotamiento.

*3. Resuelva el problema 6, conjunto 11.2a por el algoritmo de ramificación y acotamiento.

4. Resuelva el problema 8, conjunto 11.2a por el algoritmo de ramificación y acotamiento.
5. *Experimento con AMPL.* Use los archivos *amplAssign.txt* y *solutionsAssign.txt* para resolver el problema 5, conjunto 11.2a por el algoritmo de ramificación y acotamiento.

11.3.2 Algoritmo del plano de corte

En este algoritmo se agrega un conjunto de restricciones al problema de asignación para excluir las soluciones de subrecorrido. Definamos una variable continua u_j (≥ 0) para la ciudad $j = 2, 3, \ldots,$ y n. Las restricciones adicionales deseadas (planos de corte) son

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1, \; i = 2, 3, \ldots, n; \; j = 2, 3, \ldots, n; \; i \neq j$$

La adición de estos cortes al modelo de asignación produce un programa lineal entero combinado con x_{ij} binaria y u_j continua.

Ejemplo 11.3-2

Considere la siguiente matriz de distancias de un problema TSP de 4 ciudades.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} - & 13 & 21 & 26 \\ 10 & - & 29 & 20 \\ 30 & 20 & - & 5 \\ 12 & 30 & 7 & - \end{pmatrix}$$

El problema entero combinado completo se compone del modelo de asignación y las restricciones adicionales, como se muestra en la tabla 11.3. Todas las $x_{ij} = (0,1)$ y todas la $u_j \geq 0$.

La solución óptima es $u_2 = 0, u_3 = 2, u_4 = 3, x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = 1$. El recorrido correspondiente es 1-2-3-4-1 con longitud de 59. La solución satisface todas las restricciones adicionales (¡compruébelo!).

Para demostrar que la solución óptima dada no puede satisfacer una solución de subrecorrido, considere el subrecorrido (1-2-1, 3-4-3), o $x_{12} = x_{21} = 1, x_{34} = x_{43} = 1$. Los valores óptimos $u_2 = 0, u_3 = 2$, y $u_4 = 3$ junto con $x_{43} = 1$ no satisfacen la restricción 6, $4x_{43} + u_4 - u_3 \leq 3$, en la tabla 11.3. (Convénzase de que la misma conclusión es cierta para otras soluciones de subrecorrido, como (3-2-3, 1-4-1)).

TABLA 11.3 Cortes para excluir los subrecorridos en el modelo de asignación del ejemplo 11.3-2

Núm.	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	u_2	u_3	u_4	
1							4										1	−1		≤3
2								4									1		−1	≤3
3										4							−1	1		≤3
4												4						1	−1	≤3
5														4			−1		1	≤3
6															4			−1	1	≤3

La desventaja del modelo de plano de corte es que el tamaño del programa lineal entero combinado resultante crece exponencialmente con la cantidad de ciudades, que lo hace ser computacionalmente insoluble. Cuando esto sucede, el único recurso es utilizar, o bien el algoritmo de ramificación y acotamiento, o una de las heurísticas de las secciones 11.4 y 11.5.

Momento de AMPL

En el archivo *amplCut.txt* se da un modelo general del algoritmo de plano de corte. El modelo TSP de 4 ciudades del ejemplo 11.3-2 utiliza los siguientes comandos AMPL:

```
model amplCut.txt; data Ex11.3-2.txt; commands SolutionCut.txt;
```

Los resultados se presentan en el siguiente formato propio:

```
Optimal tour length = 59.00
Optimal tour: 1- 2- 3- 4- 1
```

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.3B

1. Escriba a continuación los cortes asociados con el siguiente modelo TSP:

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 43 & 21 & 20 & 10 \\ 12 & \infty & 9 & 22 & 30 \\ 20 & 10 & \infty & 5 & 13 \\ 14 & 30 & 42 & \infty & 20 \\ 44 & 7 & 9 & 10 & \infty \end{pmatrix}$$

2. *Experimento con AMPL.* Use AMPL para resolver el siguiente problema TSP por el algoritmo de plano de corte.

(a) Problema 2, conjunto 11.2a.

(b) Problema 3, conjunto 11.2a.

(c) Problema 11, conjunto 11.2a.

3. *Experimento con AMPL.* En el modelo de tarjeta de circuito del problema 8, conjunto 11.2a, los datos de entrada se suelen dar en función de las coordenadas (x,y) de los agujeros en lugar de la distancia entre los respectivos agujeros. Específicamente, considere las siguientes coordenadas (x,y) para una tarjeta de 9 agujeros:

Agujero	(x,y) en mm
1	(1, 2)
2	(4, 2)
3	(3, 7)
4	(5, 3)
5	(8, 4)
6	(7, 5)
7	(3, 4)
8	(6, 1)
9	(5, 6)

El taladro siempre recorre la distancia más corta entre dos agujeros sucesivos.

(a) Modifique el archivo de datos para determinar el recorrido de perforación óptimo utilizando las coordenadas (x,y).

(b) Determine la tasa de producción en tarjetas por hora dado que la velocidad de desplazamiento del taladro es de 5 mm/s y el tiempo de perforación por agujero es de .5 s. Use los archivos *amplCut.Txt.* y *solutionCut.txt*.

11.4 HEURÍSTICAS DE BÚSQUEDA LOCAL

Esta sección presenta dos heurísticas de búsqueda local para el modelo TSP : de *vecino más cercano* e *inversión*. Las heurísticas de búsqueda local terminan en un óptimo local. Una forma de mejorar la calidad de la solución es repetir la búsqueda mediante recorridos de inicio generados al azar. Otra opción es utilizar metaheurísticas, cuya idea básica es escapar del entrampamiento en un óptimo local. Las metaheurísticas se abordarán en la sección 11.5.

11.4.1 Heurística del vecino más cercano

Como su nombre lo sugiere, una solución TSP puede hallarse comenzando con una ciudad (nodo) y luego conectándola con la ciudad no conectada más cercana (los empates se rompen arbitrariamente). La ciudad que se acaba de agregar se conecta entonces con su ciudad no conectada más cercana. El proceso continúa hasta que se forma un recorrido.

Ejemplo 11.4-1

La matriz siguiente resume las distancias en millas en un modelo TSP de 5 ciudades.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 120 & 220 & 150 & 210 \\ 120 & \infty & 100 & 110 & 130 \\ 220 & 80 & \infty & 160 & 185 \\ 150 & \infty & 160 & \infty & 190 \\ 210 & 130 & 185 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

La heurística puede iniciarse desde cualquiera de las cinco ciudades. Cada ciudad de inicio puede conducir a un recorrido diferente. La tabla 11.4 proporciona los pasos de la heurística que se inicia en la ciudad 3. (Las distancias previamente seleccionadas se reemplazan con —).

TABLA 11.4 Pasos de la heurística del vecino más cercano para resolver el modelo TSP del ejemplo 11.4-1

Paso	Acción	Construcción de recorrido
1	Inicio en la ciudad 3	3
2	La ciudad 2 está más cercana a la ciudad 3 ($d_{32} = \min\{220, \mathbf{80}, \infty, 160, 185\}$)	3-2
3	La ciudad 4 está mas cercana a la ciudad 2 ($d_{24} = \min\{120, \infty, —, \mathbf{110}, 130\}$)	3-2-4
4	La ciudad 1 está más cercana a la ciudad 4 ($d_{41} = \min\{\mathbf{150}, \infty, —, —, 190\}$)	3-2-4-1
5	La ciudad 5 está más cercana a la ciudad 1 ($d_{15} = \min\{\infty, —, —, —, \mathbf{210}\}$)	3-2-4-1-5
6	Agregue la ciudad 3 para completar el recorrido	3-2-4-1-5-3

El recorrido resultante, 3-2-4-1-5-3, tiene una longitud total de 80 + 110 + 150 + 210 + 185 = 735 millas. Observe que la calidad de la solución depende de la selección de la ciudad de inicio. Por ejemplo, si partimos de la ciudad 1, el recorrido resultante es 1-2-3-4-5-1 con una longitud de 780 millas (¡compruébelo!). Por tanto, una mejor solución puede determinarse repitiendo la heurística con inicio en diferentes ciudades.

11.4.2 Heurística de inversión

En un modelo TSP de n ciudades, la heurística de inversión trata de mejorar un recorrido actual invirtiendo el orden de los nodos de un subrecorrido *abierto* (un subrecorrido es abierto si le falta exactamente un segmento). Por ejemplo, considere el recorrido, 1-3-5-2-4-1 en la figura 11.3. La inversión de un subrecorrido abierto 3-5-2 produce el nuevo recorrido 1-2-5-3-4-1 al eliminar los segmentos 1-3 y 2-4 y al agregar los segmentos 1-2 y 3-4, como se muestra en la figura 11.3. El número mínimo del subrecorrido invertido es 2 (por ejemplo, 3-5 o 5-2). El número máximo es $n - 2$ si la matriz de distancias es simétrica, y $n - 1$ si es asimétrica.[1] La heurística examina todas las inversiones en la búsqueda para un mejor recorrido.

[1]En una matriz de distancias simétrica, la inversión de subrecorrido de (n – 1) ciudades no produce un recorrido diferente. Por ejemplo, la inversión 2-4-5-3 en el recorrido 1-2-4-5-3-1) produce el recorrido idéntico 1-3-5-4-2-1) cuando la matriz de distancias es simétrica ($d_{ij} = d_{ij}$) para todas las i y j. Esto quizá no sea cierto en el caso asimétrico porque tal vez los segmentos i-j y j-i pueden no ser iguales.

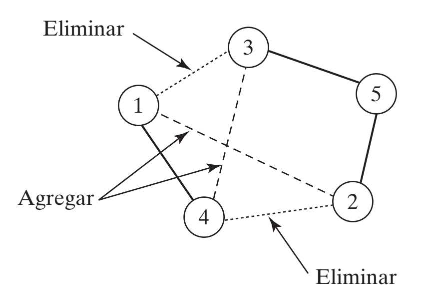


FIGURA 11.3

La inversión de subrecorrido 3-5-2 en el recorrido 1-3-5-2-4-1 produce el recorrido 1-2-5-3-4-1 al eliminar los segmentos 1-3 y 2-4, y agregar los segmentos 1-2 y 3-4

La longitud del recorrido de inicio en la heurística de inversión no necesita ser finita (es decir, le podrían faltar segmentos). De hecho, iniciar con un recorrido de longitud finita no parece ofrecer una ventaja particular con respecto a la calidad de la solución final (vea el problema 2, conjunto 11.4A, para una ilustración).

Ejemplo 11.4-2

Considere el modelo TSP del ejemplo 11.4-1. Los pasos de inversión (autoexplicativos) se realizan en la tabla 11.5 comenzando con recorrido arbitrario 1-4-3-5-2-1 de 745 millas de longitud.

TABLA 11.5 Aplicación de la heurística de inversión al modelo TSP del ejemplo 11.4-1

Tipo	Inversión	Recorrido	Longitud
Inicio	—	(1-4-3-5-2-1)	745
Inversión de dos a la vez	4-3	1-3-4-5-2-1	820
	3-5	(1-4-5-3-2-1)	**725**
	5-2	1-4-3-2-5-1	730
Inversión de tres a la vez	4-3-5	1-5-3-4-2-1	∞
	3-5-2	1-4-2-5-3-1	∞
Inversión de cuatro a la vez	4-3-5-2	1-2-5-3-4-1	745

La inversión de cuatro a la vez se investiga porque la matriz de distancias es asimétrica. Además, ninguna de las inversiones puede incluir la ciudad de inicio del recorrido inicial (= 1 en este ejemplo) ya que esto no producirá un recorrido factible. Por ejemplo, la inversión 1-4 conduce a 4-1-3-5-2-1, lo cual no es un recorrido.

La solución determinada por la heurística de inversión es una función del recorrido de inicio. Por ejemplo, si iniciamos con 2-3-4-1-5-2 de 750 millas de longitud, la heurística produce un recorrido diferente: 2-5-1-4-3-2 de 730 millas de longitud (¡compruébelo!). Por esta razón, la calidad de la solución puede mejorarse si la heurística se repite con diferentes recorridos de inicio.

Momento de Excel

La figura 11.4 muestra una hoja de cálculo Excel general (archivo *excelReversalTSP.xls*) utilizando las reglas dadas anteriormente (un subconjunto del modelo proporciona la solución del vecino más cercano, vea las opciones dadas a continuación). La matriz de distancias puede ingresarse

FIGURA 11.4

Ejecución de la heurística TSP por medio de una hoja de cálculo (archivo *excelReversalTSP.xls*)

manualmente, o llenarse al azar (simétrica o asimétrica) con una densidad especificada. La heurística verifica automáticamente la matriz en cuanto a simetría y ajusta el nivel de inversión máximo como corresponda. También automatiza cuatro opciones para el recorrido de *inicio:*

1. La opción *all* aplica la heurística del vecino más cercano utilizando cada una de las ciudades como punto de inicio. Se utiliza entonces el mejor entre los recorridos resultantes para iniciar la heurística de inversión.
2. La opción *tour* permite utilizar un recorrido de inicio específico.
3. La opción *random* genera un recorrido de inicio aleatorio.
4. La opción *specific city number* se aplica a la heurística de vecino más cercano iniciando en la ciudad designada.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.4A

1. En la tabla 11.5 del ejemplo 11.4-2, especifique los segmentos eliminados y agregados con cada una de las inversiones de dos a la vez.
2. En la tabla 11.5 del ejemplo 11.4-2, use el recorrido desconectado de longitud infinita 3-2-5-4-1-3 (es decir, un recorrido al que le falta al menos un segmento) como recorrido de inicio para demostrar que la heurística de inversión de recorrido puede seguir conduciendo a una solución que es tan buena como cuando la heurística se inicia con un recorrido conectado.
3. Aplique la heurística de inversión a los siguientes problemas iniciando con el recorrido del mejor vecino más cercano:
   (a) El problema de secuenciación de las pinturas del ejemplo 11.1-1.
   (b) Problema 1 del conjunto 11.2a.
   (c) Problema 4 del conjunto 11.2a.
   (d) Problema 5 del conjunto 11.2a.
4. *Experimento con Excel*. La matriz siguiente proporciona las distancias entre 10 ciudades (todas las entradas faltantes = ∞). (Por comodidad, el archivo *Probl11.4a-4.txt* proporciona la matriz de distancias en formato AMPL.)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		100	2	11	80	5	39	95		28
2	17		42	33	21	59	46		79	29
3		63		57	92		55		68	52
4	36	27	25		40	49	48	63	16	
5	51	11	46	60		22	11	13	54	55
6		20	46	15	93		76	47	21	10
7	17		45	88	28	26		33	30	49
8	35	49	87	76		55	64			93
9	35	48	100	3	55		41			73
10		50	70	43	82	43	23	49	89	

Use el archivo *excelReversalTSP.xls* para implementar las siguientes situaciones:

(a) Use la heurística de vecino más cercano para determinar el recorrido asociado que se inicia en el nodo 1.

(b) Determine el recorrido por medio de la heurística de inversión iniciando con el recorrido 4-5-3-6-7-8-10-9-1-4-5.

(c) Determine el recorrido utilizando la heurística de inversión iniciando con el mejor recorrido del vecino más cercano.

(d) Compare la calidad de las soluciones en los incisos (a), (b) y (c) con la solución exacta óptima obtenida por AMPL.

11.5 METAHEURÍSTICAS

La desventaja de las heurísticas de búsqueda local de la sección 11.4 es el posible entrampamiento en un óptimo local. Las metaheurísticas, como se explica en el capítulo 10, están diseñadas para aliviar este problema. Esta sección detalla la aplicación al modelo TSP de la búsqueda tabú, de recocido simulado, y genética. Se recomienda que revise el material del capítulo 10 antes de proseguir con el resto de este capítulo.

11.5.1 Algoritmo tabú aplicado al modelo TSP

Como se explica en la sección 10.3-1, la búsqueda tabú se escapa del entrampamiento en óptimos locales al permitir movimientos de búsqueda inferiores. Una **lista tabú** impide que se repitan las soluciones encontradas antes durante un número específico de iteraciones sucesivas, llamado **periodo de tenencia**. Un movimiento tabú puede ser aceptado si conduce a una solución mejorada. Para el modelo TSP, los elementos de la búsqueda tabú se definen como sigue:

1. **Recorrido de inicio.** Hay cuatro opciones disponibles: (a) un recorrido específico; (b) una ciudad de inicio específica para un recorrido construido mediante la heurística del vecino más cercano (sección 11.4.1); (c) el mejor entre todos los recorridos construidos por la heurística del vecino más cercano utilizando cada una de las ciudades 1, 2,…, y n como punto de inicio, y (d) un recorrido aleatorio.
2. **Inversión de un subrecorrido.** Dos segmentos de recorrido agregados reemplazan a dos eliminados para producir un nuevo recorrido (vea la sección 11.4-2 para los detalles).
3. **Vecindad en la iteración *i*.** Todos los recorridos (incluidos los no factibles con longitud infinita) generados por la aplicación de inversiones de subrecorrido al recorrido i.
4. **Movimiento tabú.** Un recorrido invertido es tabú si sus *dos* segmentos eliminados están en la lista tabú.

5. **Siguiente movimiento en la iteración *i*.** Identifique el recorrido más corto en el vecindario *i*, y selecciónelo como el siguiente movimiento si no es tabú, o si es tabú pero produce una mejor solución. De lo contrario, excluya el recorrido más corto (tabú) y repita la prueba con siguiente recorrido de vecindario más corto.
6. **Periodo de tenencia tabú τ en la iteración *i*.** El periodo de tenencia es el número (aleatorio o determinístico) de iteraciones sucesivas que un elemento tabú permanece en la lista tabú.
7. **Cambios en la lista tabú en la iteración *i*.** Los segmentos invertidos que definen el recorrido *i* del recorrido $i - 1$ se agregan a la lista. Los segmentos del recorrido que completan la tenencia (aquellos que entraron en la lista en la iteración $i - \tau + 1$) se eliminan de la lista.

Ejemplo 11.5-1

Utilizaremos la matriz de distancias del ejemplo 11.4-1 para demostrar la aplicación de la metaheurística tabú.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 120 & 220 & 150 & 210 \\ 120 & \infty & 100 & 110 & 130 \\ 220 & 80 & \infty & 160 & 185 \\ 150 & \infty & 160 & \infty & 190 \\ 210 & 130 & 185 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Supongamos un periodo de tenencia tabú $\tau = 2$ iteraciones y utilizamos un recorrido 1-2-3-4-5-1 de 780 de longitud como recorrido de inicio.

La tabla 11.6 proporciona las cinco iteraciones. En las iteraciones 1, 2 y 3, los recorridos más cortos no son tabú. En la iteración 4, el recorrido más corto, 1-4-3-5-2-1 de 745 de longitud, es tabú porque la inversión requiere eliminar los segmentos 4-5 y 3-2, y ambos están en la lista tabú. Como el recorrido (tabú) no es mejor que la solución registrada (recorrido 1-4-5-3-2-1 de 725 de longitud en la iteración 3), el siguiente recorrido más corto 1-4-5-2-3-1 de 790 de longitud, el cual resulta ser no tabú, define el siguiente movimiento.

En la iteración 5, los dos recorridos 1-4-5-3-2-1 (longitud = 725) y 1-4-3-2-5-1 (longitud = 730) son tabú (y ninguno proporciona un mejor recorrido). El siguiente mejor recorrido en la vecindad, 1-4-2-5-3-1 (de longitud infinita), no es tabú y por consiguiente representa el siguiente movimiento. Observe que sólo un segmento eliminado (4-5) en el recorrido seleccionado 1-4-2-5-3-1 aparece en la lista tabú, lo cual no es suficiente para declararlo tabú porque *ambos* segmentos eliminados deben estar en la lista. Observe también que el recorrido superior 1-5-4-2-3-1 (de longitud infinita) no se selecciona porque le faltan dos segmentos, en comparación con el no faltante en el recorrido seleccionado, 1-4-2-5-3-1.

Momento de Excel

La figura 11.5 presenta la hoja de cálculo Excel (archivo *excelTabuTSP.xls*) para aplicar la búsqueda tabú al modelo TSP. Para facilitar la experimentación, los modelos TSP simétricos y asimétricos de TPS pueden generarse al azar. Incluso, el recorrido de inicio puede especificarse de manera determinística o aleatoria. Los botones on/off (fila 6 de la hoja de cálculo) suprimen o revelan los detalles de las iteraciones, incluyendo los cambios en la lista tabú.

TABLA 11.6 Solución heurística tabú del ejemplo 11.5-1 con periodo de tenencia $\tau = 2$ iteraciones

Iteración	Inversión	Recorrido	Longitud	Eliminar	Agregar	Lista tabú (t = 2)
0	—	1-2-3-4-5-1	780			—
1	2-3	1-3-2-4-5-1	810			
	3-4	1-2-4-3-5-1	785			
	4-5	1-2-3-5-4-1	∞			
	2-3-4	**1-4-3-2-5-1**	**730**	1-2, 5-1	*1-4, 2-5*	*1-4, 2-5*
	3-4-5	1-2-5-4-3-1	∞			
	2-3-4-5	1-5-4-3-2-1	∞			
2	4-3	1-3-4-2-5-1	∞			
	3-2	1-4-2-3-5-1	∞			
	2-5	**1-4-3-5-2-1**	**745**	3-2, 5-1	*3-5, 2-1*	1-4, 2-5, *3-5, 2-1*
	4-3-2	1-2-3-4-5-1	780			
	3-2-5	1-4-5-2-3-1	790			
	4-3-2-5	1-5-2-3-4-1	750			
3	4-3	1-3-4-5-2-1	820			
	3-5	**1-4-5-3-2-1**	**725**	4-3, 5-2	*4-5, 3-2*	3-5, 2-1, *4-5, 3-2*
	5-2	1-4-3-2-5-1	730			
	4-3-5	1-5-3-4-2-1	∞			
	3-5-2	1-4-2-5-3-1	∞			
	4-3-5-2	1-2-5-3-4-1	745			
4	4-5	1-5-4-3-2-1	∞			
	5-3	1-4-3-5-2-1	745	4-5, 3-2	—	Tabú
	3-2	**1-4-5-2-3-1**	**790**	5-3, 2-1	*5-2, 3-1*	4-5, 3-2, *5-2, 3-1*
	4-5-3	1-3-5-4-2-1	∞			
	5-3-2	1-4-2-3-5-1	∞			
	4-5-3-2	1-2-3-5-4-1	∞			
5	4-5	1-5-4-2-3-1	∞			
	5-2	**1-4-2-5-3-1**	∞	4-5, 2-3	*4-2, 5-3*	5-2, 3-1, *4-2, 5-3*
	2-3	1-4-5-3-2-1	725	5-2, 3-1	—	Tabú
	4-5-2	1-2-5-4-3-1	∞			
	5-2-3	1-4-3-2-5-1	730	4-5, 3-1	—	Tabú
	4-5-2-3	1-3-2-5-4-1	∞			

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.5A

1. Realice tres iteraciones más del ejemplo 11.5-1.

2. Aplique el algoritmo tabú a los siguientes problemas iniciando con el recorrido del vecino más cercano:

(a) El problema de secuenciación de las pinturas del ejemplo 11.1-1.

(b) Problema 1 del conjunto 11.2a

(c) Problema 4 del conjunto 11.2a

(d) Problema 5 del conjunto 11.2a.

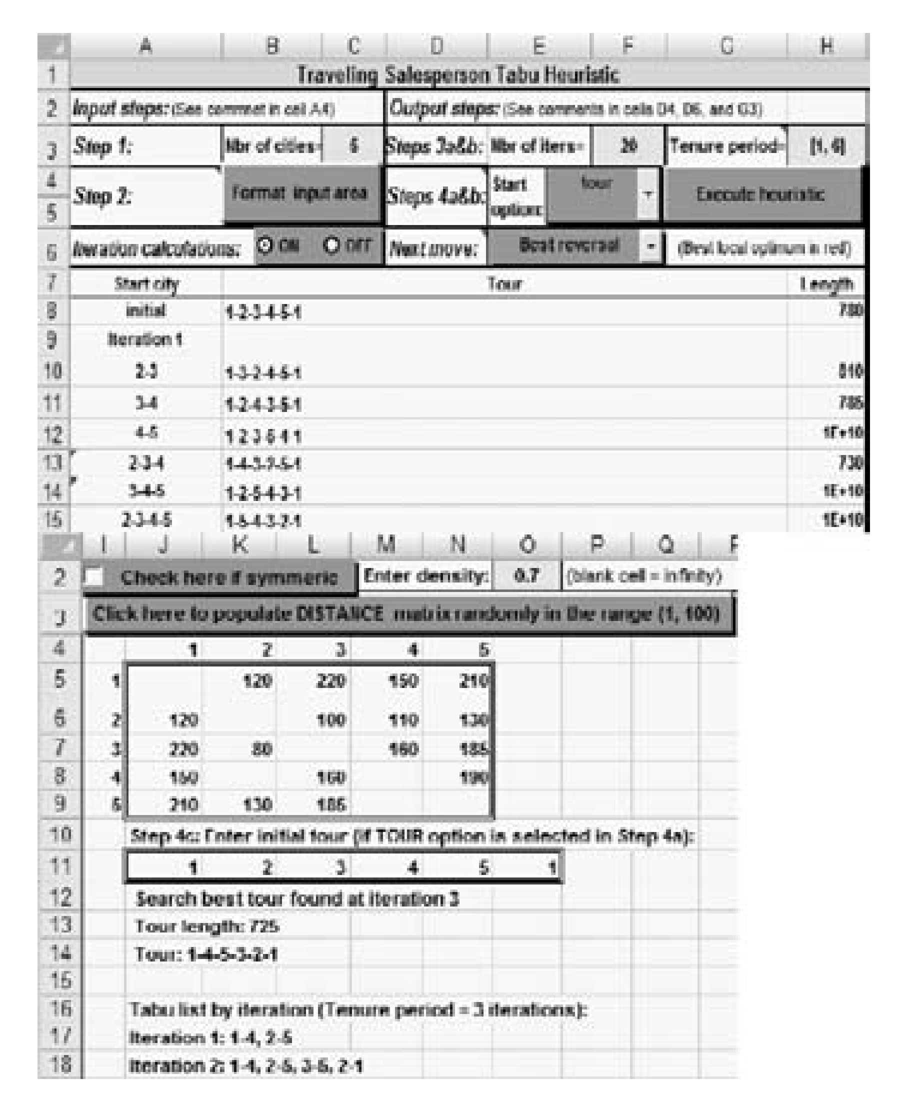


FIGURA 11.5

Metaheurística tabú aplicada al modelo TSP utilizando la hoja de cálculo Excel (archivo *excelTabuTSP.xls*)

3. *Experimento con Excel-AMPL.* La matriz siguiente proporciona las distancias entre 10 ciudades (todas las entradas faltantes $= \infty$). (Por comodidad, el archivo *prob11.5a-4.txt* presenta las distancias en formato AMPL).

Use el archivo *ExcelTabuTSP.xls* iniciando con lo siguiente:

(a) Un recorrido aleatorio.

(b) Recorrido 4-5-3-2-6-7-8-10-9-1-4.

(c) El mejor recorrido del vecino más cercano.

Compare la calidad de la solución en los incisos (a), (b) y (c) con la solución óptima exacta obtenida por AMPL, utilizando el archivo *amplCut.txt.*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		100	2	11	80	5	39	95		28
2	17		42	33	21	59	46		79	29
3		63		57	92		55		68	52
4	36	27	25		40	49	48	63	16	
5	51	11	46	60		22	11	13	54	55
6		20	46	15	93		76	47	21	10
7	17		45	88	28	26		33	30	49
8	35	49	87	76		55	64			93
9	35	48	100	3	55		41			73
10		50	70	43	82	43	23	49	89	

11.5.2 Algoritmo de recocido simulado aplicado al modelo TSP

La sección 10.3.2 explica que en cualquier iteración en el recocido simulado, ninguna solución de vecindad *no peor* siempre es aceptada como el siguiente movimiento. Si no existe tal solución, la búsqueda puede moverse a una solución de vecindad inferior condicionalmente si

$$R < e^{\left(\frac{L_{\text{actual}} - L_{\text{siguiente}}}{T}\right)}$$

donde

R = Número aleatorio (0,1)
L_{actual} = Longitud de recorrido en la iteración actual
$L_{\text{siguiente}}$ = Longitud de recorrido (inferior) en la iteración ($>L_{\text{actual}}$)
T = Temperatura

La temperatura T supone valores más pequeños a medida que se incrementa la cantidad de iteraciones de búsqueda, por lo que se reduce el valor de $e^{\left(\frac{L_{\text{actual}} - L_{\text{siguiente}}}{T}\right)}$, y se produce una búsqueda más selectiva. Incluso, la medida de aceptación favorece los movimientos cuyo valor objetivo, $L_{\text{siguiente}}$ se acerca más al valor objetivo actual, L_{actual}, porque incrementa el valor de $e^{\left(\frac{L_{\text{actual}} - L_{\text{siguiente}}}{T}\right)}$.

Los componentes principales del recocido simulado son los siguientes:

1. **Recorrido de inicio.** Hay cuatro opciones disponibles: (a) Un recorrido específico; (b) una ciudad de inicio específica para un recorrido construido por la heurística del vecino más cercano (sección 11.4-1); (c) el mejor entre todos los recorridos construidos por la heurística del vecino más cercano utilizando cada una de las ciudades 1, 2,…, y n como punto de inicio, y (d) un recorrido aleatorio.
2. **Inversión de subrecorrido.** Dos segmentos agregados reemplazan a dos segmentos eliminados para producir un nuevo recorrido (vea la sección 11.4-2 para los detalles).
3. **Programa de temperatura.** $\{T_k, k = 0, 1, \ldots\}$, T_0 = temperatura inicial, $T_k = r_k T_{k-1}$, $0 < r_k < 1, k = 1, 2, \ldots$, con el cambio de una temperatura a la siguiente ocurriendo cada t iteraciones de aceptación.
4. **Vecindad en la iteración *i*.** Todos los recorridos (incluidos los no factibles de longitud infinita) generados a partir de la aplicación de inversiones de subrecorrido (sección 11.4.2) al recorrido i.

5. Siguiente movimiento en la iteración i. Seleccione la inversión de subrecorrido que no *es peor* que el mejor recorrido actual; de lo contrario, examine los recorridos en el vecindario i en orden ascendente de la longitud de recorrido hasta que se acepte un movimiento (utilizando la medida de probabilidad).

Ejemplo 11.5-2

Utilizaremos la matriz de distancias del ejemplo 11.4-1 para demostrar la aplicación de la metaheurística de recocido simulado.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 120 & 220 & 150 & 210 \\ 120 & \infty & 100 & 110 & 13 \\ 220 & 80 & \infty & 160 & 185 \\ 150 & \infty & 160 & \infty & 190 \\ 210 & 130 & 185 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Suponga el programa de temperatura $T_k = .5T_{k-1}$ con $T_0 = 50$. Un cambio de T_{k-1} a T_k tiene lugar cada dos iteraciones de aceptación. El ejemplo se inicia con el recorrido no factible (longitud infinita) 3-2-5-4-1-3.

La tabla 11.7 detalla los cálculos para tres iteraciones. El mejor movimiento de inversión 5-4-1 en la iteración 1 se acepta porque da por resultado una mejor longitud de recorrido ($L_{\text{siguiente}} = 725$ contra $L_{\text{actual}} = \infty$. Esto significa que el recorrido 3-2-1-4-5-3 es la mejor solu-

TABLA 11.7 Solución de recocido simulado del ejemplo 11.5-2 con $T_k = .5T_{k-1}$, $T_0 = 50$, y cambio de T_{k-1} a T_k que ocurre cada dos iteraciones de aceptación

Iteración	Inversión	Recorrido	Longitud	L_{actual}	$L_{\text{siguiente}}$	T	$p = e^{\left(\frac{L_{\text{actual}} - L_{\text{siguiente}}}{T}\right)}$	R	Decisión
0	—	3-2-5-4-1-3	∞	∞		50	—		—
1	2-5	3-5-2-4-1-3	795			50			
	5-4	3-2-4-5-1-3	810			50			
	4-1	3-2-5-1-4-3	730			50			
	2-5-4	3-4-5-2-1-3	820			50			
	5-4-1	**3-2-1-4-5-3**	**725**	∞	725	50	—		Aceptar el movimiento, $L_{\text{siguiente}} < L_{\text{actual}}$
	2-5-4-1	3-1-4-5-2-3	790			50			
						50			
2	2-1	3-1-2-4-5-3	825			50			
	1-4	3-2-4-1-5-3	735	725	735	50	.8187	.8536	Rechazar el movimiento, $R > p$
	4-5	3-2-1-5-4-3	∞			50			
	2-1-4	**3-4-1-2-5-3**	**745**	725	745	50	.6703	.3701	Aceptar el movimiento, $R < p$
	1-4-5	3-2-5-4-1-3	∞			50			
	2-1-4-5	3-5-4-1-2-3	∞			50			
			∞						
3	4-1	3-1-4-2-5-3	∞			25			
	1-2	3-4-2-1-5-3	∞			25			
	2-5	3-4-1-5-2-3	750			25			
	4-1-2	**3-2-1-4-5-3**	**725**	745	725	25			Aceptar el movimiento, $L_{\text{siguiente}} < L_{\text{actual}}$
	1-2-5	3-4-5-2-1-3	820			25			
	4-1-2-5	3-5-2-1-4-3	745			25			

ción disponible hasta ahora. La iteración 2 produce movimientos inferiores, lo que significa que el movimiento anterior, 5-4-1 en la iteración 1, es un mínimo local. Por consiguiente, examinamos todos los recorridos en la iteración 2 en orden ascendente de longitudes de recorrido hasta que se acepta un recorrido (si todos los recorridos se rechazan, o se repite el examen con una nueva ronda de números aleatorios o la búsqueda termina). El movimiento 1-4 con una longitud de recorrido de 735 se rechaza porque $R = .8536$ es mayor que $p = e^{\left(\frac{725-735}{50}\right)} = .8187$. El siguiente movimiento en el orden, 2-1-4, con longitud de recorrido de 745 se acepta porque $R = .3701$ es menor que $p = e^{\left(\frac{725-745}{50}\right)} = .6703$.

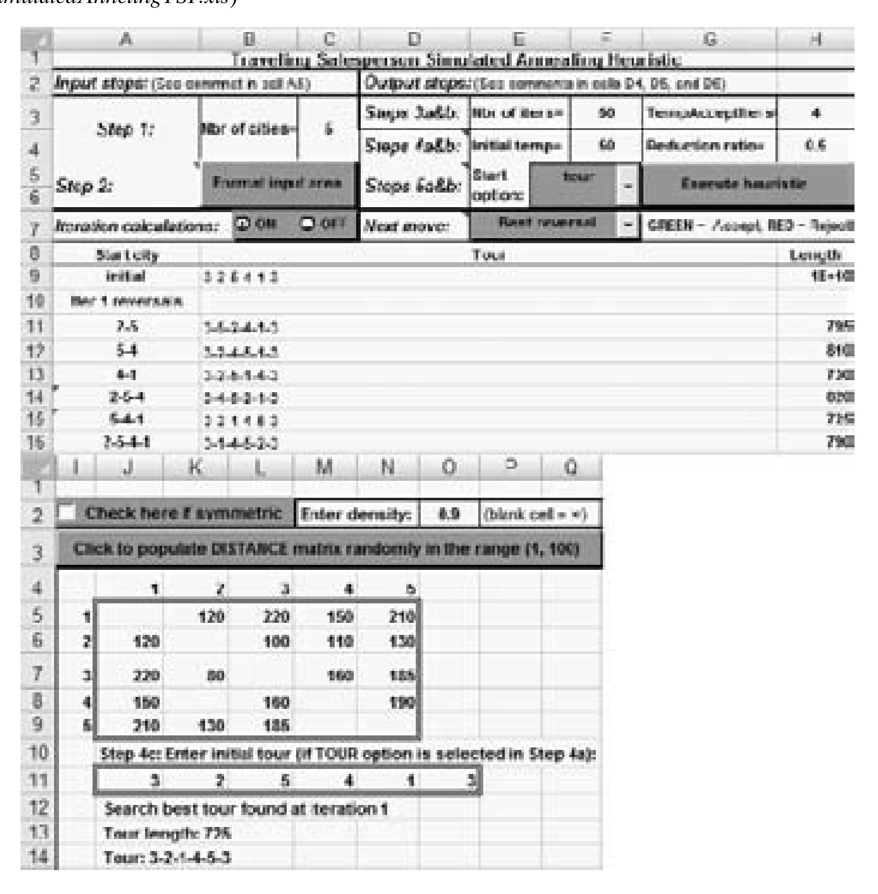
En la iteración 3 se obtuvieron dos iteraciones de aceptación en las iteraciones 1 y 2. Por consiguiente, la temperatura cambia de 50 a .5(50) = 25. El proceso iterativo continúa entonces hasta que ocurre una condición de terminación.

Momento de Excel

La figura 11.6 proporciona una reproducción de la aplicación de recocido simulado al modelo de TSP (archivo *excelSimulatedAnnealingTSP.xls*). La hoja de cálculo sigue el diseño general de la hoja de cálculo tabú de la figura 11.5.

FIGURA 11.6

Metaheurística de recocido simulado aplicada al modelo TSP utilizando la hoja de cálculo Excel (archivo *excelSimulatedAnnelingTSP.xls*)



CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.5B

1. Realice tres iteraciones más del ejemplo 11.5-2.
2. Aplique el recocido simulado a los siguientes problemas iniciando con el mejor recorrido del vecino más cercano.
   - **(a)** El problema de secuenciación de pinturas del ejemplo 11.1-1.
   - **(b)** Problema 1 del conjunto 11.2a.
   - **(c)** Problema 4 del conjunto 11.2a.
   - **(d)** Problema 5 del conjunto 11.2a.
3. *Experimento con Excel-AMPL.* La siguiente matriz proporciona las distancias entre 10 ciudades (todas las entradas faltantes = ∞). (Por comodidad, el archivo *prob11.5b-3.txt* proporciona las distancias en formato AMPL.)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		100	2	11	80	5	39	95		28
2	17		42	33	21	59	46		79	29
3		63		57	92		55		68	52
4	36	27	25		40	49	48	63	16	
5	51	11	46	60		22	11	13	54	55
6		20	46	15	93		76	47	21	10
7	17		45	88	28	26		33	30	49
8	35	49	87	76		55	64			93
9	35	48	100	3	55		41			73
10		50	70	43	82	43	23	49	89	

   Use el archivo *excelSimulatedAnnealingTSP.xls* iniciando con lo siguiente:
   - **(a)** Un recorrido aleatorio.
   - **(b)** Recorrido 4-5-3-2-6-7-8-10-9-1-4.
   - **(c)** El mejor recorrido del vecino más cercano.

   Compare la calidad de la solución en los incisos (a), (b) y (c) con la solución óptima exacta obtenida por AMPL.

11.5.3 Algoritmo genético aplicado al modelo TSP

En la metaheurística genética presentada en la sección 10.3.3, se seleccionan dos padres de una población para crear dos hijos. Los hijos luego se convierten en padres y reemplazan a los dos padres menos aptos (en función de longitud de recorrido) en la población. El proceso de crear hijos y de retirar a los padres se repite hasta que se llega a una condición de terminación.

La siguiente es una descripción de los principales elementos de la metaheurística genética tal como se aplica al TSP.

1. Codificación de genes. La codificación puede ser binaria o numérica. La literatura presenta heurísticas basadas en ambos tipos de codificación. Esta presentación adopta el código de recorrido numérico directo (por ejemplo, 1-2-5-4-3-1).

2. Población inicial. El primer paso es identificar los conjuntos de código que salen de cada nodo en la red a lo que se puede llegar por medio de un segmento de recorrido *finito*. Comenzando desde un nodo (origen) específico, un recorrido se construye agregando en la posición más a la derecha un nodo único *no* redundante seleccionado de entre todos los nodos que salen del último nodo agregado. Si se llega a un

TABLA 11.8 Pasos para crear los hijos Cl y C2 a partir de los padres Pl y P2 utilizando un cruce ordenado

Paso	Acción	Ejemplo (suponer $n = 7$ nodos)
0	Seleccionar P1 y P2 de la población	P1 = 1-2-**5**-**4**-**3**-7-6 (enlace de regreso al nodo 1) P2 = 5-4-**2**-**6**-**3**-1-7 (enlace de regreso al recorrido 5)
1	Seleccionar al azar dos puntos de cruce c_1 y c_2 con $c_1 < c_2$.	$R = .4425$ produce $c_1 = \text{int}(7 \times .3425) + 1 = 3$ $R = .7123$ produce $c_2 = \text{int}(7 \times .7123) + 1 = 5$
2	Intercambiar posiciones ($c_1, c_1 + 1,\ldots, c_2$) en P1 y P2 para formar parcialmente C2 y C1, respectivamente.	C1 = ?-?-**2**-**6**-**3**-?-? C2 = ?-?-**5**-**4**-**3**-?-?
3	Crear la lista L1 (L2) reacomodando los elementos de P1(P2) en el sentido de las manecillas del reloj $c_2 + 1, c_2 + 2,\ldots, n, 1, 2,\ldots, c_2$	L1 = (7, 6, 1, 2, 5, 4, 3) L2 = (1, 7, 5, 4, 2, 6, 3)
4	De L1 (L2), cree L1′ (L2′) eliminando los nodos ya asignados a C1(2) en el paso 2 al mismo tiempo que se conserva el orden en L1 y L2.	L1′ = L1 − (2, 6, 3) = (7, 1, **5**, **4**) L2′ = L2 − (5, 4, 3) = (1, 7, **2**, **6**)
5	Asignar los elementos de L1′ (L2′) a los elementos faltantes en C1(C2) en el orden $c_2 + 1, c_2 + 2,\ldots, n, 1, 2,\ldots, c_1 - 1$.	C1 = **5**-**4**-2-6-3-7-1 (enlace de regreso al nodo 5) C2 = **2**-**6**-5-4-3-1-7 (enlace de regreso al nodo 2)

punto donde no existe ningún nodo de salida único, todo el proceso se repite hasta que se encuentre un recorrido de longitud finita.

El requerimiento que estipula que se llegue a los nodos de salida por medio de enlaces finitos garantiza que el recorrido construido es factible (tiene una longitud finita). A diferencia del algoritmo tabú y del recocido simulado donde una nueva búsqueda puede ser no factible, es posible que los recorridos de padre no factible nunca conduzcan a la creación de recorridos hijos factibles. Este resultado es particularmente cierto cuando la matriz de distancias es dispersa.

3. Creación de un hijo. El proceso se inicia seleccionando dos padres, P1 y P2, cuyos genes se intercambian para crear dos hijos, C1 y C2. Supondremos que P1 representa el mejor padre (en función de la longitud de recorrido) y P2 el siguiente mejor. Hay varias formas de intercambio de genes [vea Larrañaga y colaboradores (1999) para una lista de 25 de estos procedimientos]. En esta presentación utilizaremos el procedimiento de **cruce ordenado**, cuyos pasos se explican en la tabla 11.8.

El procedimiento propuesto para la creación de hijos puede conducir a recorridos no factibles (con segmentos faltantes). Si esto sucede, el procedimiento debe repetirse cuantas veces sea necesario hasta que se presente la factibilidad de la descendencia.

4. Mutación. La mutación en los genes del hijo ocurre con una pequeña probabilidad de aproximación de .1, al intercambiarse los nodos de dos posiciones seleccionadas al azar en el recorrido (excluidas las del nodo de inicio). La selección al azar puede repetirse para asegurar dos posiciones distintas.

Ejemplo 11.5-3

Utilizaremos el modelo TSP del ejemplo 11.4-1 para demostrar la aplicación de la heurística genética.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 120 & 220 & 150 & 210 \\ 120 & \infty & 100 & 110 & 130 \\ 220 & 80 & \infty & 160 & 185 \\ 150 & \infty & 160 & \infty & 190 \\ 210 & 130 & 185 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

La lista de nodos de salida se determina a partir de la matriz de distancias como

Nodo i	Nodos de salida
1	$\{2, 3, 4, 5\}$
2	$\{1, 3, 4, 5\}$
3	$\{1, 2, 4, 5\}$
4	$\{1, 3, 5\}$
5	$\{1, 2, 3\}$

La tabla 11.9 proporciona los detalles de las iteraciones 1, 2 y 11. La iteración 11 proporciona la mejor solución (la cual también resulta ser óptima). Las iteraciones que intervienen se omitieron para conservar espacio.

Demostramos la determinación de la población inicial (6 padres) en la iteración 1 considerando el padre 1. Comenzando con el nodo de inicio 1, se selecciona el nodo 4 al azar de entre el conjunto de nodos de salida {2,3,4,5}. Luego, los nodos salientes del nodo 4 son {1,3,5}−{1} porque {1} ya está en el recorrido parcial. Seleccionando el nodo 5 al azar se produce el recorrido parcial 1-4-5. El proceso se repite hasta que se construye el recorrido completo 1-4-5-2-3-1. Tengamos en cuenta que si la construcción del recorrido se detiene (no pueden agregarse nodos nuevos), entonces todo el proceso debe repetirse de nuevo. Por ejemplo, la construcción del recorrido no puede continuar más allá del recorrido parcial 1-2-3-5 porque no hay ninguna conexión del nodo 5 al nodo de salida 4 (el único restante).

TABLA 11.9 Algoritmo genético aplicado al modelo TSP del ejemplo 11.4.3

Iteración	Miembro	Recorrido	Cruces	Longitud
1	1	1-4-5-2-3-1		790
	2	3-2-4-5-1-3		810
	3	1-2-4-5-3-1		825
	(Padre 2) 4	2-5-**3-4-1**-2		745
	5	3-4-5-1-2-3		780
	(Padre 1) 6	1-5-**3-2-4**-1		735
	Hijo 1	5-2-**3-4-1**-5	3 y 5	750
	Hijo 2	5-1-**3-2-4**-5		810
2	1	1-4-5-2-3-1		790
	2	5-1-3-2-4-5		810
	3	5-2-3-4-1-5		750
	(Padre 2) 4	2-5-3-**4-1**-2		745
	5	3-4-5-1-2-3		780
	(Padre 1) 6	1-5-3-**2-4**-1		735
	Hijo 1	5-3-2-4-1-5	4 y 5	735
	Hijo 2	5-3-1-2-4-5		825
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
11	(Padre 2) 1	1-5-**3-2**-4-1		735
	2	5-3-2-4-1-5		735
	3	5-3-2-4-1-5		735
	4	5-3-2-4-1-5		735
	(Padre 1) 5	4-5-**3-2**-1-4		725
	6	5-3-2-4-1-5		735
	Hijo 1	4-5-3-2-1-4	3 y 4	725
	Hijo 2	1-5-3-2-4-1		735

En la iteración 1, P1 = 1-5-**3-2-4** y P2 = 2-5-**3-4-1** porque son los dos padres más aptos (observe que las definiciones de P1 y P2 no incluyen los últimos elementos 1 y 2. respectivamente). Utilizando los puntos de cruce (generados al azar) $c_1 = 3$ y $c_2 = 5$, obtenemos C1 = ?-?-**3-4-1** y C2 = ?-?-**3-2-4** parciales. Luego, L1′ = {1,5,3,2,4} — {3,4,1} = {5,2}, lo cual produce Cl = 5-2-**3-4-1**. Asimismo, L2′ = {2,5,**3,4,1**} — {3,2,4} = {5,1}, lo cual produce C2 = 5-1-**3-2-4**. Ahora los hijos C1 y C2 reemplazan a los padres menos aptos 2 y 3 que corresponden a las longitudes de los peores (más largos) recorridos (810 and 825) para producir la nueva población que se utilizará en la iteración 2 (es irrelevante cuál hijo reemplace a cuál de los dos peores padres).

Para problemas pequeños, las iteraciones pueden "saturarse" en una forma un tanto rápida, en el sentido de que los hijos no pueden distinguirse de los padres que reemplazan, como lo demuestra la iteración 11. El único recurso en este caso es iniciar un nuevo ciclo de ejecución que permita utilizar una nueva condición de inicio (aleatoria).

Momento de Excel

La figura 11.7 muestra un modelo general basado en Excel para experimentar con la metaheurística genética (archivo *excelGeneticTSPxls)*. El modelo puede ejecutarse una iteración a la vez o de forma automática hasta que se llega a una condición de terminación. La aleatoriedad de las condiciones de inicio proporciona condiciones diferentes cada vez que se pulsa el botón de ejecución.

FIGURA 11.7

Metaheurística genética aplicada al modelo TSP utilizando una hoja de calculo Excel (archivo *excelGeneticTSP.xls*)

Heuristic Integer Programming Using Genetic Search

Check here if symmerical | Enter density | 0.7 | (blank cell = infinity)

	1	2	3	4	5
1		120	220	150	210
2	120		130	110	130
3	220	80		160	185
4	150		150		190
5	210	130	185		

Search best solution found at iteration 1 of cycle 1

Tour Length = 745

Tour: 3-5-2-1-4-3

CONJUNTO DE PROBLEMAS 11.5C

1. Realice las iteraciones 3 y 4 en el ejemplo 11.5-3.

2. Aplique la metaheurística genética a los siguientes problemas iniciando con el mejor recorrido del vecino más cercano.

(a) El problema de secuenciación de pinturas del ejemplo 11.1-1.

(b) Problema 1 del conjunto 11.2a.

(c) Problema 4 del conjunto 11.2a.

(d) Problema 5 del conjunto 11.2a.

3. *Experimento con Excel-AMPL.* La siguiente matriz proporciona las distancias entre 10 ciudades (todas las entradas faltantes = ∞). (Por comodidad, el archivo *probl1.5c-3.txt* proporciona las distancias en formato AMPL).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		100	2	11	80	5	39	95		28
2	17		42	33	21	59	46		79	29
3		63		57	92		55		68	52
4	36	27	25		40	49	48	63	16	
5	51	11	46	60		22	11	13	54	55
6		20	46	15	93		76	47	21	10
7	17		45	88	28	26		33	30	49
8	35	49	87	76		55	64			93
9	35	48	100	3	55		41			73
10		50	70	43	82	43	23	49	89	

Utilice el archivo file *excelGeneticTSP.xls* comenzando con lo siguiente:

(a) Un recorrido aleatorio.

(b) Recorrido 4-5-3-2-6-7-8-10-9-1-4-5.

(c) El mejor recorrido del vecino más cercano.

Compare la calidad de las soluciones en los incisos (a); (b) y (c) con la solución óptima exacta obtenida por AMPL.

BIBLIOGRAFÍA

Bosch, R., y A. Herman, "Continuous Line Drawings via the Traveling Salesman Problem", *Operations Research Letters,* vol. 32, págs. 302-303, 2004.

Garfinkel, R.S., "Minimizing Wallpaper Waste. Part I: A Class of Travelling Salesman Problems", *Operations Research,* vol. 25, págs. 741-751, 1977.

Gilmore, P.C., y Gomory, R.E., "Sequencing a One State Variable Machine: A Solvable Case of the Travelling Salesman Problem", *Operations Research,* vol. 12, págs. 655-679, 1964.

Laporte, G., "The Traveling Salesman Problem: An Overview of Exact and Approximate Algorithms", *European Journal of Operational Research*, vol. 59, núm. 2, págs. 231-247, 1992.

Larrañaga, P., C. Kuijpers, R. Murga, I. Inza, y S. Dizdarevich, "Genetic Algorithms for the Travelling Salesman Problem: A Review of Representations and Operators", *Artificial Intelligence Review*, núm. 13, págs. 129-170, 199.

Lenstra, J., y Rinnooy Kan, A., “Some Simple Applications of the Traveling Salesman Problem”, *Operational Research Quarterly*, vol. 26, núm. 4, págs. 717-733, 1975.

Ratliff, H., y Rosenthal, A., “Order-picking in a Rectangular Warehouse: A Solvable Case of the Traveling Salesman Problem”, *Operations Research*, vol. 31, págs. 507-521, 1983.

Yamada, Y., y R. Nakano, “Genetic Algorithms for Job-Shop Scheduling Problems”, *Proceedings of Modern Heuristic for Decision Support,* Seminario UNICOM, Londres, 18-19 de marzo de 1997, págs. 67-81.

CAPÍTULO 12

Programación dinámica determinística

Aplicación de la vida real. Optimización del corte de árboles y asignación de troncos en Weyerhaeuser

Los árboles maduros se talan y aserran transversalmente en troncos para fabricar diferentes productos finales (madera para construcción, madera contrachapada, tablas de aglomerado de madera, o papel). Las especificaciones de los troncos (por ejemplo longitud y diámetro finales) difieren según el aserradero donde se procesan los troncos. Con árboles talados hasta de 100 pies de altura, la cantidad de combinaciones de corte que satisfacen los requerimientos del aserradero puede ser grande, y la forma de cortar el árbol en troncos puede afectar los ingresos. El objetivo es determinar las combinaciones de corte que maximicen el ingreso total. El estudio utiliza programación dinámica para optimizar el proceso. El sistema propuesto se implementó por primera vez en 1978 con un incremento anual en la utilidad de al menos $7 millones. (El caso 8 del capítulo 26, en inglés, en el sitio web proporciona los detalles del estudio).

12.1 NATURALEZA RECURSIVA DE LOS CÁLCULOS DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA (PD)

La idea principal de la programación dinámica (PD) es descomponer el problema en subproblemas (más manejables). Los cálculos se realizan entonces recursivamente donde la solución óptima de un subproblema se utiliza como dato de entrada al siguiente problema. La solución para todo el problema está disponible cuando se soluciona el último subproblema. La forma en que se realizan los cálculos recursivos depende de cómo se descomponga el problema original. En particular, normalmente los subproblemas están vinculados por restricciones comunes. La factibilidad de estas restricciones comunes se mantiene en todas las iteraciones.

Ejemplo 12.1-1 (Problema de la ruta más corta)

Supongamos que deseamos seleccionar la ruta por carretera más corta entre dos ciudades. La red en la figura 12.1 proporciona las posibles rutas entre la ciudad de inicio en el nodo 1 y la ciudad destino en el nodo 7. Las rutas pasan por ciudades intermedias designadas por los nodos 2 a 6.

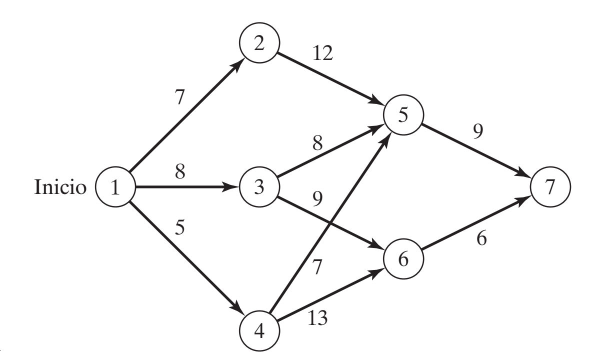


FIGURA 12.1
Red de rutas para el ejemplo 12.1-1

Podemos resolver este problema enumerando todas las rutas entre los nodos 1 y 7 (hay cinco rutas). Sin embargo, la enumeración exhaustiva es computacionalmente insoluble en redes grandes.

Para resolver el problema por PD, primero lo descomponemos en **etapas** como se indica mediante las líneas de rayas verticales en la figura 12.2. A continuación, realizamos por separado los cálculos en cada etapa.

La idea general para determinar la ruta más corta es calcular las distancias (acumulativas) más cortas a todos los nodos terminales de una etapa, y luego utilizarlas como datos de entrada a la etapa inmediatamente subsiguiente. Partiendo del nodo 1, la etapa 1 llega a tres nodos terminales (2, 3 y 4) y sus cálculos son simples.

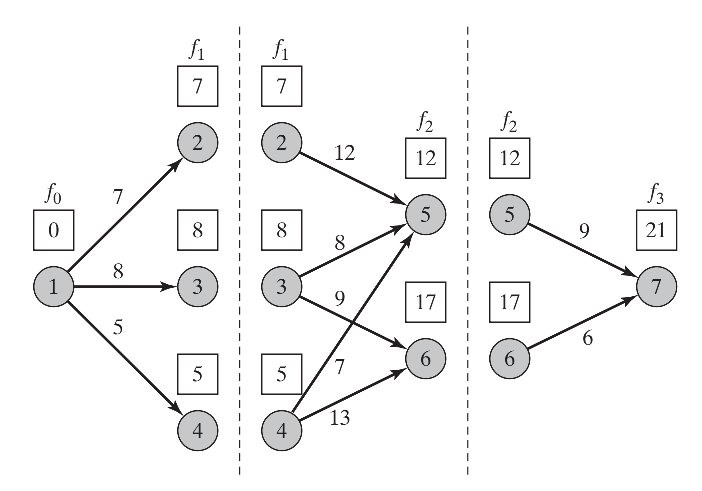
Resumen de la etapa 1.

Distancia más corta del nodo 1 al nodo 2 = 7 millas (*desde el nodo* 1)

Distancia más corta del nodo 1 al nodo 3 = 8 millas (*desde el nodo* 1)

Distancia más corta del nodo 1 al nodo 4 = 5 millas (*desde el nodo* 1)

FIGURA 12.2
Descomposición del problema de la ruta más corta en etapas



Luego, la etapa 2 tiene dos nodos terminales, 5 y 6. La figura 12.2 muestra que se puede llegar al nodo 5 desde los nodos 2, 3 y 4 por las rutas (2,5), (3,5) y (4,5). Esta información, junto con los resultados resumidos (distancias más cortas) en la etapa 1, determina la distancia (acumulativa) más corta al nodo 5 como

$$\begin{pmatrix}\text{Distancia más corta}\\ \text{al nodo 5}\end{pmatrix} = \min_{i=2,3,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{Distancia más corta}\\ \text{al nodo } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Distancia del}\\ \text{nodo } i \text{ al nodo 5}\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \min\begin{Bmatrix} 7 + 12 = 19 \\ 8 + 8 = 16 \\ 5 + 7 = 12 \end{Bmatrix} = 12\,(\textit{desde el nodo } 4)$$

Se puede llegar al nodo 6 sólo desde los nodos 3 y 4. Por lo tanto

$$\begin{pmatrix}\text{Distancia más corta}\\ \text{al nodo 6}\end{pmatrix} = \min_{i=3,4}\left\{\begin{pmatrix}\text{Distancia más corta}\\ \text{al nodo } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Distancia del}\\ \text{nodo } i \text{ al nodo 6}\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \min\begin{Bmatrix} 8 + 9 = 17 \\ 5 + 13 = 18 \end{Bmatrix} = 17\,(\textit{desde el nodo } 3)$$

Resumen de la etapa 2.

Distancia más corta del nodo 1 al nodo 5 = 12 millas (*desde el nodo* 4)

Distancia más corta del nodo 1 al nodo 6 = 17 millas (*desde el nodo* 3)

El último paso es considerar la etapa 3. Se puede llegar al nodo de destino 7 desde el nodo 5 o desde el 6. Utilizando los resultados resumidos *desde la etapa 2* y las distancias de los nodos 5 y 6 al nodo 7, obtenemos

$$\begin{pmatrix}\text{Distancia más corta}\\ \text{al nodo 7}\end{pmatrix} = \min_{i=5,6}\left\{\begin{pmatrix}\text{Distancia más corta}\\ \text{al nodo } i\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Distancia del}\\ \text{nodo } i \text{ al nodo 7}\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \min\begin{Bmatrix} 12 + 9 = 21 \\ 17 + 6 = 23 \end{Bmatrix} = 21\ (\textit{desde el nodo } 5)$$

Resumen de la etapa 3.

La distancia más corta desde el nodo 1 al nodo 7 = 21 millas (*desde el nodo* 5)

El resumen de la etapa 3 muestra que la distancia más corta entre los nodos 1 y 7 es de 21 millas. Para determinar la ruta óptima comenzamos con el resumen de la etapa 3, donde el nodo 7 se conecta al nodo 5; en el resumen de la etapa 2 el nodo 4 se conecta al nodo 5, y en el resumen de la etapa 1 el nodo 4 se conecta al nodo 1. Por lo tanto, la ruta más corta es $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$.

El ejemplo revela las propiedades básicas de los cálculos de PD.

1. Los cálculos en cada etapa son una función de las rutas factibles de dicha etapa, y sólo de esa etapa.
2. Una etapa actual está conectada a la etapa *inmediatamente precedente* sólo (sin tener en cuenta las etapas anteriores) con base en el resumen de distancias más cortas de la etapa inmediatamente precedente.

Ecuación recursiva. Esta sección muestra cómo pueden expresarse matemáticamente los cálculos recursivos en el ejemplo 12.1-1. Sea $f_i(x_i)$ la distancia más corta al nodo x_i en la etapa i, y defina $d(x_{i-1}, x_i)$ como la distancia del nodo x_{i-1} al nodo x_i. La ecuación recursiva de PD se define como

$$f_0(x_0 = 1) = 0$$

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{todas factibles} \\ (x_{i-1}, x_i) \text{ rutas}}} \{d(x_{i-1}, x_i) + f_{i-1}(x_{i-1})\}, i = 1, 2, 3$$

Todas las distancias se miden desde 0 al establecer $f_0(x_0 = 1) = 0$. La ecuación recursiva principal expresa la distancia más corta $f_i(x_i)$ en la etapa i como una función del siguiente nodo, x_i. En terminología de PD, x_i se conoce como el **estado** en la etapa i. El *estado* conecta las *etapas* sucesivas de una manera que permite tomar decisiones factibles óptimas en una etapa futura independientemente de las decisiones que se hayan tomado en todas las etapas precedentes.

La definición del *estado* conduce al siguiente marco unificador para la PD.

Principio de optimalidad. Las decisiones futuras para todas las etapas *futuras* constituyen una política óptima independientemente de la política adoptada en todas las etapas *precedentes.*

La implementación del principio de optimalidad es evidente en los cálculos del ejemplo 12.1-1. En la etapa 3, los cálculos recursivos en el nodo 7 utilizan la distancia más corta a los nodos 5 y 6 (es decir, los estados de la etapa 2) sin preocuparse sobre cómo se llega a los nodos 5 y 6 desde el nodo de inicio 1.

El principio de optimalidad no aborda los detalles de cómo se optimiza un subproblema. La razón es la naturaleza genérica del subproblema. Puede ser lineal o no lineal, y la cantidad de alternativas puede ser finita o infinita. Todo lo que hace el principio de optimalidad es "descomponer" el problema original en subproblemas más manejables computacionalmente.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.1A

***1.** Resuelva el problema 12.1-1, suponiendo que se utilizan las siguientes rutas:

$$d(1, 2) = 5, d(1, 3) = 9, d(1, 4) = 8$$

$$d(2, 5) = 10, d(2, 6) = 17$$

$$d(3, 5) = 4, d(3, 6) = 10$$

$$d(4, 5) = 9, d(4, 6) = 9$$

$$d(5, 7) = 8$$

$$d(6, 7) = 9$$

2. Soy un ávido excursionista. El verano pasado, mi amigo G. Don y yo nos fuimos de campamento durante 5 días a las hermosas White Mountains en New Hampshire. Decidimos limitar nuestra excursión a tres picos muy conocidos: Los montes Washington, Jefferson y Adams. El monte Washington tiene un sendero de 6 millas de la base a la cumbre. Los senderos correspondientes de los montes Jefferson y Adams son de 4 y 5 millas. Los senderos que conectan las bases de las tres montañas son de 3 millas entre los montes Washington y Jefferson; de 2 millas entre los montes Jefferson y Adams, y de 5 millas entre los montes Adams y Washington. Comenzamos el primer día en la base del monte

Washington y regresamos al mismo lugar al final de los 5 días. Nuestro objetivo era recorrer a pie tantas millas como pudiéramos. También decidimos escalar una montaña exactamente cada día y acampar en la base de la montaña que escalaríamos el siguiente día. Además, decidimos que no se podía visitar la misma montaña en dos días consecutivos. Utilice la PD para programar la caminata de 5 días.

12.2 RECURSIVIDAD HACIA ADELANTE (AVANCE) Y HACIA ATRÁS (RETROCESO)

El ejemplo 12.1-1 utiliza la **recursividad hacia adelante** en la cual los cálculos proceden de la etapa 1 a la etapa 3. El mismo ejemplo puede resolverse por medio de **recursividad hacia atrás**, comenzando en la etapa 3 y terminando en la etapa 1.

Naturalmente, la recursividad hacia adelante y hacia atrás da la misma solución óptima. Aun cuando el procedimiento hacia adelante parece más lógico, la mayor parte de la literatura de PD utiliza la recursividad hacia atrás. La razón de esta preferencia es que, por lo general, la recursividad hacia atrás puede ser más eficiente desde el punto de vista computacional.

Demostraremos el uso de la recursividad hacia atrás aplicándola al ejemplo 12.1-1. La demostración también nos brindará la oportunidad de presentar los cálculos de PD en una forma tabular compacta.

Ejemplo 12.2-1

La ecuación recursiva inversa para el ejemplo 12.2-1 es

$$f_4(x_4 = 7) = 0$$

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{\text{todas factibles} \\ \text{rutas } (x_i,\, x_{i+1})}} \{d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1, 2, 3$$

El orden de los cálculos es $f_3 \rightarrow f_2 \rightarrow f_1$.

Etapa 3. El nodo 7 ($x_4 = 7$) está conectado a los nodos 5 y 6 ($x_3 = 5$ y 6) exactamente con una ruta cada uno. La siguiente tabla resume los cálculos de la etapa 3:

	$d(x_3, x_4)$	Solución óptima	
x_3	$x_4 = 7$	$f_3(x_3)$	x_4^*
5	9	9	7
6	6	6	7

Etapa 2. La ruta (2,6) no existe. Dada $f_3(x_3)$ desde la etapa 3, podemos comparar las alternativas factibles como se muestra en la siguiente tabla:

	$d(x_2,x_3) + f_3(x_3)$		Solución óptima	
x_2	$x_3 = 5$	$x_3 = 6$	$f_2(x_2)$	x_3^*
2	12 + 9 = 21	—	21	5
3	8 + 9 = 17	9 + 6 = 15	15	6
4	7 + 9 = 16	13 + 6 = 19	16	5

La solución óptima de la etapa 2 se lee como sigue: Para las ciudades 2 y 4, la ruta más corta pasa por las ciudad 5; y para la ciudad 3, la ruta más corta pasa por la ciudad 6.

Etapa 1. Partiendo del nodo 1, tenemos las rutas alternativas: (1,2), (1,3) y (1,4). Utilizando $f_2(x_2)$ de la etapa 2, obtenemos

	$d(x_1, x_2) + f_2(x_2)$			Solución óptima	
x_1	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$f_1(x_1)$	x_2^*
1	$7 + 21 = 28$	$8 + 15 = 23$	$5 + 16 = 21$	21	4

La solución de la etapa 1 conecta la ciudad 1 con la ciudad 4. Luego, la solución de la etapa 2 conecta la ciudad 4 con la ciudad 5. Por último, la solución de la etapa 3 conecta la ciudad 5 con la ciudad 7. La ruta óptima es $1 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 7$, y la distancia asociada es de 21 millas.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.2A

1. Para el problema 1, conjunto 12.1a, desarrolle la ecuación recursiva hacia atrás y utilícela para hallar la solución óptima.

2. Para el problema 2, conjunto 12.1a, desarrolle la ecuación recursiva hacia atrás, y utilícela para encontrar la solución óptima.

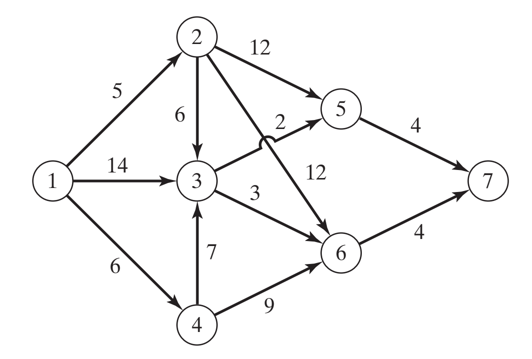
*__3.__ Para la red de la figura 12.3 se desear determinar la ruta más corta entre las ciudades 1 y 7. Defina las etapas y los estados por medio de la recursividad hacia atrás, y luego resuelva el problema.

12.3 APLICACIONES DE PD SELECCIONADAS

Esta sección presenta cuatro aplicaciones, cada una con una nueva idea en la implementación de la PD. Todos los ejemplos utilizan la ecuación recursiva *hacia atrás* debido a su prevalencia en la literatura.

FIGURA 12.3

Red para el problema 3, conjunto 12.2a



Conforme estudie cada aplicación, preste especial atención a los tres elementos básicos del modelo PD:

1. Definición de las *etapas*
2. Definición de las *alternativas* en cada etapa
3. Definición de los *estados* para cada etapa

De los tres elementos, la definición del *estado* suele ser la más sutil. Las aplicaciones que se presentan aquí muestran que la definición del estado varía según la situación que se ha de modelar. No obstante, a medida que investigue cada aplicación se dará cuenta que es útil considerar las siguientes preguntas:

1. ¿Qué relaciones ligan a las etapas entre sí?
2. ¿Qué información se requiere para tomar decisiones factibles en la etapa actual independientemente de cómo se hayan tomado las decisiones en las etapas precedentes?

Puede mejorar su comprensión del concepto de *estado* si cuestiona la validez de la forma en que se definió aquí. Pruebe otra definición que le parezca "más lógica" y utilícela en los cálculos recursivos. Pronto descubrirá que las definiciones presentadas aquí son correctas. Entre tanto, el proceso mental asociado le permitirá entender mejor el rol de los *estados* en el desarrollo de la ecuación recursiva de PD.

12.3.1 Modelo de la mochila/equipo de vuelo/carga de contenedor

El modelo de la mochila tiene que ver clásicamente con el hecho de determinar los artículos más valiosos que un combatiente carga en una mochila. El problema representa un modelo de asignación de recursos general en el cual se utilizan recursos limitados por varias actividades económicas. El objetivo es maximizar el rendimiento total.[1]

La ecuación recursiva (hacia atrás) se desarrolla para el problema general de asignar n artículos a una mochila con capacidad de peso W. Sea m_i la cantidad de unidades del artículo i en la mochila, y defina r_i y w_i como el ingreso unitario y el peso del artículo i. El problema general se representa como

$$\text{Maximizar } z = r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_nm_n$$

sujeto a

$$w_1m_1 + w_2m_2 + \cdots + w_nm_n \leq W$$

$$m_1, m_2, \ldots, m_n \text{ enteros no negativos}$$

Los tres elementos del modelo son

[1]El problema de la *mochila* también se conoce en la literatura como el problema del *equipo de vuelo* (determinación de los artículos más valiosos que un piloto de *jet* lleva a bordo) y el problema de *carga de un contenedor* (determinación de los artículos más valiosos que se cargarán en un buque de la armada). ¡Parece que los tres nombres fueron acuñados para garantizar una representación igual de las tres ramas de las fuerzas armadas: Ejército, Fuerza Aérea y Armada!

1. La *etapa i* está representada por el artículo i, $i = 1, 2,\ldots, n$.
2. Las *alternativas* en la etapa i son la cantidad de unidades del artículo i, $m_i = 0, 1, \ldots, \left[\frac{W}{w_i}\right]$, donde $\left[\frac{W}{w_i}\right]$ es el mayor entero que es menor o igual a $\frac{W}{w_i}$. Esta definición permite que la solución distribuya algunos, ninguno, o todos los recursos W a cualquiera de los m artículos. El rendimiento para m_i es $r_i m_i$.
3. El *estado* en la etapa i está representado por x_i, el peso total asignado a las etapas (artículos) i, $i + 1,\ldots$, y n. Esta definición reconoce que el límite de peso es la única restricción que liga a todas las n etapas.[2]

   Defina

   $f_i(x_i)$ = rendimiento máximo para las etapas i, $i + 1$, y n, dado el estado x_i

La manera más conveniente de construir la ecuación recursiva es un procedimiento de dos pasos:

Paso 1. Exprese $f_i(x_i)$ como una función de $f_i(x_{i+1})$ como sigue:

$$f_{n+1}(x_{n+1}) \equiv 0$$

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{m_i=0,1,\ldots,\left[\frac{W}{w_i}\right]\\ x_i \leq W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1, 2, \ldots, n$$

Paso 2. Exprese x_{i+1} como una función de x_i para asegurar la consistencia con el lado izquierdo de la ecuación recursiva. Por definición, $x_i - x_{i+1} = w_i m_i$ representa el peso utilizado en la etapa i. Por lo tanto, $x_{i+1} = x_i - w_i m_i$, y la ecuación recursiva apropiada se da como

$$f_i(x_i) = \max_{\substack{m_i=0,1,\ldots,\left[\frac{W}{w_i}\right]\\ x_i \leq W}} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, i = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplo 12.3-1

Un barco de 4 toneladas puede cargarse con uno o más de tres artículos. La siguiente tabla da el peso unitario, w_i, en toneladas y el ingreso unitario en miles de dólares, r_i, para el artículo i. El objetivo es determinar la cantidad de unidades de cada artículo que maximizará el rendimiento total.

Artículo i	w_i	r_i
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Como el peso unitario w_i y el peso máximo W son enteros, el estado x_i asume sólo valores enteros.

Etapa 3. El peso exacto a ser asignado a la etapa 3 (artículo 3) no se conoce con anticipación pero puede suponer uno de los valores $0, 1,\ldots$, y 4 (porque $W = 4$ toneladas y $w_3 = 1$ tonelada). Un valor de m_3 es factible sólo si $w_3 m_3 \leq x_3$. Por lo tanto se excluyen todos los valores no facti-

[2]La definición del estado puede ser multidimensional. Digamos que el volumen de la mochila puede imponer otra restricción. Por lo general, un estado multidimensional implica cálculos de etapa más complejos. Vea la sección 12.4.

bles (con $w_3m_3 > x_3$). El ingreso para el artículo 3 es $14m_3$. En consecuencia, la ecuación recursiva para la etapa 3 es

$$f_3(x_3) = \max_{m_3=0,1,\ldots,4}\{14m_3\}$$

La siguiente tabla resume los cálculos para la etapa 3.

	$14m_3$					Solución óptima	
x_3	$m_3 = 0$	$m_3 = 1$	$m_3 = 2$	$m_3 = 3$	$m_3 = 4$	$f_3(x_3)$	m_3^*
0	0	—	—	—	—	0	0
1	0	14	—	—	—	14	1
2	0	14	28	—	—	28	2
3	0	14	28	42	—	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

Etapa 2. máx $\{m_2\} = \left[\frac{4}{3}\right] = 1$, o $m_3 = 0, 1, f_2(x_2) = \max_{m_3=0,1}\{47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)\}$

	$47m_2 + f_3(x_2 - 3m_2)$		Solución óptima	
x_2	$m_2 = 0$	$m_2 = 1$	$f_2(x_2)$	m_2^*
0	0 + 0 = 0	—	0	0
1	0 + 14 = 14	—	14	0
2	0 + 28 = 28	—	28	0
3	0 + 42 = 42	47 + 0 = 47	47	1
4	0 + 56 = 56	47 + 14 = 61	61	1

Etapa 1. máx $\{m_1\} = \left[\frac{4}{2}\right] = 2$ o $m_1 = 0, 1, 2, f_1(x_1) = \max_{m_3=0,1,2}\{31m_2 + f_2(x_1 - 2m_1)\}$

	$31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)$			Solución óptima	
x_1	$m_1 = 0$	$m_1 = 1$	$m_1 = 2$	$f_1(x_1)$	m_1^*
0	0 + 0 = 0	—	—	0	0
1	0 + 14 = 14	—	—	14	0
2	0 + 28 = 28	31 + 0 = 31	—	31	1
3	0 + 47 = 47	31 + 14 = 45	—	47	0
4	0 + 61 = 61	31 + 28 = 59	62 + 0 = 62	62	2

La solución óptima se determina como sigue: Dado que $W = 4$ toneladas, del estado 1, $x_1 = 4$ se da la alternativa óptima $m_1^* = 2$; es decir que en el barco se cargarán dos unidades del artículo 1. Esta asignación deja, $x_2 = x_1 - 2m_2^* = 4 - 2 \times 2 = 0$ para las etapas 2 y 3. De la etapa 2, $x_2 = 0$ da por resultado, $m_2^* = 0$, lo cual deja $x_3 = x_2 - 3m_2 = 0 - 3 \times 0 = 0$ unidades para la etapa 3. Luego, a partir de la etapa 3, $x_3 = 0$ da $m_3^* = 0$. Por lo tanto, la solución óptima completa es, $m_1^* = 2, m_2^* = 0$, y $m_3^* = 0$. El rendimiento asociado es $f_1(4) = \$62{,}000$.

En la tabla para la etapa 1, en realidad tenemos que calcular la fila sólo para $x_1 = 4$, porque ésta es la última etapa que se considerará. Sin embargo, se incluyen los cálculos para $x_1 = 0, 1, 2$ y 3 para poder realizar el análisis de sensibilidad. Por ejemplo, ¿qué sucede si la capacidad del barco es de 3 toneladas en lugar de 4? La nueva solución óptima puede determinarse como

$$(x_1 = 3) \rightarrow (m_1^* = 0) \rightarrow (x_2 = 3) \rightarrow (m_2^* = 1) \rightarrow (x_3 = 0) \rightarrow (m_3^* = 0)$$

Por lo tanto la solución óptima es $(m_1^*, m_2^*, m_3^*) = (0, 1, 0)$, y el ingreso óptimo es $f_1(3) = \$47,000$.

Momento de Excel

La naturaleza de los cálculos de PD hace imposible desarrollar un código de computadora general que pueda manejar todos los problemas de PD. Tal vez esto explique la persistente ausencia de software de PD comercial.

En esta sección presentamos un algoritmo basado en Excel para manejar una subclase de problemas de PD: El problema de la mochila de una sola restricción (archivo *excelKnnapsack.xls).* El algoritmo no es específico de datos y puede manejar problemas en los cuales una alternativa puede suponer valores en el intervalo de 0 a 10.

La figura 12.4 muestra la pantalla de inicio del modelo de PD (hacia atrás) de la mochila. La pantalla está dividida en dos secciones: La sección de la derecha(columnas Q:V) resume la solución de salida. En la sección de la izquierda (columnas A:P), los datos de entrada para la etapa actual aparecen en las filas 3, 4, y 6. Los cálculos de las etapas se inician en la fila 7. (Las columnas H:N están ocultas para conservar espacio). Los símbolos de los datos de entrada son autoexplicativos. Para ajustar la hoja de cálculo de manera conveniente en una pantalla, el valor factible máximo de la alternativa m_i en la etapa i es 10 (celdas D6:N6).

La figura 12.5 muestra los cálculos de etapa generados por el algoritmo para el ejemplo 12.3-1. Los cálculos se realizan etapa por etapa, y el usuario proporciona los datos básicos que controlan cada etapa.

Comenzando con la etapa 3 y utilizando la notación y datos del ejemplo 12.3-1, las celdas de entrada se actualizan como se muestra en la lista siguiente:

Celda(s)	Datos
D3	Número de etapas $N = 3$
G3	Límite de los recursos, $W = 4$
C4	Etapa actual = 3
E4	$w_3 = 1$
G4	$r_3 = 14$
D6:H6	$m_3 = (0, 1, 2, 3, 4)$

FIGURA 12.4

Pantalla Excel de inicio del modelo general de PD del modelo de la mochila (archivo *excelKnapsack.xls)*

	A	B	C	D	E	F	G	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Dynamic Programming (Backward) Knapsack Model														
2	Input Data and Stage Calculations									Ouput Solution Summary					
3	Number of stages,N=				Res. limit, W=					x	f	m	x	f	m
4	Current stage=			w=		r=									
5	Are m values correct?							Stage Optimum Solution							
6			m=												
7			r*m=												
8			w*m=					f	m						
9															
10															

Etapa 3:

	A	B	C	D	E	F	G	H	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Dynamic Programming (Backward) Knapsack Model															
2	Input Data and Stage Calculations										Ouput Solution Summary					
3	Number of stages,N=			3	Res. limit, W=		4				x	f	m	x	f	m
4	Current stage=		3	w3=	1	r3=	14				Stage 3					
5	Are m3 values correct?			yes	yes	yes	yes	yes	Stage		0	0	0			
6			m3=	0	1	2	3	4	Optimum		1	14	1			
7	Stage4		r3*m3=	0	14	28	42	56	Solution		2	28	2			
8	f4		w3*m3=	0	1	2	3	4	f3	m3	3	42	3			
9		x3=	0	0	1111111	1111111	1111111	1111111	0	0	4	56	4			
10		x3=	1	0	14	1111111	1111111	1111111	14	1						
11		x3=	2	0	14	28	1111111	1111111	28	2						
12		x3=	3	0	14	28	42	1111111	42	3						
13		x3=	4	0	14	28	42	56	56	4						

Etapa 2:

	A	B	C	D	E	F	G	H	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Dynamic Programming (Backward) Knapsack Model															
2	Input Data and Stage Calculations										Ouput Solution Summary					
3	Number of stages,N=			3	Res. limit, W=		4				x	f	m	x	f	m
4	Current stage=		2	w2=	3	r2=	47				Stage 3			Stage 2		
5	Are m2 values correct?			yes	yes	delete	delete	delete	Stage		0	0	0	0	0	0
6			m2=	0	1	2	3	4	Optimum		1	14	1	1	14	0
7	Stage3		r2*m2=	0	47				Solution		2	28	2	2	28	0
8	f3		w2*m2=	0	3				f2	m2	3	42	3	3	47	1
9	0	x2=	0	0	1111111				0	0	4	56	4	4	61	1
10	14	x2=	1	14	1111111				14	0						
11	28	x2=	2	28	1111111				28	0						
12	42	x2=	3	42	47				47	1						
13	56	x2=	4	56	61				61	1						

Etapa 1:

	A	B	C	D	E	F	G	H	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	Dynamic Programming (Backward) Knapsack Model															
2	Input Data and Stage Calculations										Ouput Solution Summary					
3	Number of stages,N=			3	Res. limit, W=		4				x	f	m	x	f	m
4	Current stage=		1	w1=	2	r1=	31				Stage 3			Stage 2		
5	Are m1 values correct?			yes	yes	yes	delete	delete	Stage		0	0	0	0	0	0
6			m1=	0	1	2	3	4	Optimum		1	14	1	1	14	0
7	Stage2		r1*m1=	0	31	62			Solution		2	28	2	2	28	0
8	f2		w1*m1=	0	2	4			f1	m1	3	42	3	3	47	1
9	0	x1=	0	0	1111111	1111111			0	0	4	56	4	4	61	1
10	14	x1=	1	14	1111111	1111111			14	0				Stage 1		
11	28	x1=	2	28	31	1111111			31	1				0	0	0
12	47	x1=	3	47	45	1111111			47	0				1	14	0
13	61	x1=	4	61	59	62			62	2				2	31	1
14														3	47	0
15														4	62	2

FIGURA 12.5

Modelo de PD Excel para el problema de la mochila del ejemplo 12.3-1 (archivo *excelKnapsack.xls*)

Observemos que los valores factibles de m_3 son 0, 1,…, y 4 $\left(= \left[\frac{W}{w_3}\right] = \left[\frac{4}{1}\right]\right)$, como en el ejemplo 12.3-1. La hoja de cálculo valida de forma automática los valores que el usuario ingresa y emite mensajes autoexplicativos en la fila 5: “sí”, “no”, y “eliminar”.

A medida que se ingresan y verifican los datos de la etapa 3, la hoja de cálculo “cobra vida” y genera automáticamente todos los cálculos necesarios de la etapa (columnas B a P). Se utiliza el valor $-$ 1111111 para indicar que el ingreso correspondiente no es factible. La solución óptima (f_3,m_3) para la etapa se da en las columnas O y P. La columna A proporciona los valores de f_4, los cuales son iguales a cero para todas las x_3 porque los cálculos se inician en la etapa 3 (puede dejar las celdas A9:A13 en blanco o ingresar ceros).

Ahora que los cálculos de la etapa 3 están completos, realice los pasos siguientes para crear un registro *permanente* de la solución óptima de la etapa actual y preparar la hoja de cálculo para la siguiente etapa:

Paso 1. Copie los valores x_3, C9:C13, y péguelos en Q5:Q9 en la sección de resumen de la solución óptima. Luego copie los valores (f_3, m_3) O9:P13, y péguelos en R5:S9. Recuerde que tiene que pegar sólo valores, lo que requiere seleccionar la opción *Pegado especial* en el menú Edición y *Datos* en el cuadro de diálogo.

Paso 2. Copie los valores f_3 en R5:*R*9, y péguelos en A9:A13 (*no* necesita la opción *Pegado especial* en este paso.)

Paso 3. Cambie la celda C4 a 2, e ingrese los nuevos valores de w_2, r_2 y m_2 para la etapa 2.

El paso 2 coloca $f_{i+1}(x_i - w_i m_i)$ en la columna A como preparación para calcular $f_k(x_i)$ en la etapa i (vea la fórmula recursiva para el problema de la mochila del ejemplo 12.3-1). Un procedimiento parecido se repite para la etapa 1. Cuando la etapa 1 está completa, el resumen de la solución puede usarse para leer la solución óptima, como se explicó en el ejemplo 12.3-1. Observe que la organización del área de resumen de la solución de salida (columnas Q:V) aparece sin formato, y que usted puede organizar su contenido como le plazca.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.3A[3]

1. En el ejemplo 12.3-1, determine la solución óptima suponiendo que la capacidad de peso máxima del barco es de 2 toneladas. Repita el ejemplo para una capacidad de peso de 5 toneladas.

2. Resuelva el problema de carga de un contenedor del ejemplo 12.3-1 para cada uno de los siguientes conjuntos de datos:

*__(a)__ $w_1 = 4, r_1 = 70, w_2 = 1, r_2 = 20, w_3 = 2, r_3 = 40, W = 6$

(b) $w_1 = 1, r_1 = 30, w_2 = 2, r_2 = 60, w_3 = 3, r_3 = 80, W = 4$

3. En el modelo de carga de un contenedor del ejemplo 12.3-1, suponga que el ingreso por artículo incluye una cantidad constante que se obtiene sólo si se elige el artículo, como se muestra en la tabla siguiente:

Artículo	Ingreso
1	$\begin{cases} -5 + 31m_1, & \text{si } m_1 > 0 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$
2	$\begin{cases} -15 + 47m_2, & \text{si } m_2 > 0 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$
3	$\begin{cases} -4 + 14m_3, & \text{si } m_3 > 0 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$

Encuentre la solución óptima por medio de PD. (*Sugerencia:* Puede utilizar el archivo Excel *excelSetupKnapsack.xls* para verificar sus cálculos).

4. Un excursionista debe empacar tres artículos: alimento, botiquín de primeros auxilios y ropa. La mochila tiene una capacidad de 3 pies^3. Cada unidad de alimento ocupa 1 pie^3, el botiquín de primeros auxilios ocupa $\frac{1}{4}$ pie^3, y cada pieza de ropa ocupa aproximadamente $\frac{1}{2}$ pie^3. El excursionista asigna pesos de prioridad de 3, 4 y 5 al alimento, el botiquín, y la

[3]En este conjunto de problemas se le insta para que en los casos en que sea aplicable verifique los cálculos manuales utilizando la plantilla *excelKnapsack.xls*.

ropa, respectivamente, lo que significa que la ropa es el más valioso de los tres artículos. Por experiencia, el excursionista debe llevar al menos una unidad de cada artículo y no más de dos botiquines. ¿Cuántas unidades de cada artículo debe llevar el excursionista?

***5.** Un estudiante debe elegir 10 cursos optativos de cuatro departamentos diferentes, con por lo menos un curso de cada departamento. Los 10 cursos se asignan a los cuatro departamentos de una manera que maximice el "conocimiento". El estudiante mide su conocimiento en una escala de 100 puntos y aparece con la siguiente tabla:

	Cantidad de cursos						
Departamento	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	≥ 7
I	25	50	60	80	100	100	100
II	20	70	90	100	100	100	100
III	40	60	80	100	100	100	100
IV	10	20	30	40	50	60	70

¿Cómo debe seleccionar el estudiante los cursos?

6. Tengo un pequeño jardín de 10×20 pies. Esta primavera pienso plantar tres tipos de hortalizas: tomates, chícharos y maíz. El jardín está organizado en filas de 10 pies. Las filas del maíz y de los tomates son de 2 pies de ancho, y las de los chícharos son de 3 pies de ancho. Me gustan más los tomates y menos los chícharos, y en una escala del 1 al 10 asignaría un 7 a los tomates, un 7 al maíz y un 3 a los chícharos. A pesar de mis preferencias, mi esposa insiste en que plante al menos una fila de chícharos y no más de dos filas de tomates. ¿Cuántas filas de cada legumbre debo plantar?

***7.** Habitat for Humanity es una maravillosa organización de caridad que construye casas para familias necesitadas por medio de mano de obra voluntaria y donaciones de materiales de construcción. Una familia elegible puede escoger de entre tres tamaños de casa: 1000, 1100 y 1200 pies^2. Cada tamaño requiere determinada cantidad de voluntarios de mano de obra. La sucursal de Fayetteville, Arkansas, ha recibido cinco solicitudes para los 6 meses venideros. El comité a cargo asigna una calificación a cada solicitud basado en varios factores. Una alta calificación significa una alta necesidad. Durante los 6 meses siguientes, la sucursal puede contar con un máximo de 23 voluntarios. Los siguientes datos resumen las calificaciones de las solicitudes y la cantidad requerida de voluntarios. ¿Cuáles solicitudes debe aprobar el comité?

Solicitud	Tamaño de la casa (pies^2)	Calificación	Cantidad de voluntarios
1	1200	78	7
2	1000	64	4
3	1100	68	6
4	1000	62	5
5	1200	85	8

8. El alguacil Bassam busca reelegirse en el condado de Washington. Los fondos disponibles para la campaña son aproximadamente de $10,000. Aunque al comité de reelección le gustaría lanzar la campaña en los cinco distritos del condado, los fondos limitados lo dictan de otra manera. La tabla siguiente incluye listas de la población votante y el monto de los fondos necesarios para lanzar una campaña efectiva en cada distrito. Un distrito puede recibir todos sus fondos asignados, o ninguno. ¿Cómo deberán asignarse los fondos?

Distrito	Población	Fondos requeridos ($)
1	3100	3500
2	2600	2500
3	3500	4000
4	2800	3000
5	2400	2000

9. Un aparato electrónico consta de tres componentes los cuales están en serie, de modo que la falla de uno hace que falle el aparato. La confiabilidad (probabilidad de que no falle) del aparato puede mejorarse instalando una o dos unidades suplentes en cada componente. La tabla siguiente incluye la confiabilidad, r, y el costo, c. El capital total disponible para la construcción del aparato es de $10,000. ¿Cómo deberá construirse el aparato? (*Sugerencia:* El objetivo es maximizar la confiabilidad, $r_1r_2r_3$, del aparato. Esto significa que la descomposición de la función objetivo es de multiplicación más que de adición.)

Cantidad de unidades en paralelo	Componente 1		Componente 2		Componente 3	
	r_1	$c_1(\$)$	r_2	$c_2(\$)$	r_3	$c_3(\$)$
1	.6	1000	.7	3000	.5	2000
2	.8	2000	.8	5000	.7	4000
3	.9	3000	.9	6000	.9	5000

10. Resuelva el siguiente modelo por medio de PD:

$$\text{Maximizar } z = \prod_{i=1}^{n} y_i$$

sujeto a

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = c$$

$$y_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

(*Sugerencia:* Este problema es parecido al problema 9, excepto que las variables, y_j, son continuas.)

11. Resuelva el siguiente problema por medio de PD:

$$\text{Minimizar } z = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

sujeto a

$$\prod_{i=1}^{n} y_i = c$$

$$y_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$$

12. Resuelva el siguiente problema mediante PD:

$$\text{Maximizar } z = (y_1 + 2)^2 + y_2y_3 + (y_4 - 5)^2$$

sujeto a

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 5$$

$$y_i \geq 0 \text{ y entera}, \; i = 1, 2, 3, 4$$

13. Resuelva el siguiente problema por medio de PD:

$$\text{Minimizar } z = \text{máx}\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}$$

sujeto a

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = c$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n$$

Proporcione la solución para el caso especial de $n = 3, c = 10$, y $f(y_1) = y_1 + 5, f(y_2) = 5y_2 + 3$, y $f(y_3) = y_3 - 2$.

12.3.2 Modelo de tamaño de la fuerza de trabajo

Las necesidades de mano de obra en proyectos de construcción pueden satisfacerse contratando y despidiendo trabajadores. Ambas actividades incurren en un costo. El objetivo es minimizar el costo total de la mano de obra requerida para el proyecto.

Supongamos que la duración del proyecto es de n semanas y que la fuerza de mano de obra mínima requerida en la semana i es de b_i trabajadores. El modelo asume que se incurre en un costo adicional si la fuerza de trabajo de una semana excede el requerimiento mínimo o si en una semana se realiza una contratación adicional. Por sencillez, no se incurre en ningún costo cuando ocurre un despido.

El costo de mantener una fuerza de trabajo x_i mayor que la mínima b_i en la semana i incurre en costo excedente $C_1(x_i - b_i)$. Si $x_i > x_{i-1}$, ocurre contratación a un costo adicional de $C_2(x_i - x_{i-1})$.

Los elementos del modelo de PD se definen como sigue:

1. La *etapa i* está representada por la semana $i, i = 1, 2, \ldots, n$.
2. Las *alternativas* en la etapa i son x_i, la cantidad de trabajadores en la semana i.
3. El *estado* en la etapa i es x_{i-1}, la cantidad de trabajadores disponible en la semana $i - 1$.

La ecuación recursiva de PD se da como

$$f_{n+1}(x_n) \equiv 0$$

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x_i \geq b_i}\{C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}, i = 1, 2, \ldots, n$$

Los cálculos se inician en la etapa n y concluyen en la etapa 1.

Ejemplo 12.3-2

Un contratista estima que el tamaño de la fuerza de trabajo necesaria durante las siguientes 5 semanas es de 5,7,8,4 y 6 trabajadores, respectivamente. La mano de obra excedente conservada en la fuerza de trabajo costará $300 por trabajador por semana, y una nueva contratación en cualquier semana incurrirá en un costo fijo de $400 más $200 por trabajador por semana.

Los datos del problema son

$$b_1 = 5, b_2 = 7, b_3 = 8, b_4 = 4, b_5 = 6$$

$$C_1(x_i - b_i) = 3(x_i - b_i), x_i > b_i, i = 1, 2, \ldots, 5$$

$$C_2(x_i - x_{i-1}) = 4 + 2(x_i - x_{i-1}), x_i > x_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, 5$$

Las funciones de costo C_1 y C_2 están en cientos de dólares.

Etapa 5. $(b_5 = 6)$

	$C_1(x_5 - 6) + C_2(x_5 - x_4)$	Solución óptima	
x_4	$x_5 = 6$	$f_5(x_4)$	x_5^*
4	3(0) + 4 + 2(2) = 8	8	6
5	3(0) + 4 + 2(1) = 6	6	6
6	3(0) + 0 = 0	0	6

Etapa 4. $(b_4 = 4)$

	$C_1(x_4 - 4) + C_2(x_4 - x_3) + f_5(x_4)$			Solución óptima	
x_3	$x_4 = 4$	$x_4 = 5$	$x_4 = 6$	$f_4(x_3)$	x_4^*
8	3(0) + 0 + 8 = 8	3(1) + 0 + 6 = 9	3(2) + 0 + 0 = 6	6	6

Etapa 3. $(b_3 = 8)$

	$C_1(x_3 - 8) + C_2(x_3 - x_2) + f_4(x_3)$	Solución óptima	
x_2	$x_3 = 8$	$f_3(x_2)$	x_6^*
7	3(0) + 4 + 2(1) + 6 = 12	12	8
8	3(0) + 0 + 6 = 6	6	8

Etapa 2. $(b_2 = 7)$

	$C_1(x_2 - 7) + C_2(x_3 - x_2) + f_3(x_2)$		Solución óptima	
x_1	$x_2 = 7$	$x_2 = 8$	$f_2(x_1)$	x_2^*
5	3(0) + 4 + 2(2) + 12 = 20	3(1) + 4 + 2(3) + 6 = 19	19	8
6	3(0) + 4 + 2(1) + 12 = 18	3(1) + 4 + 2(2) + 6 = 17	17	8
7	3(0) + 0 + 12 = 12	3(1) + 4 + 2(1) + 6 = 15	12	7
8	3(0) + 0 + 12 = 12	3(1) + 0 + 6 = 9	9	8

Etapa 1. $(b_1 = 5)$

	$C_1(x_1 - 5) + C_2(x_1 - x_0) + f_2(x_1)$				Solución óptima	
x_0	$x_1 = 5$	$x_1 = 6$	$x_1 = 7$	$x_1 = 8$	$f_1(x_0)$	x_1^*
0	$3(0) + 4 + 2(5) + 19 = 33$	$3(1) + 4 + 2(6) + 17 = 36$	$3(2) + 4 + 2(7) + 12 = 36$	$3(2) + 4 + 2(8) + 9 = 35$	33	5

La solución óptima se determina como

$$x_0 = 0 \rightarrow x_1^* = 5 \rightarrow x_2^* = 8 \rightarrow x_3^* = 8 \rightarrow x_4^* = 6 \rightarrow x_5^* = 6$$

La solución puede convertirse en el siguiente plan:

Semana i	Fuerza de mano de obra mínima (b_i)	Fuerza de mano de obra real (x_i)	Decisión	Costo
1	5	5	Contratar 5 trabajadores	$4 + 2 \times 5 = 14$
2	7	8	Contratar 3 trabajadores	$4 + 2 \times 3 + 1 \times 3 = 13$
3	8	8	Ningún cambio	0
4	4	6	Despedir 2 trabajadores	$3 \times 2 = 6$
5	6	6	Ningún cambio	0

El costo total es $f_1(0) = \$3300$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.3B

1. Resuelva el ejemplo 12.3.2 para cada uno de los siguientes requerimientos de mano de obra mínimos:

*__(a)__ $b_1 = 6, b_2 = 5, b_3 = 3, b_4 = 6, b_5 = 8$

(b) $b_1 = 8, b_2 = 4, b_3 = 7, b_4 = 8, b_5 = 2$

2. En el ejemplo 12.3-2, si se incurre en una indemnización por cada trabajador despedido, determine la solución óptima.

***3.** Luxor Travel organiza viajes turísticos de una semana al sur de Egipto. La agencia ofrece 7,4,7 y 8 automóviles en renta durante las siguientes 4 semanas. Luxor Travel subcontrata a un concesionario automotriz local para que satisfaga las necesidades de renta de automóviles. El concesionario cobra una cuota de renta semanal de \$220 por automóvil, más una cuota fija de \$500 por cualquier transacción de renta. Luxor, sin embargo, puede elegir si los conserva en renta durante una semana más y simplemente sigue pagando la renta. ¿Cuál es la mejor forma para que Luxor maneje la situación de renta?

4. GECO fue contratado por los siguientes 4 años para que surta motores de avión a razón de cuatro motores al año. La capacidad de producción disponible y los costos de producción varían de un año a otro. GECO puede producir cinco motores en el año 1, seis en el año 2, tres en el año 3, y cinco en el año 4. Los costos de producción correspondientes por motor a lo largo de los siguientes 4 años son de \$300,000, \$330,000, \$350,000 y \$420,000, respectivamente. GECO puede elegir si produce más de lo que necesita en un cierto año, en cuyo caso el motor se debe almacenar apropiadamente hasta la fecha de envío. El costo de almacenamiento por motor también varía de un año a otro, y se estima que sea de \$20,000 en el año 1, \$30,000 en el año 2, \$40,000 en el año 3, y \$50,000 en el año 4. En la actualidad, al inicio del año 1 GECO tiene un motor listo para ser enviado. Desarrolle un plan de producción óptimo para GECO.

12.3.3 Modelo de reemplazo de equipo

Las máquinas que permanecen mucho tiempo en servicio incurren en un alto costo de mantenimiento y pueden ser reemplazadas después de una cierta cantidad de años en operación. La situación tiene que ver con determinar la edad más económica de una máquina.

Supongamos que el problema de reemplazo de una máquina abarca n años. Al *inicio* de cada año, una máquina o se mantiene en servicio un año más, o es reemplazada por una nueva. Sean $r(t)$, $c(t)$ y $s(t)$ el ingreso anual, el costo de operación y el valor de desecho, respectivamente, de una máquina de t años. El costo de adquisición de una máquina nueva en cualquier año es I.

Los elementos del modelo de PD son los siguientes:

1. La *etapa i* está representada por el año i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. Las *alternativas* en la etapa (año) i son conservar (K) o reemplazar (R) la máquina *al inicio* del año i.
3. El *estado* en la etapa i es la edad de la máquina al inicio del año i.

Dado que la máquina tiene t años al inicio del año i, defina

$$f(t) = \text{ingreso neto máximo en los años } i, i+1, \ldots, \text{y } n$$

La ecuación recursiva es

$$f_n(t) = \text{máx}\begin{cases} r(t) - c(t) + s(t+1), & \text{si se CONSERVA} \\ r(0) + s(t) + s(1) - I - c(0), & \text{si se REEMPLAZA} \end{cases}$$

$$f_i(t) = \text{máx}\left.\begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1) & \text{si se CONSERVA} \\ r(0) + s(t) - I - c(0) + f_{i+1}(1) & \text{si se REEMPLAZA} \end{cases}\right\}, i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Ejemplo 12.3-3

Una compañía necesita determinar la política de reemplazo para una máquina que a la fecha tiene tres años de edad, durante los siguientes 4 años ($n = 4$). Una máquina de 6 años de edad debe ser reemplazada. El costo de una máquina nueva es de $100,000. La siguiente tabla da los datos del problema.

Edad, t (años)	Ingresos, $r(t)$ ($)	Costo de operación, $c(t)$ ($)	Valor de desecho, $s(t)$ ($)
0	20,000	200	—
1	19,000	600	80,000
2	18,500	1200	60,000
3	17,200	1500	50,000
4	15,500	1700	30,000
5	14,000	1800	10,000
6	12,200	2200	5000

La determinación de los valores factibles para la edad de la máquina es algo complicada. La figura 12.6 resume la red que representa el problema. Al *inicio* del año 1 tenemos una máquina de 3 años de edad. Podemos o reemplazarla (R), o bien conservarla (K) durante otro año. Si el reemplazo ocurre, la nueva máquina tendrá un año de edad al inicio del año 2; de lo contrario, la máquina conservada tendrá 4 años de edad. La misma lógica aplica al inicio de los años 2 a 4. Si

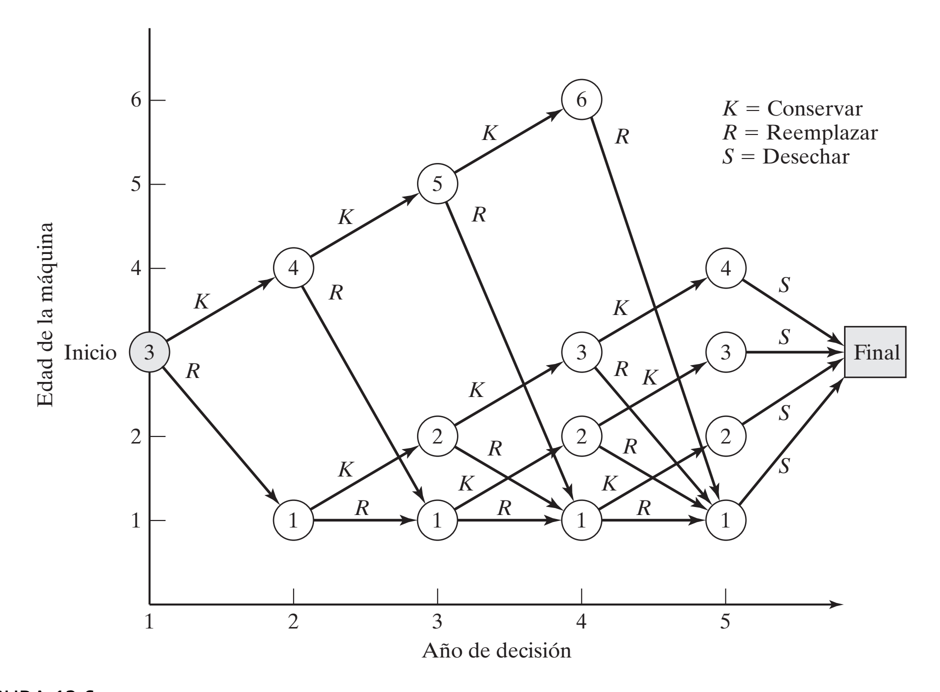


FIGURA 12.6

Representación de la edad de una máquina como una función del año de decisión en el ejemplo 12.3-3

una máquina de un año de edad es reemplazada al inicio de los años 2,3 y 4, su reemplazo tendrá un año de edad al inicio del año siguiente. Asimismo, al inicio del año 4, una máquina de 6 años de edad debe ser reemplazada, y al final del año 4 (final del horizonte de planificación), desechamos (*S*) la máquina.

La red muestra que al inicio del año 2 las posibles edades de la máquina son 1 y 4 años. Al inicio del año 3 las posibles edades son 1,2 y 5 años, y al inicio del año 4 las posibles edades son 1,2,3 y 6 años. La red también supone que la máquina será desechada al inicio del año 5 independientemente de la edad.

La solución de la red mostrada en la figura 12.6 equivale a encontrar la ruta más larga (es decir, el ingreso máximo) a partir del inicio del año 1 hasta el final del año 4. Utilizaremos la forma tabular para resolver el problema. Todos los valores están en miles de dólares. Observemos que si una máquina se reemplaza en el año 4 (es decir, al final del horizonte de planificación), su ingreso incluirá el valor de rescate, $s(t)$, de la máquina *reemplazada* y el valor de desecho, $s(1)$, de la máquina de *reemplazo*. Además, si en el año 4 una máquina de t años de edad se conserva, su valor de rescate será $s(t + 1)$.

Etapa 4.

	K	*R*	Solución óptima	
t	$r(t) + s(t+1) - c(t)$	$r(0) + s(t) + s(1) - c(0) - I$	$f_4(t)$	Decisión
1	19.0 + 60 − .6 = 78.4	20 + 80 + 80 − .2 − 100 = 79.8	79.8	*R*
2	18.5 + 50 − 1.2 = 67.3	20 + 60 + 80 − .2 − 100 = 59.8	67.3	*K*
3	17.2 + 30 − 1.5 = 45.7	20 + 50 + 80 − .2 − 100 = 49.8	49.8	*R*
6	(Debe reemplazarse)	20 + 5 + 80 − .2 − 100 = 4.8	4.8	*R*

Etapa 3.

	K	R	Solución óptima	
t	$r(t) - c(t) + f_4(t+1)$	$r(0) + s(t) - c(0) - I + f_4(1)$	$f_3(t)$	*Decisión*
1	19.0 − .6 + 67.3 = 85.7	20 + 80 − .2 − 100 + 79.8 = 79.6	85.7	K
2	18.5 − 1.2 + 49.8 = 67.1	20 + 60 − .2 − 100 + 79.8 = 59.6	67.1	K
5	14.0 − 1.8 + 4.8 = 17.0	20 + 10 − .2 − 100 + 79.8 = 9.6	17.0	R

Etapa 2.

	K	R	Solución óptima	
t	$r(t) - c(t) + f_3(t+1)$	$R(0) + s(t) - c(0) - I + f_3(1)$	$f_2(t)$	*Decisión*
1	19.0 − .6 + 67.1 = 85.5	20 + 80 − .2 − 100 + 85.7 = 85.5	85.5	K o R
4	15.5 − 1.7 + 17.0 = 30.8	20 + 30 − .2 − 100 + 85.7 = 35.5	35.5	R

Etapa 1.

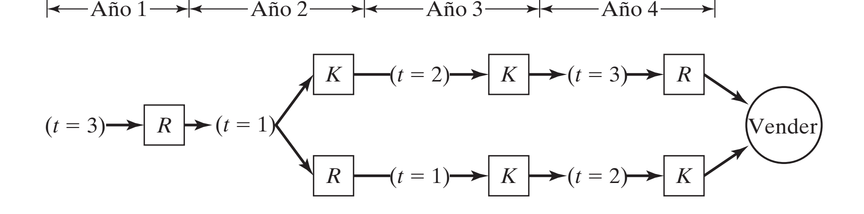
	K	R	Solución óptima	
t	$r(t) - c(t) + f_2(t+1)$	$R(0) + s(t) - c(0) - I + f_2(1)$	$f_1(t)$	*Decisión*
3	17.2 − 1.5 + 35.5 = 51.2	20 + 50 − .2 − 100 + 85.5 = 55.3	55.3	R

La figura 12.7 resume la solución óptima. Al inicio del año 1, dada $t = 3$, la decisión óptima es reemplazar la máquina. Por lo tanto, la máquina nueva tendrá un año de edad al inicio del año 2, y $t = 1$ al inicio del año 2 exige o que se conserve o que se reemplace la máquina. Si se reemplaza, la máquina tendrá un año de edad al inicio del año 3; de lo contrario, la máquina conservada tendrá dos años de edad. El proceso continúa de esta manera hasta que se llegue al año 4.

Las políticas óptimas alternativas al inicio del año 1 son (*R*,*K*,*K*,*R*) y (*R*,*R*,*K*,*K*). El costo total es de $55,300.

FIGURA 12.7

Solución del ejemplo 12.3-3



CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.3C

1. En cada uno de los siguientes casos, desarrolle la red y encuentre la solución óptima para el modelo del ejemplo 12.3-3:

(a) La máquina tiene dos años de edad al inicio del año 1.

(b) La máquina tiene 1 año de edad al inicio del año 1.

(c) La máquina se compró nueva al inicio del año 1.

***2.** Mi hijo de 13 años maneja un negocio de corte de césped con 10 clientes. A cada cliente le corta el césped 3 veces al año, y cobra $50 por cada corte. Acaba de pagar $200 por una cortadora nueva. El costo de operación y mantenimiento de la cortadora es de $120 para el primer año de servicio y de ahí en adelante se incrementa 20% al año. Una cortadora de un año de edad tiene un valor de reventa de $150, el cual se reduce de ahí en adelante un 10% al año. Mi hijo, que planea conservar su negocio hasta que tenga 16 años, piensa que es más económico comprar una cortadora nueva cada 2 años. Basa su decisión en el hecho de que el precio de una cortadora nueva se incrementará sólo 10% al año. ¿Se justifica su decisión?

3. Circle Farms desea desarrollar una política de reemplazo para su tractor de dos años de edad durante los siguientes 5 años. Un tractor debe mantenerse en servicio durante al menos 3 años, pero debe ser desechado después de 5 años. El precio actual de compra de un tractor es de $40,000 y se incrementa 10% al año. El valor de desecho de un tractor de un año de edad es de $30,000 y se reduce 10% al año. El costo actual de operación anual del tractor es de $1300 pero se espera que se incremente 10% al año.

(a) Formule el problema como un problema de la ruta más corta.

(b) Desarrolle la ecuación recursiva asociada.

(c) Determine la política de reemplazo óptima del tractor durante los siguientes 5 años.

4. Considere el problema de reemplazo de equipo durante un periodo de n años. Un equipo nuevo cuesta c dólares y su valor de reventa después de t años de operación es $s(t) = n - t$ para $n > 1$ y cero en caso contrario. El ingreso anual es una función de la edad t y está dada por $r(t) = n^2 - t^2$ para $n > t$ y cero en caso contrario.

(a) Formule el problema como un modelo de PD.

(b) Encuentre la política de reemplazo óptima dado que $c = \$10,000$, $n = 5$, y el equipo tiene dos años de edad.

5. Resuelva el problema 4, suponiendo que el equipo tiene un año de edad y que $n = 4$, $c =$ $6000 y $n = 4$, $c = \$6000$, y $r(t) = \frac{n}{1+t}$.

12.3.4 Modelo de inversión

Suponga que desea invertir las cantidades $P_1, P_2, \ldots, P_n$, al inicio de cada uno de los siguientes n años. Tiene dos oportunidades de inversión en dos bancos. First Bank paga una tasa de interés r_1 y Second Bank paga r_2, ambos compuestos anualmente. Para fomentar los depósitos, ambos bancos pagan bonos sobre nuevas inversiones en la forma de un porcentaje de la cantidad invertida. Los porcentajes de los bonos respectivos para First Bank y Second Bank son q_{i1} y q_{i2} para el año i. Los bonos se pagan al final del año en que se hizo la inversión y pueden reinvertirse en cualquiera de los bancos en el año inmediatamente subsiguiente. Esto significa que sólo pueden invertirse bono y dinero nuevo fresco en cualquiera de los bancos. Sin embargo, una vez que se deposita una inversión, debe permanecer en el banco hasta el final del año n.

Los elementos del modelo de PD son como sigue:

1. La *etapa* i está representada por el año i, $i = 1, 2\ldots, n$.
2. Las *alternativas* en la etapa i son I_i e $\overline{I}_i$, las cantidades invertidas en First Bank y en Second Bank, respectivamente.
3. El *estado*, x_i, en la etapa i es la cantidad de capital disponible para inversión al inicio del año i.

Observamos que, $\overline{I}_i = x_i - I_i$, por definición. Por lo tanto

$$x_1 = P_1$$
$$x_i = P_i + q_{i-1,1}I_{i-1} + q_{i-1,2}(x_{i-1} - I_{i-1})$$
$$= P_i + (q_{i-1,1} - q_{i-1,2})I_{i-1} + q_{i-1,2}x_{i-1}, i = 2, 3, \ldots, n$$

La cantidad reinvertida x_i incluye sólo dinero nuevo más cualesquier bonos de inversiones realizadas en el año $i - 1$.

Defina

$f_i(x_i)$ = valor óptimo de las inversiones en los años i, $i + 1, \ldots$, y n, dada x_i.

Luego defina s_i como la suma acumulada al final de año n, dado que I_i y $(x_i - I_i)$ son las inversiones realizadas en el año i en First Bank y en Second Bank, respectivamente. Sea $\alpha_k = (1 + r_k)$, $k = 1, 2$, el problema se establece como

$$\text{Maximizar } z = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

donde

$$s_i = I_i\alpha_1^{n+1-i} + (x_i - I_i)\alpha_2^{n+1-i}$$
$$= (\alpha_1^{n+1-i} - \alpha_2^{n+1-i})I_i + \alpha_2^{n+1-i}x_i, i = 1, 2, \ldots, n - 1$$
$$s_n = (\alpha_1 + q_{n1} - \alpha_2 - q_{n2})I_n + (\alpha_2 + q_{n2})x_n$$

Los términos q_{n1} y q_{n2} en s_n se agregan porque los bonos para el año n forman parte de la suma de dinero final acumulada a partir de la inversión.

Por tanto, la ecuación recursiva hacia atrás de PD está dada como

$$f_{n+1}(x_{n+1}) \equiv 0$$
$$f_i(x_i) = \max_{0 \le I_i \le x_i} \{s_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1, 2, \ldots, n - 1$$

Como se hizo antes, x_{i+1} se define en función de x_i

Ejemplo 12.3-4

Suponga que desea invertir $4000 ahora y $2000 al inicio de los años 2 a 4. La tasa de interés ofrecida por First Bank es 8% compuesto anualmente, y los bonos a lo largo de los 4 años siguientes son 1.8%, 1.7%, 2.1% y 2.5%, respectivamente. La tasa de interés anual ofrecida por Second Bank es .2% más baja que la de First Bank, pero sus bonos son .5% más altos. El objetivo es maximizar el capital acumulado al cabo de 4 años.

Utilizando la notación presentada antes, tenemos

$$P_1 = \$4,000, P_2 = P_3 = P_4 = \$2000$$
$$\alpha_1 = (1 + .08) = 1.08$$
$$\alpha_2 = (1 + .078) = 1.078$$
$$q_{11} = .018, q_{21} = .017, q_{31} = .021, q_{41} = .025$$
$$q_{12} = .023, q_{22} = .022, q_{32} = .026, q_{42} = .030$$

Etapa 4.

$$f_4(x_4) = \max_{0 \le I_4 \le x_4} \{s_4\}$$

donde

$$s_4 = (\alpha_1 + q_{41} - \alpha_2 - q_{42})I_4 + (\alpha_2 + q_{42})x_4 = -.003I_4 + 1.108x_4$$

La función s_4 es lineal en I_4 en el intervalo $0 \le I_4 \le x_4$, y su valor máximo ocurre en $I_4 = 0$ debido al coeficiente negativo de I_4. Por lo tanto, la solución óptima para la etapa 5 puede resumirse como

	Solución óptima	
Estado	$f_4(x_4)$	I_4^*
x_4	$1.108x_4$	0

Etapa 3.

$$f_3(x_3) = \max_{0 \le I_3 \le x_3} \{s_3 + f_4(x_4)\}$$

donde

$$s_3 = (1.08^2 - 1.078^2)I_3 + 1.078^2 x_3 = .00432I_3 + 1.1621x_3$$
$$x_4 = 2000 - .005I_3 + .026x_3$$

Por lo tanto,

$$f_3(x_3) = \max_{0 \le I_3 \le x_3} \{.00432I_3 + 1.1621x_3 + 1.108(2000 - .005I_3 + 0.026x_3\}$$
$$= \max_{0 \le I_3 \le x_3} \{2216 - .00122I_3 + 1.1909x_3\}$$

	Solución óptima	
Estado	$f_3(x_3)$	I_3^*
x_3	$2216 + 1.1909x_3$	0

Etapa 2.

$$f_2(x_2) = \max_{0 \le I_2 \le x_2} \{s_2 + f_3(x_3)\}$$

donde

$$s_2 = (1.08^3 - 1.078^3)I_2 + 1.078^3 x_2 = .006985I_2 + 1.25273x_2$$
$$x_3 = 2000 - .005I_2 + .022x_2$$

Por lo tanto,

$$f_2(x_2) = \max_{0 \leq I_2 \leq x_2} \{.006985I_2 + 1.25273x_2 + 2216 + 1.1909(2000 - .005I_2 + .022x_2)\}$$
$$= \max_{0 \leq I_2 \leq x_2} \{4597.8 + .0010305I_2 + 1.27893x_2\}$$

	Solución óptima	
Estado	$f_2(x_2)$	I_2^*
x_2	$4597.8 + 1.27996x_2$	x_2

Etapa 1.

$$f_1(x_1) = \max_{0 \leq I_1 \leq x_1} \{s_1 + f_2(x_2)\}$$

donde

$$s_1 = (1.08^4 - 1.078^4)I_1 + 1.078^4 x_1 = .01005I_2 + 1.3504x_1$$
$$x_2 = 2000 - .005I_1 + .023x_1$$

Por lo tanto,

$$f_1(x_1) = \max_{0 \leq I_1 \leq x_1} \{.01005I_1 + 1.3504x_1 + 4597.8 + 1.27996(2000 - .005I_1 + .023x_1)\}$$
$$= \max_{0 \leq I_1 \leq x_1} \{7157.7 + .00365I_1 + 1.37984x_1\}$$

	Solución óptima	
Estado	$f_1(x_1)$	I_1^*
$x_1 = \$4000$	$7157.7 + 1.38349x_1$	\$4000

Trabajando hacia atrás y observando que $I_1^* = 4000$, $I_2^* = x_2$, $I_3^* = I_4^* = 0$, obtenemos

$$x_1 = 4000$$
$$x_2 = 2000 - .005 \times 4000 + .023 \times 4000 = \$2072$$
$$x_3 = 2000 - .005 \times 2072 + .022 \times 2072 = \$2035.22$$
$$x_4 = 2000 - .005 \times 0 + .026 \times \$2035.22 = \$2052.92$$

La solución óptima se obtiene al hacer la suma de la siguiente manera

Año	Solución óptima	Decisión	Acumulación
1	$I_1^* = x_1$	Inversión x_1 = $4000 en First Bank	s_1 = $5441.80
2	$I_2^* = x_2$	Inversión x_2 = $2072 en First Bank	s_2 = $2610.13
3	$I_3^* = 0$	Inversión x_3 = $2035.22 en Second Bank	s_3 = $2365.13
4	$I_4^* = 0$	Inversión x_4 = $2052.92 en Second Bank	s_4 = $2274.64
Acumulación total = $f_1(x_1)$ = 7157.7 + 1.38349(4000) = $12,691.66 (= $s_1 + s_2 + s_3 + s_4$)			

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.3D

1. Resuelva el problema 12.3-4, suponiendo que $r_1 = .085$ y $r_2 = .08$. Además, suponga que $P_1 = \$5000$, $P_2 = \$4000$, $P_3 = \$3000$ y $P_4 = \$2000$.

2. Un inversionista con un capital inicial de $10,000 debe decidir al final de cada año cómo invertir en una cuenta de ahorros. Cada dólar invertido reditúa $\alpha = \$1.09$ al final del año. La satisfacción derivada de gastar $\$y$ en cualquier año se cuantifica monetariamente como $\$\sqrt{y}$. Resuelva el problema por PD para un espacio de 5 años.

3. Un granjero posee k ovejas. Al final de cada año, decide sobre cuántas vender o conservar. La utilidad de vender una oveja en el año i es P_i. Las ovejas conservadas en el año i duplicarán su número en el año $i + 1$. El granjero planea vender todas las ovejas al cabo de n años.

*__(a)__ Derive la ecuación recursiva general para el problema.

(b) Resuelva el problema para $n = 3$ años, $k = 2$ ovejas, $p_1 = \$100$, $p_2 = \$130$, y $p_3 = \$120$.

12.3.5 Modelos de inventario

La PD tiene importantes aplicaciones en el área de control de inventarios. Los capítulos 13 y 16 presentan algunas de estas aplicaciones. Los modelos en el capítulo 13 son determinísticos, y los del capítulo 16 son probabilísticos. Otras aplicaciones de programación dinámica probabilística se dan en el capítulo 24 en el sitio web.

12.4 PROBLEMA DE DIMENSIONALIDAD

En todos los modelos de PD presentados en este capítulo, el *estado* en cualquier etapa está representado por un solo elemento. Por ejemplo, en el modelo de la mochila (sección 12.3.1), la única restricción es el peso del artículo. De manera más realista en este caso, el volumen de la mochila también puede ser una restricción viable, en cuyo caso se dice que en cualquier etapa el *estado* es bidimensional: peso y volumen.

El aumento en la cantidad de variables de estado incrementa los cálculos en cada etapa. Esto es particularmente evidente en cálculos tabulares de PD debido a que el número de filas en cada tabla corresponde a todas las posibles combinaciones de las

variables de estado. Esta dificultad computacional en ocasiones se conoce en la literatura como el **maleficio de dimensionalidad**.

El siguiente ejemplo se escogió para demostrar el *problema de dimensionalidad*. También sirve para demostrar la relación entre programación lineal y dinámica.

Ejemplo 12.4-1

Acme Manufacturing fabrica dos productos. La capacidad diaria del proceso de fabricación es de 430 minutos. El producto 1 requiere 2 minutos por unidad, y el producto 2 requiere 1 minuto por unidad. No hay límite en la cantidad producida del producto 1, pero la demanda diaria del producto 2 es de 230 unidades. La utilidad unitaria del producto 1 es de $2 y la del producto 2 es de $5. Determine la solución óptima por medio de PD.

El problema se representa por medio del siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 430 \\ x_2 &\leq 230 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Los elementos del modelo de PD son los siguientes:

1. La *etapa* i corresponde al producto $i, i = 1, 2$.
2. La a*lternativa* x_i es la cantidad de producto $i, i = 1, 2$.
3. El *estado* (v_2, w_2) representa las cantidades de los recursos 1 y 2 (tiempo de producción y límites de demanda) utilizados en la etapa 2.
4. El *estado* (v_1, w_1) representa las cantidades de los recursos 1 y 2 (tiempo de producción y límites de demanda) utilizados en las etapas 1 y 2.

Etapa 2. Defina $f_2(v_2, w_2)$ como la utilidad máxima en la etapa 2 (producto 2), dado el estado (v_2, w_2). Entonces

$$f_2(v_2, w_2) = \max_{\substack{0 \leq x_2 \leq v_2 \\ 0 \leq x_2 \leq w_2}} \{5x_2\}$$

Por lo tanto, máx $\{5x_2\}$ ocurre en $x_2 = \text{mín }\{v_2, w_2\}$, y la solución para la etapa 2 es

	Solución óptima	
Estado	$f_2(v_2, w_2)$	x_2
(v_2, w_2)	5 mín $\{v_2, w_2\}$	mín $\{v_2, w_2\}$

Etapa 1.

$$\begin{aligned} f_1(v_1, w_1) &= \max_{0 \leq 2x_1 \leq v_1} \{2x_1 + f_2(v_1 - 2x_1, w_1)\} \\ &= \max_{0 \leq x_1 \leq v_1/2} \{2x_1 + 5 \text{ mín}(v_1 - 2x_1, w_1)\} \end{aligned}$$

La optimización de la etapa 1 implica la solución de un problema minimax (generalmente más difícil). Para este problema establecemos $v_1 = 430$ y $w_1 = 230$, lo cual da $0 \leq x_1 \leq 215$. Como min $(430-2x_1, 230)$ es la envoltura menor de dos líneas que se cortan (¡compruébelo!), se desprende que

$$\text{mín}(430 - 2x_1, 230) = \begin{cases} 230, & 0 \leq x_1 \leq 100 \\ 430 - 2x_1, & 100 \leq x_1 \leq 215 \end{cases}$$

y

$$f_1(430, 230) = \max_{0 \leq x_1 \leq 215} \{2x_1 + 5\,\text{mín}(430 - 2x_1, 230)\}$$

$$= \max_{x_1} \begin{cases} 2x_1 + 1150, & 0 \leq x_1 \leq 100 \\ -8x_1 + 2150, & 100 \leq x_1 \leq 215 \end{cases}$$

Puede verificar gráficamente que el valor de $f_1(430, 230)$ ocurre en $x_1 = 100$. Por lo tanto, obtenemos,

	Solución óptima	
Estado	$f_1(v_1, w_1)$	x_1
(430, 230)	1350	100

Para determinar el valor óptimo de x_2, observamos que

$$v_2 = v_1 - 2x_1 = 430 - 200 = 230$$

$$w_2 = w_1 - 0 = 230$$

En consecuencia,

$$x_2 = \text{mín}(v_2, w_2) = 230$$

La solución óptima completa se resume entonces como

$$x_1 = 100 \text{ unidades}, x_2 = 230 \text{ unidades}, z = \$1350$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 12.4A

1. Resuelva los siguientes problemas por medio de PD.

(a) Maximizar $z = 4x_1 + 14x_2$
sujeto a

$$2x_1 + 7x_2 \leq 21$$
$$7x_1 + 2x_2 \leq 21$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(b) Maximizar $z = 8x_1 + 7x_2$
sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 15$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras}$$

(c) Maximizar $z = 7x_1^2 + 6x_1 + 5x_2^2$
sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 9$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. En el problema de la mochila con n artículos del ejemplo 12.3-1, suponga que las limitaciones de peso y volumen son W y V, respectivamente. Dado que w_i, v_i, y r_i son el peso, el valor y el ingreso por unidad, respectivamente, del artículo i, escriba la ecuación recursiva hacia atrás de PD para el problema.

BIBLIOGRAFÍA

Bertsekas, *D.*, *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987.

Denardo, E., *Dynamic Programming Theory and Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1982.

Dreyfus, S., y A. Law, *The Art and Theory of Dynamic Programming*, Academic Press, Nueva York, 1977.

Sntedovich, M., *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Nueva York, 1991.

CAPÍTULO 13

Modelos de inventario determinísticos

13.1 MODELO GENERAL DE INVENTARIO

El problema del inventario tiene que ver con guardar en reserva un artículo para satisfacer las fluctuaciones de la demanda. El exceso de existencias de un artículo aumenta el costo del capital y de almacenamiento, y la escasez de existencias interrumpe la producción y/o las ventas. El resultado es buscar un nivel de inventario que balancee las dos situaciones extremas minimizando una función de costo apropiada. El problema se reduce a controlar el nivel del inventario diseñando una **política de inventario** que responda dos preguntas:

1. ¿*Cuánto* pedir?
2. ¿*Cuándo* pedir?

La base del modelo de inventario es la siguiente función de costo genérica:

$$\begin{pmatrix}\text{Costo}\\ \text{total del}\\ \text{inventario}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{compra}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{preparación}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo de}\\ \text{retención}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Costo por}\\ \text{escasez}\end{pmatrix}$$

1. El *costo de compra* es el precio por unidad de un artículo de inventario. En ocasiones, el artículo se ofrece con un descuento si el tamaño del pedido excede una cantidad determinada, lo cual es un factor al momento de tomar la decisión de *cuánto pedir*.
2. El *costo de preparación* representa el cargo fijo en que se incurre cuando se coloca un pedido (no importa su tamaño).
3. El *costo de retención* (almacenamiento) representa el costo de mantener las existencias de algo. Incluye el interés sobre el capital y el costo del almacenamiento, mantenimiento y manejo.
4. El *costo por escasez* (faltante) es la penalización en que se incurre cuando se agotan las existencias. Incluye la pérdida potencial de ingresos, la interrupción de la producción y el costo subjetivo de pérdida de lealtad del cliente.

Los costos descritos son conflictivos en el sentido de que el incremento de uno puede provocar la reducción de otro (por ejemplo, pedir con más frecuencia eleva el costo de preparación pero reduce el costo de retención del inventario). El propósito de la minimización de la función de costo del inventario total es balancear estos costos conflictivos.

Un sistema de inventario puede requerir **revisiones periódicas** (por ejemplo, pedir al inicio de cada semana o cada mes). Alternativamente, el sistema puede estar basado en **revisiones continuas**, colocando un nuevo pedido cuando el nivel del inventario se reduce a un **punto de volver a pedir** específico. Un ejemplo de los dos tipos ocurre en tiendas al menudeo. La revisión es periódica si el artículo se repone cada semana o cada mes. Es *continua* si la reposición ocurre siempre que el nivel del inventario se reduce por debajo de un determinado nivel.

13.2 EL PAPEL (ROL) DE LA DEMANDA EN EL DESARROLLO DE MODELOS DE INVENTARIO

En general, la complejidad de los modelos de inventario depende de si la demanda es determinística o probabilística. Dentro de ambas categorías, la demanda puede variar, o no, con el tiempo. Por ejemplo, el consumo de gas natural que se utiliza en la calefacción doméstica es estacional. Aun cuando dicho patrón se repite anualmente, el consumo en un mismo mes puede variar de un año a otro, dependiendo, por ejemplo, de la severidad del clima.

En situaciones prácticas, el patrón de la demanda en un modelo de inventario puede asumir uno de cuatro tipos:

1. Determinístico y constante (estático) con el tiempo.
2. Determinístico y variable (dinámico) con el tiempo.
3. Probabilístico y estacionario a lo largo del tiempo.
4. Probabilístico y no estacionario a lo largo del tiempo.

Esta clasificación supone la disponibilidad de datos confiables para pronosticar la futura demanda.

En función del desarrollo de modelos de inventario, la primera categoría es la más sencilla analíticamente, y la cuarta es la más compleja. Por otra parte, la primera categoría es la menos probable que ocurra en la práctica, y la cuarta es la más prevalente. En la práctica, el objetivo es balancear la sencillez y la precisión del modelo.

¿Cómo podemos decidir si una determinada aproximación de la demanda es aceptable? Una "estimación aproximada" inicial se basa en el cálculo de la media y la desviación estándar del consumo durante un periodo específico (por ejemplo, mensualmente). Entonces puede usarse el coeficiente de variación, $V = \frac{\text{Desviación estándar}}{\text{Media}} \times 100$, para valorar la naturaleza de la demanda utilizando el siguiente lineamiento:[1]

1. Si la demanda mensual promedio (registrada a lo largo de varios años) es "de manera aproximada" constante y V es razonablemente pequeño ($<20\%$), entonces la demanda puede considerarse determinística y constante

[1]El coeficiente de variación, V, mide la variación relativa o dispersión de los datos alrededor de la media. Por lo general, los valores altos de V indican una alta incertidumbre en el uso de la media como una aproximación del consumo mensual. Para la demanda determinística, $V = 0$, dado que la desviación estándar asociada es cero.

2. Si la demanda mensual promedio varía de manera apreciable entre los diferentes meses pero V permanece razonablemente pequeño en todos los meses, entonces la demanda puede considerarse determinística pero variable.
3. Si en el caso 1 V es alto (>20%) pero aproximadamente constante, entonces la demanda es probabilística y estacionaria.
4. El caso restante es la demanda probabilística no estacionaria, la cual ocurre cuando los promedios y los coeficientes de variación varían apreciablemente mes con mes.

Ejemplo 13.2-1

Los datos que aparecen en la tabla 13.1 proporcionan el consumo mensual (enero a diciembre) de gas natural en una residencia rural a lo largo de 10 años (1990-1999). El proveedor envía un camión para llenar el tanque a petición del propietario de la casa.

Desde el punto de vista del modelado de inventarios, es razonable suponer que cada mes representa un periodo de decisión para la colocación de un pedido. El propósito de este ejemplo es analizar la naturaleza de la demanda.

Un examen de la media y el coeficiente de variación, V, en la tabla 13.1, revela dos resultados:

1. El consumo promedio es dinámico (no constante) debido al alto consumo promedio durante los meses invernales.
2. El coeficiente de variación V es pequeño ($< 15\%$) de modo que la demanda mensual puede considerarse aproximadamente determinística.

La conclusión es que la demanda mensual es (aproximadamente) determinística pero variable.

TABLA 13.1 Consumo mensual de gas natural (enero a diciembre)

	Consumo de gas natural en pies^3											
Año	*Ene.*	*Feb.*	*Mar.*	*Abr.*	*May.*	*Jun.*	*Jul.*	*Ago.*	*Sep.*	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*
1990	100	110	90	70	65	50	40	42	56	68	88	95
1991	110	125	98	80	60	53	44	45	63	77	92	99
1992	90	100	88	79	56	57	38	39	60	70	82	90
1993	121	130	95	90	70	58	41	44	70	80	95	100
1994	109	119	99	75	68	55	43	41	65	79	88	94
1995	130	122	100	85	73	58	42	43	64	75	80	101
1996	115	100	103	90	76	55	45	40	67	78	98	97
1997	130	115	100	95	80	60	49	48	64	85	96	105
1998	125	100	94	86	79	59	46	39	69	90	100	110
1999	87	80	78	75	69	48	39	41	50	70	88	93
Media	111.7	110	95	82.5	69.6	55.3	42.7	42.2	62.8	77.2	90.7	98
Desv. Est.	15.54	15.2	7.5	7.99	7.82	3.95	3.4	2.86	6.09	6.91	6.67	6
V(%)	13.91	13.8	7.9	9.68	11.24	7.13	7.96	6.78	9.69	8.95	7.35	6.1

13.3 MODELOS ESTÁTICOS DE CANTIDAD DE PEDIDO ECONÓMICO (EOQ)

Esta sección presenta tres variaciones del modelo de cantidad de pedido económico (EOQ, por sus siglas en inglés) con demanda estática (constante). Estos modelos son analíticamente simples.

13.3.1 Modelo EOQ clásico

El más simple de los modelos de inventario implica una demanda de tasa constante con reposición de pedidos instantánea y sin escasez. Defina

y = Cantidad de pedido (número de unidades)
D = Tasa de demanda (unidades por unidad de tiempo)
t_0 = Duración del ciclo de pedido (unidades de tiempo)

El nivel de inventario sigue el patrón ilustrado en la figura 13.1. Cuando el inventario llega al nivel cero, se recibe al instante un pedido de y unidades de tamaño. Las existencias se agotan uniformemente a una tasa de demanda constante, D. El ciclo de pedido de este patrón es

$$t_0 = \frac{y}{D} \text{ unidades de tiempo}$$

El modelo de costo requiere dos parámetros de costo.

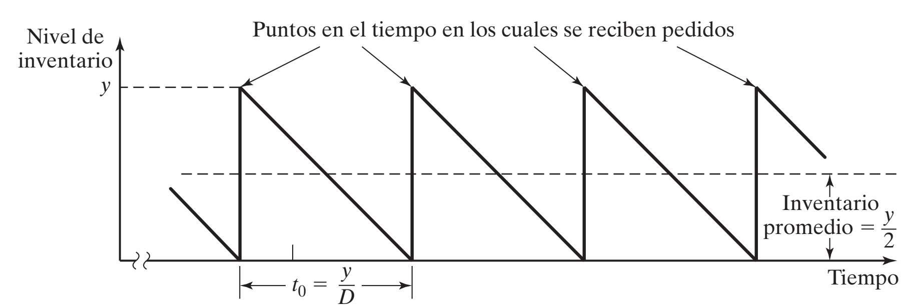
K = Costo de preparación asociado con la colocación de un pedido (dólares por pedido)
h = Costo de retención (dólares por unidad de inventario por unidad de tiempo)

Dado que el nivel de inventario promedio es $\frac{y}{2}$, el costo total *por unidad de tiempo* (TCU, por sus siglas en inglés) es

$$\begin{aligned}\text{TCU}(y) &= \text{Costo de preparación por unidad de tiempo} + \text{Costo de retención por unidad de tiempo}\\ &= \frac{\text{Costo de preparación} + \text{Costo de retención por ciclo } t_0}{t_0}\\ &= \frac{K + h\left(\frac{y}{2}\right)t_0}{t_0}\\ &= \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right)\end{aligned}$$

FIGURA 13.1

Patrón de inventario en el modelo EOQ clásico



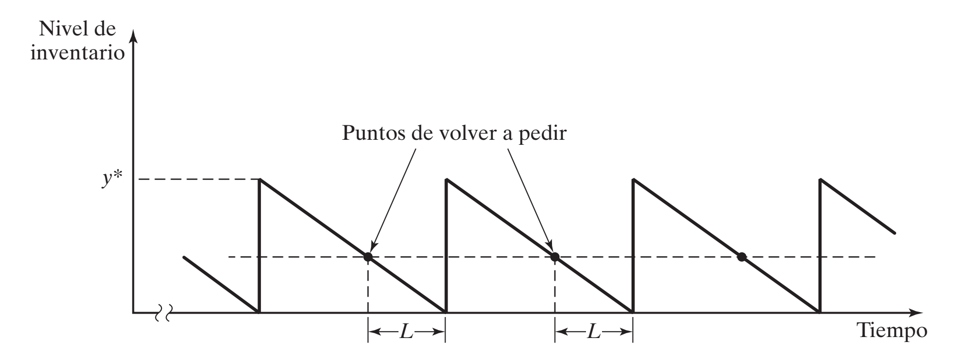


FIGURA 13.2
Punto de volver a pedir en el modelo EOQ clásico

El valor óptimo de la cantidad de pedido y se determina minimizando el TCU(y). Suponiendo que y es continua, una condición necesaria para la optimalidad es

$$\frac{d\text{TCU}(y)}{dy} = -\frac{KD}{y^2} + \frac{h}{2} = 0$$

La condición también es suficiente porque TCU(y) es convexa.

La solución de la ecuación da por resultado el EOQ y^* como

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

Por lo tanto, la política de inventario óptima para el modelo propuesto es

$$\text{Pedido } y^* = \sqrt{\tfrac{2KD}{h}} \text{ unidades de cada } t_0^* = \tfrac{y^*}{D} \text{ unidades de tiempo}$$

En realidad, un nuevo pedido no tiene que recibirse en el instante que se pide. En su lugar, puede ocurrir un **tiempo de espera** (tiempo de anticipación) positivo L, entre la colocación y el recibo de un pedido como se muestra en la figura 13.2. En este caso el **punto de volver a pedir** (punto de reorden) ocurre cuando el nivel del inventario se reduce a LD unidades.

La figura 13.2 asume que el tiempo de espera L es menor que la duración del ciclo t_0^*, lo cual por lo general puede no ser el caso. Si así sucediera, definimos el **tiempo de espera efectivo** como

$$L_e = L - nt_0^*$$

El parámetro n es el valor entero más grande no mayor que $\frac{L}{t_0^*}$. La fórmula reconoce que después de n ciclos el intervalo real entre la colocación y la recepción de dos pedidos sucesivos es L_e. Por lo tanto, el punto de volver a pedir ocurre cuando el inventario llega a L_eD unidades, y la política de inventario puede volverse a formular como

Pedir la cantidad y^* siempre que el nivel del inventario se reduzca a L_eD unidades.

Ejemplo 13.3-1

Las luces de neón en el campus de la Universidad de Arkansas se reemplazan a razón de 100 unidades por día. La planta física pide las luces de neón de forma periódica. Iniciar un pedido de compra cuesta $100. Se estima que el costo de una luz de neón almacenada es de aproximada-

mente \$.02 por día. El tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido es de 12 días. Determine la política de inventario óptima para pedir las luces de neón.

Con los datos del problema, tenemos

$D = 100$ unidades por día
$K = \$100$ por pedido
$h = \$.02$ por unidad por día
$L = 12$ días

Por lo tanto,

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times \$100 \times 100}{.02}} = 1000 \text{ luces de neón}$$

La duración del ciclo asociado es

$$t_0^* = \frac{y^*}{D} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ días}$$

Ya que el tiempo de espera L (= 12 días) excede la duración del ciclo t_0^* (=10 días), debemos calcular L_e. El número de ciclos enteros incluidos en L es

$$n = \left(\text{entero más grande} \leq \frac{L}{t_0^*}\right) = \left(\text{entero más grande} \leq \frac{12}{10}\right) = 1$$

Por lo tanto,

$$L_e = L - nt_0^* = 12 - 1 \times 10 = 2 \text{ días}$$

Por lo tanto, el punto de volver a pedir ocurre cuando el nivel del inventario se reduce a

$$L_eD = 2 \times 100 = 200 \text{ luces de neón}$$

La política de inventario es

Pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 200 unidades.

El costo de inventario diario asociado con la política propuesta es

$$\begin{aligned}\text{TCU}(y) &= \frac{K}{\left(\frac{y}{D}\right)} + h\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{\$100}{\left(\frac{1000}{100}\right)} + \$.02\left(\frac{1000}{2}\right) = \$20 \text{ por día}\end{aligned}$$

Momento de Excel

El archivo *excelEOQ.x1s* está diseñado para realizar los cálculos del EOQ general con escasez y operación de producción y consumo simultáneos, como se indica en el problema 10, conjunto 13.3a. También resuelve las situaciones de reducciones de precios presentada en la sección 13.3.2. Para utilizar la plantilla con el caso especial del ejemplo 13.3-1, ingrese −1 en las celdas C3:C5, C8 y C10 para indicar que los datos correspondientes no son aplicables, como se muestra en la figura 13.3.

	B	C	D
1	General Economic Order Quantity (EOQ)		
2	Input data: (Enter -1 in column C if data element does not apply)		
3	Item cost, c1 =	-1	
4	Qty discount limit, q =	-1	
5	Item cost, c2 =	-1	
6	Setup cost, K =	100	
7	Demand rate, D =	100	
8	Production rate, a =	-1	
9	Unit holding cost, h =	0.02	
10	Unit penalty cost, p =	-1	
11	Lead time, L =	12	
12	Model output results:		
13	Order qty, y* =	1000.00	
14	Shortage qty, w* =	0.00	
15	Reorder point, R =	200.00	
16	TCU(y*) =	20.00	
17	Purchase/prod. Cost =	0.00	
18	Setup cost/unit time =	10.00	
19	Holding cost /unit time =	10.00	
20	shortage cost/unit time =	0.00	
21	Optimal inventory policy: Order 1000.00 units when level drops to 200.00 units		
22	Model intermediate calculations:		
23	ym =	1000.00	
24	TCU1(ym)=	Not applicable	
25	Q-equation:	Not applicable	
26	Q =	Not applicable	
27	cycle length, t0 =	10.00	
28	Optimization zone =	Not applicable	
29	Effectice lead time, Le =	2.00	

FIGURA 13.3

Solución del ejemplo 13.3-1 obtenida con Excel (archivo *excelFOQ.xls*)

CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.3A

1. En cada uno de los siguientes casos no se permite la escasez, y el tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido es de 30 días. Determine la política de inventario óptima y el costo asociado por día.

(a) $K = \$100, h = \$.05, D = 30$ unidades por día

(b) $K = \$50, h = \$.05, D = 30$ unidades por día

(c) $K = \$100, h = \$.01, D = 40$ unidades por día

(d) $K = \$100, h = \$.04, D = 20$ unidades por día

***2.** McBurger pide carne molida al principio de cada semana para cubrir la demanda de 300 lb de la semana. El costo fijo por pedido es de \$20. Refrigerar y guardar la carne cuesta aproximadamente \$.03 por lb por día.

(a) Determine el costo de inventario por semana de la presente política de pedido.

(b) Determine la política de inventario óptima que McBurger debe utilizar, suponiendo un tiempo de espera cero entre la colocación y la recepción de un pedido.

3. Una compañía tiene un artículo en existencia que se consume a razón de 50 unidades por día. Cada vez que se coloca un pedido, a la compañía le cuesta $20. Una unidad de inventario mantenida en existencia durante una semana le costará $.35.

(a) Determine la política de inventario óptima, suponiendo un tiempo de espera de una semana.

(b) Determine la cantidad óptima anual de pedidos (basado en 365 días por año).

***4.** El departamento de compras de una compañía sugirió dos políticas de inventario:

Política 1. Pedir 150 unidades. El punto de volver a pedir es 50 unidades, y el tiempo entre la colocación y la recepción de un pedido es de 10 días.

Política 2. Pedir 200 unidades. El punto de volver a pedir es 75 unidades, y el tiempo entre la colocación y la recepción de un pedido es de 15 días.

El costo de preparación por pedido es de $20, y el costo de retención por unidad en inventario por día es de $.02.

(a) ¿Cuál de las dos políticas debe adoptar la compañía?

(b) Si estuviera a cargo de idear una política de inventarios para la compañía, ¿qué recomendaría suponiendo que el proveedor requiere un tiempo de espera de 22 días?

5. La tienda Walmark Store comprime y carga en una tarima las cajas de cartón vacías para reciclarlas. La tienda genera cinco tarimas al día. El costo de almacenar una tarima en la parte trasera de la tienda es de $.10 por día. La compañía que traslada las tarimas al centro de reciclaje cobra una cuota fija de $100 por la renta de su equipo de carga, más un costo de transporte variable de $3 por paleta. Grafique el cambio en la cantidad de tarimas con el tiempo, e idee una política óptima para el traslado de las tarimas al centro de reciclaje.

6. Un hotel utiliza un servicio de lavandería externo para proporcionar toallas limpias. El hotel genera 600 toallas sucias al día. El servicio de lavandería recoge las toallas sucias y las reemplaza con limpias a intervalos regulares. Hay un cargo fijo de $81 por el servicio de recolección y entrega, además del costo variable de $.60 por toalla. Al hotel le cuesta $.02 al día guardar una toalla sucia y $.01 por día guardar una limpia. ¿Con qué frecuencia debe utilizar el hotel el servicio de recolección y entrega? (*Sugerencia:* Hay dos tipos de artículos de inventario en esta situación. Conforme el nivel de las toallas sucias se incrementa, el de las toallas limpias se reduce al mismo ritmo).

7. *Lewis (1996).* Un empleado de una compañía multinacional se va de Estados Unidos a la subsidiaria de la compañía en Europa en calidad de préstamo. Durante el año, las obligaciones financieras del empleado en los Estados Unidos (por ejemplo, pagos de hipoteca y primas de seguros) ascienden a $12,000, distribuidas de manera uniforme a lo largo de los meses del año. El empleado puede cumplir con estas obligaciones depositando toda la suma en un banco estadounidense antes de partir a Europa. Sin embargo, en este momento la tasa de interés en Estados Unidos es bastante baja (alrededor de 1.5% anual) en comparación con la tasa de interés en Europa (6.5% anual). El costo del envío de fondos desde el extranjero es de $50 por transacción. Determine una política óptima para la transferencia de fondos de Europa a los Estados Unidos, y analice la implementación práctica de la solución. Mencione todas las suposiciones.

8. Considere la situación de inventarios en la cual las existencias se reponen de manera uniforme (en lugar de instantáneamente) a una tasa a. El consumo ocurre a la tasa constante D. Ya que el consumo también ocurre durante el periodo de reposición, es necesario que $a > D$. El costo de preparación es K por pedido, y el costo de retención es h por unidad, por unidad de tiempo. Si y es el tamaño del pedido y no se permite que haya escasez, demuestre que

(a) El nivel máximo del inventario es $y\left(1 - \frac{D}{a}\right)$.

(b) El costo total por unidad de tiempo dado y es

$$\text{TCU(y)} = \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}\left(1 - \frac{D}{a}\right)y$$

(c) La cantidad de pedido económica es

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h\left(1 - \frac{D}{a}\right)}}, D < a$$

(d) Demuestre que la EOQ en la situación de reposición instantánea puede derivarse de la fórmula en (c)

9. Una compañía puede producir una mercancía o adquirirla de un contratista. Si la produce, le costará \$20 cada vez que se preparen las máquinas. La tasa de producción es de 100 unidades por día. Si se la compra al contratista le costará \$15 cada vez que se coloque un pedido. El costo de mantener la mercancía en existencia, ya sea que se compre o se produzca, es de \$.02 por unidad por día. El uso que la compañía hace de la mercancía se estima en 26,000 unidades anualmente. Suponiendo que no se permite que haya escasez, ¿la compañía debe comprarla o producirla?

10. En el problema 8, suponga que se permite que haya escasez a un costo de penalización de p por unidad por unidad de tiempo.

(a) Si w es la escasez máxima durante el ciclo de inventario, demuestre que

$$\text{TCU}(y, w) = \frac{KD}{y} + \frac{h\{y\left(1 - \frac{D}{a}\right) - w\}^2 + pw^2}{2\left(1 - \frac{D}{a}\right)y}$$

$$y = \sqrt{\frac{2KD(p + h)}{ph\left(1 - \frac{D}{a}\right)}}$$

$$w = \sqrt{\frac{2KDh\left(1 - \frac{D}{a}\right)}{p(p + h)}}$$

(b) Demuestre que los resultados de la EOQ de la sección 13.3.1 pueden derivarse a partir de las fórmulas generales en (a).

13.3.2 EOQ con reducciones de precios

Este modelo es el mismo de la sección 13.3.1, excepto que el artículo en inventario puede adquirirse con un descuento si el tamaño del pedido, y, excede un límite dado, q. Matemáticamente, el precio de compra unitario, c, es

$$c = \begin{Bmatrix} c_1, \text{si } y \leq q \\ c_2, \text{si } y > q \end{Bmatrix}, c_1 > c_2$$

Por consiguiente,

$$\text{Costo de compra por unidad de tiempo} = \begin{cases} \dfrac{c_1 y}{t_0} = \dfrac{c_1 y}{\left(\frac{y}{D}\right)} = Dc_1, \ y \leq q \\ \dfrac{c_2 y}{t_0} = \dfrac{c_2 y}{\left(\frac{y}{D}\right)} = Dc_2, \ y > q \end{cases}$$

Aplicando la notación utilizada en la sección 13.3.1, el costo total por unidad de tiempo es

$$\text{TCU}(y) = \begin{cases} TCU_1(y) = Dc_1 + \dfrac{KD}{y} + \dfrac{h}{2}y, \ y \leq q \\ TCU_2(y) = Dc_2 + \dfrac{KD}{y} + \dfrac{h}{2}y, \ y > q \end{cases}$$

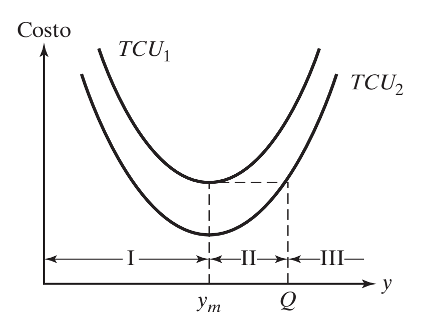


FIGURA 13.4
Función de costo de inventario con reducciones de precio

Las funciones TCU_1 y TCU_2 se grafican en la figura 13.4. Debido a que las dos funciones difieren sólo por una constante, sus mínimos deben coincidir en

$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

La determinación de la cantidad de pedido óptima y^* depende de dónde queda el punto de reducción de precios, q, con respecto a las zonas I, II y III, delineadas en la figura 13.4 por los intervalos $(0, y_m)$, (y_m, Q) y (Q, ∞), respectivamente. El valor de $Q(> y_m)$ se determina a partir de la ecuación

$$TCU_2(Q) = TCU_1(y_m)$$

o

$$c_2D + \frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2} = TCU_1(y_m)$$

la cual se simplifica a

$$Q^2 + \left(\frac{2(c_2D - TCU_1(y_m))}{h}\right)Q + \frac{2KD}{h} = 0$$

La figura 13.5 muestra que la cantidad óptima deseada y^* es

$$y^* = \begin{cases} y_m, \text{ si } q \text{ se encuentra en las zonas I o III} \\ q, \text{ si } q \text{ se encuentra na la zona II} \end{cases}$$

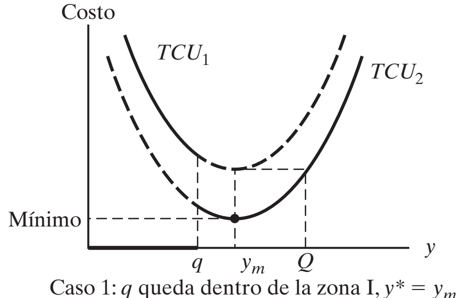
Los pasos para determinar y^* son

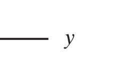
Paso 1. Determine $y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$. Si q está en la zona I, entonces $y^* = y_m$. De lo contrario, vaya al paso 2.

Paso 2. Determine $Q(> y_m)$ a partir de la ecuación Q

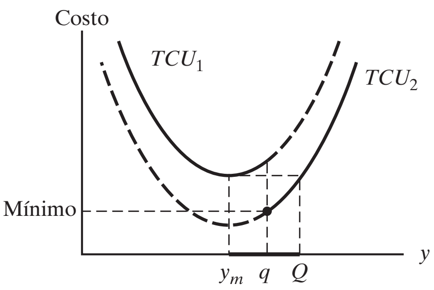
$$Q^2 + \left(\frac{2(c_2D - TCU_1(y_m))}{h}\right)Q + \frac{2KD}{h} = 0$$

Defina las zonas II y III. Si q está en la zona II, $y^* = q$. De lo contrario, q está en la zona III, y $y^* = y_m$.

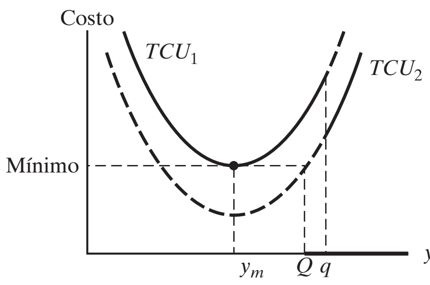




Caso 1: q queda dentro de la zona I, $y^* = y_m$



Caso 2: q queda en la zona II, $y^* = q$



Caso 3: q queda en la zona III, $y^* = y_m$

FIGURA 13.5

Solución óptima de los problemas de inventario con reducciones de precio

---

Ejemplo 13.3-2

LubeCar se especializa en cambios de aceite rápidos. El taller compra aceite automotriz a granel a \$3 por galón descontado a \$2.50 si la cantidad de pedido es de más de 1000 galones. El taller atiende aproximadamente 150 automóviles por día, y cada cambio de aceite requiere 1.25 galones. LubeCar guarda el aceite a granel a un costo de \$.02 por galón por día. Incluso, el costo de colocar un pedido es de \$20. El tiempo de espera es de 2 días para la entrega. Determine la política de inventario óptima.

El consumo de aceite por día es

$$D = 150 \text{ autos por día} \times 1.25 \text{ galones por auto} = 187.5 \text{ galones por día}$$

También tenemos

$h = \$.02$ por galón por día
$K = \$20$ por pedido
$L = 2$ días
$c_1 = \$3$ por galón
$c_2 = \$2.50$ por galón
$q = 1000$ galones

Paso 1. Calcule

$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 20 \times 187.5}{.02}} = 612.37 \text{ galones}$$

Como $q = 1000$ es mayor que $y_m = 612.37$, nos vamos al paso 2.

Paso 2. Determine Q.

$$TCU_1(y_m) = c_1D + \frac{KD}{y_m} + \frac{hy_m}{2}$$
$$= 3 \times 187.5 + \frac{20 \times 187.5}{612.37} + \frac{.02 \times 612.37}{2}$$
$$= 574.75$$

Por consiguiente la ecuación Q se calcula como

$$Q^2 + \left(\frac{2 \times (2.5 \times 187.5 - 574.75)}{.02}\right)Q + \frac{2 \times 20 \times 187.5}{.02} = 0$$

o

$$Q^2 - 10{,}599.74Q + 375{,}000 = 0$$

La solución $Q = 10{,}564.25$ ($> y_m$) define las zonas como

$$\text{Zona I} = (0, 612.37)$$
$$\text{Zona II} = (612.37, 10{,}564.25)$$
$$\text{Zona III} = (10{,}564.25, \infty)$$

Ahora, $q(= 1000)$ queda en la zona II, la cual produce la cantidad de pedido óptima $y^* = q = 1000$ galones.

Dado un tiempo de espera de 2 días, el punto de volver a pedir es $2D = 2 \times 187.5 = 375$ galones. Por lo tanto, la política de inventario óptima es "*Pedir 1000 galones cuando el nivel de inventario se reduzca a 375 galones*".

Momento de Excel

El archivo *excelEOQ.xIs* resuelve la situación de precio descontado como un caso especial de la plantilla en la figura 13.3. Ingrese los datos aplicables en la sección de datos de entrada C3:C11. La pantalla de resultados da la política de inventario óptima y también los cálculos intermedios del modelo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.3B

1. Considere la situación del servicio de lavandería del hotel del problema 6, conjunto 13.3a. El cobro normal por lavar una toalla sucia es de \$.60, pero el servicio de lavandería cobrará sólo \$.50 Si el hotel entrega las toallas en lotes de al menos 2500. ¿El hotel debe aprovechar el descuento?

***2.** Un artículo se consume a razón de 30 artículos por día. El costo de retención por unidad por día es de \$.05 y el costo de preparación es de \$100. Suponga que no se permiten faltantes y que el costo de compra por unidad es de \$10 para cualquier cantidad que de otro modo no exceda las 500 unidades y los \$8. El tiempo de espera es de 21 días. Determine la política de inventario óptima.

3. Un artículo se vende a \$25 cada uno, pero se ofrece un 10% de descuento para lotes de 150 unidades o más. Una compañía utiliza este artículo a razón de 20 unidades por día. El costo de preparación para pedir un lote es de \$50, y el costo de retención por unidad por día es de \$.30. El tiempo de espera es de 12 días. ¿Debe aprovechar la compañía el descuento?

***4.** En el problema 3, determine el intervalo del porcentaje de descuento del precio que, cuando se ofrece para lotes de 150 unidades o más, no representará una ventaja financiera para la compañía.

5. En el modelo de inventario analizado en esta sección, suponga que el costo de retención por unidad por unidad de tiempo es h_1 para cantidades por debajo de q y h_2, de lo contrario, $h_1 > h_2$. Demuestre cómo se determina el tamaño de lote económico.

13.3.3 Cantidad de pedido económica (EOQ) de varios artículos con limitación de almacenamiento

Este modelo se ocupa de varios artículos cuyas fluctuaciones de inventario individuales siguen el patrón mostrado en la figura 13.1 (no se permiten faltantes). La diferencia es que los artículos compiten por un espacio de almacenamiento limitado.

Defina para el artículo i, $i = 1, 2, \ldots, n$,

D_i = Tasa de demanda
K_i = Costo de preparación
h_i = Costo de retención unitario por unidad de tiempo
y_i = Cantidad de pedido
a_i = Requerimiento de área de almacenamiento por unidad de inventario
A = Área de almacenamiento máxima disponible para todos los n artículos

Conforme a la suposición de que no se permiten faltantes, el modelo matemático que representa la situación del inventario se da como

$$\text{Minimizar TCU}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i y_i}{2}\right)$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \le A$$

$$y_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$$

Para resolver el problema, primero abordamos la situación no restringida:

$$y_i^* = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{h_i}}, i = 1, 2, \ldots, n$$

Si la solución satisface la restricción, entonces el proceso termina. De lo contrario, la restricción es obligatoria y debe ser activada.

En ediciones anteriores de este libro utilizamos el algoritmo Lagrangeano (un tanto complicado) y cálculos de prueba y error para determinar la solución óptima restringida. Con la disponibilidad de poderosos programas de cómputo (como AMPL y Solver), el problema se resuelve de forma directa como un programa no lineal, como se demostrará en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13.3-3

Los datos siguientes describen tres artículos de inventario.

Artículo i	K_i (\$)	D_i(unidades por día)	h_i(\$)	a_i(pies^2)
1	10	2	.30	1
2	5	4	.10	1
3	15	4	.20	1
Área de almacenamiento total disponible = 25 pies^2				

Los valores óptimos no restringidos, $y_i^* = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{h_i}}$, $i = 1, 2, 3$, son 11.55, 20.00 y 24.49 unidades, respectivamente, los cuales violan la restricción de almacenamiento $y_1 + y_2 \leq 25$. El problema restringido puede resolverse como un programa lineal utilizando Solver o AMPL, como se explica a continuación.

La solución óptima es $y_1^* = 6.34$ unidades, $y_2^* = 7.09$ unidades, $y_3^* = 11.57$ unidades, y el costo = \$13.62/día.

Momento de Solver

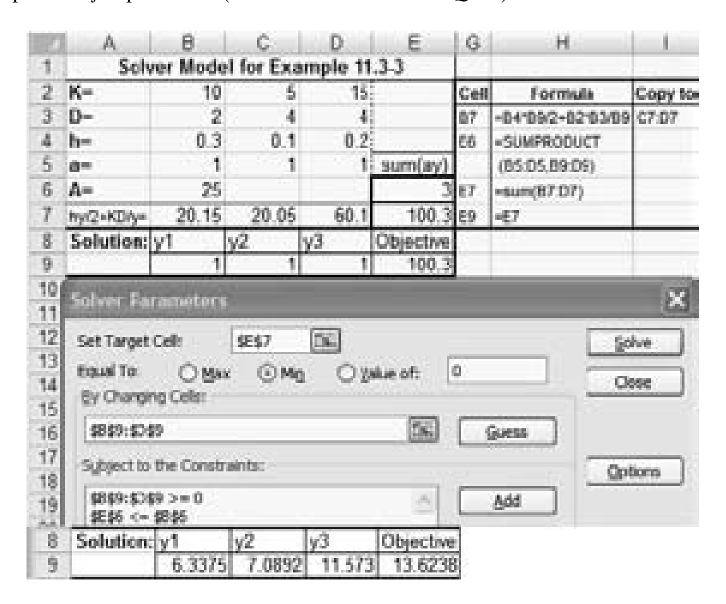
La figura 13.6 muestra cómo puede usarse Solver para resolver el ejemplo 13.3-3 como un programa no lineal (archivo *solverConstrEOQ.xls)*. Los detalles de las fórmulas utilizadas en la plantilla y de los parámetros Solver se muestran en la figura. Como con la mayoría de los programas no lineales, deben darse los valores iniciales (en esta plantilla, $y_1 = y_2 = y_3 = 1$ en la fila 9). Un valor inicial *no cero* es obligatorio porque la función objetivo incluye la división entre y_i. De hecho, puede ser una buena idea reemplazar K_iD_i/y_i con $K_iD_i/(y_i + \Delta)$, donde Δ es un valor positivo muy pequeño, para evitar la división entre cero durante las iteraciones. Por lo general, quizá se requieran valores iniciales diferentes antes de que se determine una solución (óptima local). En este ejemplo, la solución resultante es la óptima global porque la función objetivo y las restricciones se comportan bien (función objetivo convexa y espacio de soluciones convexo).

Momento AMPL

El modelo AMPL no lineal para la situación general de cantidad de pedido económica de varios artículos con limitación de almacenamiento (archivo *amplConstrEOQ.txt*) se explica en la figura C.17 en el apéndice C en el sitio web.

FIGURA 13.6

Plantilla Solver para el ejemplo 13.3-3 (archivo *solverConstrEOQ.xls*)



CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.3C[2]

*1. Los datos siguientes describen cinco artículos de inventario.

Artículo, i	K_i (\$)	D_i (unidades por día)	h_i (\$)	a_i (pies^2)
1	20	22	0.35	1.0
2	25	34	0.15	0.8
3	30	14	0.28	1.1
4	28	21	0.30	0.5
5	35	26	0.42	1.2
Área de almacenamiento total disponible = 25 pies^2				

Determine las cantidades de pedido óptimas.

2. Resuelva el modelo del ejemplo 13.3-3, suponiendo que requerimos que la suma de los inventarios promedio de todos los artículos sea menor que 25 unidades.

3. En el problema 2, suponga que la única restricción es un límite de \$1000 en la cantidad de capital que puede invertirse en el inventario. Los costos de compra por unidad de los artículos 1, 2 y 3 son, \$100, \$55 y \$100, respectivamente. Determine la solución óptima.

*4. Los siguientes datos describen cuatro artículos de inventario.

Artículo, i	K_i (\$)	D_i (unidades por día)	h_i (\$)
1	100	10	.1
2	50	20	.2
3	90	5	.2
4	20	10	.1

La compañía desea determinar la cantidad de pedido económica para cada uno de los cuatro artículos de modo que el total de pedidos por año de 365 días es cuando mucho de 150. Formule el problema como un programa no lineal, y determine la solución óptima.

13.4 MODELOS DINÁMICOS DE CANTIDAD DE PEDIDO ECONÓMICA (EOQ)

Estos modelos difieren de los de la sección 13.3 en dos aspectos:

1. El nivel del inventario se revisa periódicamente a lo largo de un número finito de periodos iguales.

2. La demanda por periodo, aun cuando es determinística, es dinámica, en cuanto varía de un periodo al siguiente.

Una situación en la cual ocurre la demanda determinística dinámica es la **planeación de requerimiento de materiales** (MRP, por sus siglas en inglés). La idea de la MRP se describe con un ejemplo. Suponga que las demandas trimestrales durante el año siguiente para dos modelos finales, *M*1 y *M*2, de un producto dado son 100 y 150 unidades, respectivamente. Al final de cada trimestre se entregan los lotes trimestrales. El tiempo de espera de producción es de dos meses para *M*l y de un mes para *M*2. Cada

[2]Verá que los archivos *solverConstrEOQ.xls* y *amplConstrEOQ* son útiles al resolver problemas de este conjunto.

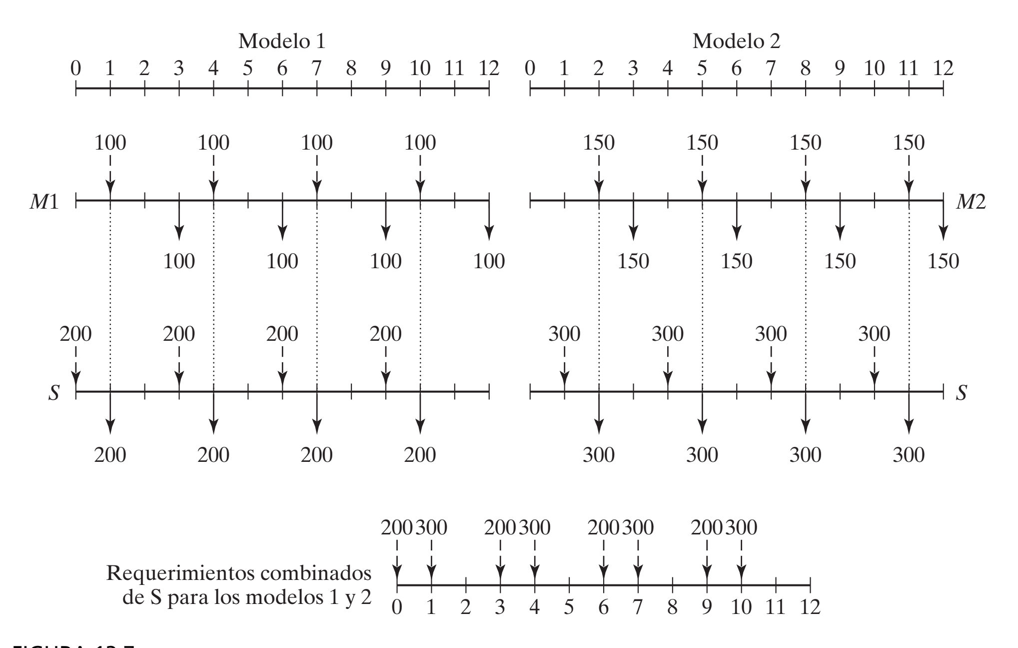


FIGURA 13.7

Ejemplo de demanda dinámica generada por MRP

unidad de *M*1 y *M*2 utiliza 2 unidades de un subensamble *S*. El tiempo de espera para la producción de *S* es de un mes.

La figura 13.7 muestra los programas de producción para *M*l y *M*2. Los programas se inician con la demanda trimestral de los dos modelos (mostrada por flechas sólidas) que ocurre al final de los meses 3, 6, 9 y 12. Dados los tiempos de espera para *M*1 y *M*2, las flechas de rayas muestran los inicios planeados de cada lote de producción.

Para iniciar a tiempo la producción de los dos modelos, la entrega del subensamble *S* debe coincidir con la ocurrencia de las flechas de rayas *M*1 y *M*2. Esta información se muestra por medio de las flechas sólidas en la gráfica *S*, donde la demanda *S* resultante es de 2 unidades por unidad de *M*1 y *M*2. Utilizando un tiempo de espera de un mes, las flechas de rayas en la gráfica *S* dan los programas de producción de *S*. De acuerdo con estos dos programas, la demanda combinada de *S* correspondiente a *M*1 y *M*2 puede determinarse entonces como se muestra en la parte inferior de la figura 13.7. La demanda *variable pero conocida* resultante de *S* es típica de la situación, donde aplica la EOQ dinámica.

En esta sección se presentan dos modelos. El primero asume que no hay costo de preparación (de pedido), y el segundo asume que sí lo hay. Esta variación aparentemente "pequeña" hace la diferencia en la complejidad del modelo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.4A

1. En la figura 13.7, determine los requerimientos combinados para el subensamble *S* en cada uno de los siguientes casos:

*__(a)__ El tiempo de espera para M_1 es de sólo un periodo.

(b) El tiempo de espera para M_1 es de tres periodos.

13.4.1 Modelo de EOQ sin costo de preparación

Este modelo implica un horizonte de planeación de n periodos iguales. Cada periodo tiene una capacidad de producción limitada con uno o más niveles de producción (por ejemplo, el tiempo regular y el tiempo extra representan dos niveles de producción). Un periodo actual puede producir más que su demanda inmediata para satisfacer la necesidad de periodos posteriores, en cuyo caso ocurre un costo de retención.

Las suposiciones generales del modelo son:

1. No se incurre en costo de preparación en ningún periodo.
2. No se permite que haya faltantes.
3. La función de costo de producción unitario en cualquier periodo es constante o tiene costos marginales crecientes (convexos).
4. El costo de retención unitario en cualquier periodo es constante.

La ausencia de faltantes significa que la producción demorada en periodos futuros no puede satisfacer la demanda en un periodo actual. Esta suposición requiere que la capacidad de producción acumulada para los periodos 1, 2,…, e i sea igual al menos a la demanda acumulada durante los mismos periodos.

La figura 13.8 ilustra la función de costo de producción unitario con márgenes crecientes. Por ejemplo, la producción durante el tiempo regular y el tiempo extra corresponde a dos niveles donde el costo de producción unitario durante el tiempo extra excede al del tiempo regular.

El problema de n periodos puede formularse como un modelo de transporte (vea el capítulo 5) con kn orígenes y n destinos, donde k es el número de niveles de producción por periodo (por ejemplo, $k = 2$ si cada periodo utiliza tiempo regular y tiempo extra). La capacidad de producción de cada uno de los kn orígenes de nivel de producción es igual a las cantidades de oferta. Las cantidades demandadas se especifican por la demanda de cada periodo. El costo de "transporte" unitario desde un origen hasta un destino es la suma de los costos de producción y retención aplicables por unidad. La solución del problema como un modelo de transporte determina las cantidades de producción a un costo mínimo en cada nivel de producción.

El modelo de transporte resultante puede resolverse sin utilizar la conocida técnica del transporte presentada en el capítulo 5. La validez del nuevo algoritmo de solución se fundamenta en las suposiciones especiales de nada de faltantes y en una función de costo de producción convexa.

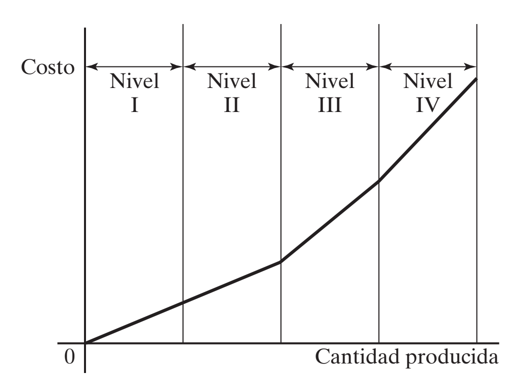


FIGURA 13.8
Función de costo de producción unitario convexa

Ejemplo 13.4-1

Metalco produce deflectores de chiflones que se utilizan en chimeneas domésticas durante los meses de diciembre a marzo. Al inicio la demanda es lenta, alcanza su máximo a mediados de la temporada, y baja hacia el final. Debido a la popularidad del producto, MetalCo puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda. La siguiente tabla proporciona las capacidades de producción y las demandas durante los cuatro meses de invierno.

	Capacidad		
Mes	*Tiempo regular (unidades)*	*Tiempo extra (unidades)*	*Demanda (unidades)*
1	90	50	100
2	100	60	190
3	120	80	210
4	110	70	160

El costo de producción unitario en cualquier periodo es de \$6 durante el tiempo regular y de \$9 durante el tiempo extra. El costo de retención por unidad por mes es de \$.10.

Para asegurarnos de que el modelo tenga una solución factible cuando no se permiten faltantes, la oferta acumulada de cada mes no puede ser menor que la demanda acumulada, como se muestra en la tabla siguiente.

Mes	Oferta acumulada	Demanda acumulada
1	$90 + 50 = 140$	100
2	$140 + 100 + 60 = 300$	$100 + 190 = 290$
3	$300 + 120 + 80 = 500$	$290 + 210 = 500$
4	$500 + 110 + 70 = 680$	$500 + 160 = 660$

La tabla 13.2 resume el modelo y su solución. Los símbolos R_i y O_i representan niveles de producción durante tiempo regular y durante tiempo extra en el periodo i, $i = 1, 2, 3, 4$. Debido a que la oferta acumulada en el periodo 4 excede la demanda acumulada, se agrega un destino ficticio para balancear el modelo como se muestra en la tabla 13.2. Todas las rutas de "transporte" desde un periodo anterior a uno actual están bloqueadas porque no se permiten faltantes.

El costo de "transporte" unitario es la suma de los costos de producción y retención aplicables. Por ejemplo, el costo unitario del periodo R_1 al periodo 1 es igual al costo de producción unitario únicamente (= \$6), en tanto que el costo unitario de O_1 al periodo 4 es igual al costo de producción unitario en O_1 más el costo de retención unitario desde el periodo 1 hasta el periodo 4; es decir, \$9 + (\$.1 + \$.1 + \$.1) = \$9.30. El costo unitario para cualquier destino *excedente* es cero.

El modelo se resuelve iniciando en la columna 1 y terminando en la columna *excedente*. Para cada columna, la demanda se satisface dando prioridad a su rutas mas económicas.[3] Para la columna 1, la ruta $(R_1, 1)$ es la más económica y por lo tanto se le asigna la cantidad factible máxima = $\min\{90, 100\} = 90$ unidades. Esta asignación deja 10 unidades no satisfechas en la columna 1. La siguiente ruta más económica en la columna 1 es $\{O_1, 1\}$, a la cual se le asigna 10 (= min $\{50, 10\}$). Ahora la demanda durante el periodo 1 está satisfecha.

[3] Para una comprobación de la optimalidad de este procedimiento, vea S.M. Johnson, "Sequential Production Planning over Time at Minimum Cost", *Management Science*, vol. 3, págs. 435-437, 1957.

TABLA 13.2 Solución del ejemplo 13.4-1

	1	2	3	4	Excedente	
R_1	6 **90**	6.1	6.2	6.3	0	**90**
O_1	9 **10**	9.1 **30**	9.2 **10**	9.3	0	**50 → 40 → 10**
R_2		6 **100**	6.1	6.2	0	**100**
O_2		9 **60**	9.1	9.2	0	**60**
R_3			6 **120**	6.1	0	**120**
O_3			9 **80**	9.1	0	**80**
R_4				6 **110**	0	**110**
O_4				9 **50**	0 **20**	**70 → 20**
	100 → 10	**190 → 90 → 30**	**210 → 90 → 10**	**160 → 50**	**20**	

Luego pasamos a la columna 2. Las asignaciones en esta columna ocurren en el orden siguiente: 100 unidades a $(R_2, 2)$, 60 unidades a $(0_2, 2)$, y 30 unidades a $(0_1, 2)$. Los costos unitarios de estas asignaciones son \$6, \$9 y \$9.10, respectivamente. No utilizamos la ruta $(R_1, 2)$, cuyo costo unitario es de \$6.10, porque toda la oferta de R_1 ya se asignó al periodo 1.

Continuando de la misma manera, satisfacemos las demandas de la columna 3 y de la columna 4. La solución óptima (mostrada en negritas en la tabla 13.2) se resume como sigue:

Periodo	Programa de producción
Tiempo regular 1	Producir 90 unidades durante el periodo 1.
Tiempo extra 1	Producir 50 unidades: 10 unidades durante el periodo 1, 30 durante el 2, y 10 durante el 3.
Tiempo regular 2	Producir 100 unidades durante el periodo 2.
Tiempo extra 2	Producir 60 unidades durante el periodo 2.
Tiempo regular 3	Producir 120 unidades durante el periodo 3.
Tiempo extra 3	Producir 80 unidades durante el periodo 3.
Tiempo regular 4	Producir 110 unidades durante el periodo 4.
Tiempo extra 4	Producir 50 unidades durante el periodo 4, con 20 unidades de capacidad ociosa.

El costo total asociado es $(90 \times \$6) + (10 \times \$9) + (30 \times \$9.10) + (100 \times \$6) + (60 \times \$9) + (10 \times \$9.20) + (120 \times \$6) + (80 \times \$9) + (110 \times \$6) + (50 \times \$9) = \$4685$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.4B

1. Resuelva el ejemplo 13.4-1, suponiendo que los costos de producción y retención unitarios son los que aparecen en la tabla siguiente.

Periodo i	Costo unitario durante tiempo regular ($)	Costo unitario durante tiempo extra ($)	Costo de retención unitario ($) hasta el periodo $i + 1$
1	5.00	7.50	.10
2	3.00	4.50	.15
3	4.00	6.00	.12
4	1.00	1.50	.20

2. Se fabrica un artículo para satisfacer la demanda conocida durante cuatro periodos de acuerdo con los datos siguientes:

	Costo de producción unitario ($) durante el periodo			
Intervalo de producción (unidades)	*1*	*2*	*3*	*4*
1–3	1	2	2	3
4–11	1	4	5	4
12–15	2	4	7	5
16–25	5	6	10	7
Costo de retención unitario hasta el siguiente periodo ($)	.30	.35	.20	.25
Demanda total (unidades)	11	4	17	29

(a) Encuentre la solución óptima e indique las unidades que se producirán en cada periodo.

(b) Suponga que se requieren 10 unidades adicionales en el periodo 4. ¿Dónde deben producirse?

***3.** La demanda de un producto durante los siguientes cinco periodos puede satisfacerse con producción regular, producción con tiempo extra, o subcontratación. Puede acudirse a la subcontratación sólo si se ha utilizado la capacidad de tiempo extra. La siguiente tabla proporciona la oferta, la demanda y los datos del costo de la situación.

	Capacidad de producción (unidades)			
Periodo	*Tiempo regular*	*Tiempo extra*	*Subcontratación*	Demanda
1	100	50	30	153
2	40	60	80	200
3	90	80	70	150
4	60	50	20	200
5	70	50	100	203

Los costos de producción unitarios en los tres niveles de cada periodo son $4, $6 y $7, respectivamente. El costo de retención unitario por periodo es de $.50. Determine la solución óptima.

13.4.2 Modelo de EOQ con costo de preparación

En esta situación no se permiten faltantes, y se incurre en un costo de preparación cada vez que se inicia un nuevo lote de producción. Se presentarán dos métodos de solución: un algoritmo de programación exacta dinámica y una heurística.

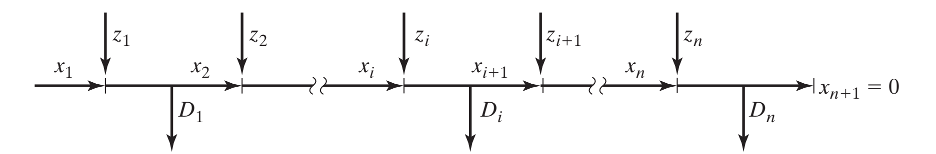


FIGURA 13.9

Elementos del modelo de inventario dinámico con costo de preparación

La figura 13.9 resume esquemáticamente la situación del inventario. Los símbolos mostrados en la figura se definen para el periodo i, $i = 1, 2, \ldots, n$, como

z_i = Cantidad pedida

D_i = Demanda durante el periodo

x_i = Inventario al inicio del periodo i

Los elementos de costos de la situación se definen como

K_i = Costo de preparación en el periodo i

h_i = Costo de retención de inventario unitario del periodo i a $i + 1$

La función de costo de producción asociado para el periodo i es

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 0, & z_i = 0 \\ K_i + C_i(z_i), & z_i > 0 \end{cases}$$

La función $c_i(z_i)$ es la función de costo de producción marginal, dada z_i.

Algoritmo de programación dinámica general. Sin faltantes, el modelo de inventario se basa en minimizar la suma de los costos de producción y retención en los n periodos. A fin de simplificar, supondremos que el costo de retención en el periodo i se basa en el inventario de final de periodo, definido como

$$x_{i+1} = x_i + z_i - D_i$$

Para la ecuación recursiva hacia adelante, o de avance, el *estado* en la *etapa* (periodo) i se define como x_{i+1}, el nivel del inventario al final del periodo. En el caso extremo, el inventario restante, x_{i+1}, puede satisfacer la demanda en todos los periodos restantes; es decir,

$$0 \leq x_{i+1} \leq D_{i+1} + \ldots + D_n$$

Sea $f_i(x_{i+1})$ el costo mínimo del inventario para los periodos $1, 2, \ldots,$ e i dado el inventario al final del periodo x_{i+1}. La ecuación recursiva hacia adelante es

$$f_1(x_2) = \min_{z_1 = D_1 + x_2 - x_1} \{C_1(z_1) + h_1 x_2\}$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{0 \leq z_i \leq D_i + x_{i+1}} \{C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + D_i - z_i)\}, i = 2, 3, \ldots, n$$

Observe que durante el periodo 1, z_1 es exactamente igual a $D_1 + x_2 - x_1$. Para $i > 1$, z_i puede ser cero porque D_i puede satisfacerse a partir de la producción en periodos precedentes.

Ejemplo 13.4-2

La siguiente tabla proporciona los datos de una situación de inventario de 3 periodos.

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación, K_i (\$)	Costo de retención, h_i(\$)
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

La demanda ocurre en unidades discretas, y el inventario de inicio es $x_1 = 1$ unidad. El costo de producción unitario, $c_i(z_i)$, es de \$10 para las primeras 3 unidades y de \$20 para cada unidad adicional, es decir,

$$c_i(z_i) = \begin{cases} 10z_i, & 0 \leq z_i \leq 3 \\ 30 + 20(z_i - 3), & z_i \geq 4 \end{cases}$$

Determine la política de inventario óptima.

Periodo 1: $D_1 = 3, 0 \leq x_2 \leq 2 + 4 = 6, z_1 + D_1 - x_1 = x_2 + 2$

		$C_1(z_1) + h_1x_2$							Solución óptima	
		$z_1 = 2$	3	4	5	6	7	8		
x_2	h_1x_2	$C_1(z_1) = 23$	33	53	73	93	113	133	$f_1(x_2)$	z_1^*
0	0	23							23	2
1	1		34						34	3
2	2			55					55	4
3	3				76				76	5
4	4					97			97	6
5	5						118		118	7
6	6							139	139	8

Observe que debido a que $x_1 = 1$, el valor mínimo de z_1 es $D_1 - x_1 = 3 - 1 = 2$.

Periodo 2: $D_2 = 2{,}0 \leq x_3 \quad 4{,}0 \leq z_2 \leq D_2 + x_3 = x_3 + 2$

		$C_2(z_2) + h_2x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$							Solución óptima	
		$z_2 = 0$	1	2	3	4	5	6		
x_3	h_2x_3	$C_2(z_2) = 0$	17	27	37	57	77	97	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0 + 55 = 55	17 + 34 = 51	27 + 23 = 50					50	2
1	3	3 + 76 = 79	20 + 55 = 75	30 + 34 = 64	40 + 23 = 63				63	3
2	6	6 + 97 = 103	23 + 76 = 99	33 + 55 = 88	43 + 34 = 77	63 + 23 = 86			77	3
3	9	9 + 118 = 127	26 + 97 = 123	36 + 76 = 112	46 + 55 = 101	66 + 34 = 100	86 + 23 = 109		100	4
4	12	12 + 139 = 151	29 + 118 = 147	39 + 97 = 136	49 + 76 = 125	69 + 55 = 124	89 + 34 = 123	109 + 23 = 132	123	5

Periodo 3: $D_3 = 4, x_4 = 0, 0 \leq z_3 \leq D_3 + x_4 = 4$

		$C_3(z_3) + h_3x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$						
		$z_3 = 0$	1	2	3	4	Solución óptima	
x_4	h_3x_4	$C_3(z_3) = 0$	16	26	36	56	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	0 + 123 = 123	16 + 100 = 116	26 + 77 = 103	36 + 63 = 99	56 + 50 = 106	99	3

La solución óptima se lee como sigue:

$$(x_4 = 0) \rightarrow \boxed{z_3 = 3} \rightarrow (x_3 = 0 + 4 - 3 = 1) \rightarrow \boxed{z_2 = 3}$$

$$\rightarrow (x_2 = 1 + 2 - 3 = 0) \rightarrow \boxed{z_1 = 2}$$

Por lo tanto, la solución óptima es $z_1^* = 2, z_2^* = 3$, y $z_3^* = 3$, con un costo total de $99.

Momento de Excel

La plantilla *exce1DPlnv.xls* está diseñada para resolver el problema de inventario de PD con hasta 10 periodos. El diseño de la hoja de cálculo es parecido al de *excelKnapsack.xls* dada en la sección 12.3.1, donde los cálculos se realizan etapa por etapa y se requiere que el usuario ingrese los datos para conectar las etapas sucesivas.

La figura 13.10 muestra la aplicación de *excelDPInv.xls* al ejemplo 13.4-2. Los datos de entrada se ingresan para cada etapa. Los cálculos se inician con el periodo 1. Observe cómo se ingresa la función de costo $c_i(z_i)$ en la fila 3: (G3 = 10, H3 = 20, I3 = 3) significa que el costo unitario es de $10 para los primeros tres artículos y de $20 para los artículos adicionales. Observe también que la cantidad ingresada para D_1 debe ser la neta una vez que se ha amortizado el inventario inicial ($=3 - x_1 = 3 - 1 = 2$). Además, tiene que crear los valores factibles de la variable z_1. La hoja de cálculo verifica de forma automática si los valores ingresados son correctos, y envía mensajes autoexplicativos en la fila 6 (sí, no, o borrar).

Una vez que se han ingresado todos los datos, los valores óptimos de f_i y z_i para la etapa se dan en las columnas S y T. Luego se crea un registro permanente de la solución para el periodo 1 (x_1, f_1, z_1), en la sección de resumen de la solución óptima de la hoja de cálculo, como se muestra en la figura 13.10. Esto requiere copiar D9:D15 y S9:T15 y luego pegarlas mediante la opción *Pegado especial + valores* (quizá tenga que revisar el procedimiento para crear el registro permanente dado junto con *excelKnapsackxls* en la sección 12.3.1).

A continuación, en preparación para la etapa 2, copie f_1 del registro permanente y péguela en la columna A como se muestra en la figura 13.10. Todo lo que se requiere ahora es actualizar los datos de entrada para el periodo 2. El proceso se repite para el periodo 3.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.4C

*1. Considere el ejemplo 13.4-2.
  - **(a)** ¿Es lógico tener $x_4 > 0$?
  - **(b)** Para cada uno de los dos casos siguientes, determine los intervalos factibles para z_1, z_2, z_3, x_1, x_2 y x_3. (Verá que es útil representar cada situación como en la figura 13.10.)

Periodo 1:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1		General (Forward) Dynamic Programming Inventory Model																	
2	I	Number of periods, N=			3	Current period=		1						Optimum solution					
3	N	K1=	3	h1=	1	z1(y1)=	10	20	3					Summary					
4	P	Period	1	2	3									x	f	z	x	f	z
5	U	D(1 to 3)=	2	2	4									Period 1					
6	T	Are z1 values correct?			yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	Optimum		0	23	2			
7		Period 0		z1=	2	3	4	5	6	7	8	Period1		1	34	3			
8		f 0		C1(z1)=	23	33	53	73	93	113	133	f1	z1	2	55	4			
9	S		x2=	0	23	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	23	2	3	76	5			
10	T		x2=	1	1111111	34	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	34	3	4	97	6			
11	A		x2=	2	1111111	1111111	55	1111111	1111111	1111111	1111111	55	4	5	118	7			
12	G		x2=	3	1111111	1111111	1111111	76	1111111	1111111	1111111	76	5	6	139	8			
13	E		x2=	4	1111111	1111111	1111111	1111111	97	1111111	1111111	97	6						
14			x2=	5	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	118	1111111	118	7						
15	C		x2=	6	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	1111111	139	139	8						

Periodo 2:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1		General (Forward) Dynamic Programming Inventory Model																	
2	I	Number of periods, N=			3	Current period=		2						Optimum solution					
3	N	K2=	7	h2=	3	z2(y2)=	10	20	3					Summary					
4	P	Period	1	2	3									x	f	z	x	f	z
5	U	D(1 to 3)=	2	2	4									Period 1			Period 2		
6	T	Are z2 values correct?			yes	yes	yes	yes	yes	yes	yes	Optimum		0	23	2	0	50	2
7		Period 1		z2=	0	1	2	3	4	5	6	Period2		1	34	3	1	63	3
8		f 1		C2(z2)=	0	17	27	37	57	77	97	f2	z2	2	55	4	2	77	3
9	S	23	x3=	0	50	51	50	1111111	1111111	1111111	1111111	50	2	3	76	5	3	100	4
10	T	34	x3=	1	79	75	64	63	1111111	1111111	1111111	63	3	4	97	6	4	123	5
11	A	55	x3=	2	103	99	88	77	86	1111111	1111111	77	3	5	118	7	Period 3		
12	G	76	x3=	3	127	123	112	101	100	109	1111111	100	4	6	139	8			
13	E	97	x3=	4	151	147	136	125	124	123	132	123	5						
14		118																	
15	C	139																	

Periodo 3:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1		General (Forward) Dynamic Programming Inventory Model																	
2	I	Number of periods, N=			3	Current period=		3						Optimum solution					
3	N	K3=	6	h3=	2	z3(y3)=	10	20	3					Summary					
4	P	Period	1	2	3									x	f	z	x	f	z
5	U	D(1 to 3)=	2	2	4									Period 1			Period 2		
6	T	Are z3 values correct?			yes	yes	yes	yes	yes			Optimum		0	23	2	0	50	2
7		Period 2		z3=	0	1	2	3	4			Period3		1	34	3	1	63	3
8		f 2		C3(z3)=	0	16	26	36	56			f3	z3	2	55	4	2	77	3
9	S	50	x4=	0	123	116	103	99	106			99	3	3	76	5	3	100	4
10	T	63												4	97	6	4	123	5
11	A	77												5	118	7	Period 3		
12	G	100												6	139	8	0	99	3

FIGURA 13.10

Solución de PD del ejemplo 13.4-2 (archivo *excelDPInv*.xls) obtenida con Excel

(i) $x_1 = 4$ y todos los datos restantes son los mismos.

(ii) $x_1 = 0, D_1 = 5, D_2 = 3$ y $D3 = 4$.

2. ***(a)** Encuentre la solución óptima del siguiente inventario de 4 periodos.

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación K_i ($)	Costo de retención h_i ($)
1	5	5	1
2	2	7	1
3	3	9	1
4	3	7	1

El costo de producción unitario es de $1 para cada una de las primeras 6 unidades y de $2 para cada una de las unidades adicionales.

(b) Verifique los cálculos usando *excelDPInv.xls.*

3. Suponga que el costo de retención del inventario se basa en el inventario *promedio* durante el periodo. Desarrolle la ecuación recursiva hacia adelante correspondiente.
4. Desarrolle la ecuación recursiva hacia atrás o de retroceso para el modelo, y luego utilícela para resolver el ejemplo 13-4-2.
5. Desarrolle la ecuación recursiva hacia atrás para el modelo, suponiendo que el costo de retención del inventario se basa en el inventario *promedio* en el periodo.

Algoritmo de programación dinámica con costos marginales constantes o decrecientes. La PD general dada antes es aplicable con cualquier función de costo. Esta generalización dicta que el estado x_i y las alternativas z_i en la etapa i asumen valores en incrementos de 1, lo que podría dar lugar a tablas grandes cuando las cantidades demandadas son grandes.

Un caso especial del modelo de PD general promete reducir el volumen de los cálculos. En esta situación especial, tanto el costo de producción unitario como los costos de retención unitarios son funciones *no crecientes* (cóncavas) de la cantidad de producción y el nivel del inventario, respectivamente. Esta situación suele ocurrir cuando la función de costo unitario es constante o si se permite el descuento por cantidad.

En las condiciones dadas, se puede demostrar que[4]

1. Dado que un inventario inicial cero (x_i) es óptimo para satisfacer la demanda en cualquier periodo i o con una nueva producción con inventario entrante, pero nunca con ambos; es decir, $z_i x_i = 0$. (En el caso de inventario inicial positivo, $x_1 > 0$, la cantidad puede amortizarse con las demandas de los periodos sucesivos hasta que se agote.)
2. La cantidad de producción óptima, z_i, durante el periodo i debe ser cero o satisfacer la demanda exacta de uno o más periodos subsiguientes contiguos.

Ejemplo 13.4-3

Un modelo de inventario de 4 periodos opera con los siguientes datos:

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación K_i (\$)
1	76	98
2	26	114
3	90	185
4	67	70

El inventario inicial x_1 es de 15 unidades, el costo de producción unitario es de \$2, y el costo de retención unitario es de \$1 durante todos los periodos. (Para simplificar, los costos de producción y retención unitarios son los mismos durante todos los periodos.)

La solución se determina por el algoritmo hacia adelante ya proporcionado, excepto que los valores de x_{i+1} y z_i ahora suponen sumas "concentradas" en lugar de con incrementos de uno. Debido a que $x_1 = 15$, la demanda del primer periodo se ajusta a $76 - 15 = 61$ unidades.

[4]Vea H. Wagner y T. Whitin, "Dynamic Version of the Economic Lot Size Model", *Management Science,* vol. 5, págs. 89-96, 1958. La comprobación de optimalidad impone la suposición restrictiva de funciones de costo constantes e idénticas durante todos los periodos. Más tarde, la suposición fue flexibilizada por A. Veinott Jr. para permitir funciones de costo cóncavas diferentes.

Periodo 1: $D_1 = 61$

		$C_1(z_1) + h_1x_2$				Solución óptima	
		$z_1 = 61$	87	177	244		
x_2	h_1x_2	$C_1(z_1) = 220$	272	452	586	$f_1(x_2)$	z_1^*
0	0	220				220	61
26	26		298			298	87
116	116			568		568	177
183	183				769	769	244
Pedir en 1 para		1	1, 2	1, 2, 3	1, 2, 3, 4		

Periodo 2. $D_2 = 26$

		$C_2(z_2) + h_2x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$				Solución óptima	
		$z_2 = 0$	26	116	183		
x_3	h_2x_3	$C_2(z_2) = 0$	166	346	480	$f_2(x_3)$	z_2^*
0	0	0 + 298 = 298	166 + 220 = 386			298	0
90	90	90 + 568 = 658		436 + 220 = 656		656	116
157	157	157 + 769 = 926			637 + 220 = 857	857	183
Pedir en 2 para		—	2	2, 3	2, 3, 4		

Periodo 3. $D_3 = 90$

		$C_3(z_3) + h_3x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$			Solución óptima	
		$z_3 = 0$	90	157		
x_4	h_3x_4	$C_3(z_3) = 0$	365	499	$f_3(x_4)$	z_3^*
0	0	0 + 656 = 656	365 + 298 = 663		656	0
67	67	67 + 857 = 924		566 + 298 = 864	864	157
Pedir en 3 para		—	3	3, 4		

Periodo 4. $D_4 = 67$

		$C_4(z_4) + h_4x_5 + f_3(x_5 + D_4 - z_4)$		Solución óptima	
		$z_4 = 0$	67		
x_5	h_4x_5	$C_4(z_4) = 0$	204	$f_4(x_5)$	z_4^*
0	0	0 + 864 = 864	204 + 656 = 860	860	67
Pedir en 4 para		—	4		

La política óptima se determina a partir de las tablas como sigue:

$$(x_5 = 0) \rightarrow \boxed{z_4 = 67} \rightarrow (x_4 = 0) \rightarrow \boxed{z_3 = 0}$$
$$\rightarrow (x_3 = 90) \rightarrow \boxed{z_2 = 116} \rightarrow (x_2 = 0) \rightarrow \boxed{z_1 = 61}$$

Esto da $z_1^* = 61, z_2^* = 116, z_3^* = 0$, y $z_4^* = 67$, a un costo total de $860.

Momento de Excel

La plantilla *excelWagnerWhitin.xls* es semejante a la del modelo general *excelDPlnv.xls*. La única diferencia es que las sumas concentradas se utilizan para el estado x y la alternativa z. Además, por sencillez, la nueva hoja de cálculo no permite el descuento por cantidad. La plantilla está limitada a un máximo de 10 periodos. Recuerde utilizar la opción *Pegado especial + valores* cuando cree el resumen de la solución de resultados (columnas Q:V).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.4D

***1.** Resuelva el ejemplo 13.4-3, suponiendo que el inventario inicial es de 80 unidades. Puede utilizar la plantilla *excelWagnerWhitin.xls* para verificar sus cálculos.

2. Resuelva el siguiente modelo de inventario determinístico de 10 periodos. Suponga un inventario inicial de 50 unidades.

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de producción unitario ($)	Costo de retención unitario ($)	Costo de preparación ($)
1	150	6	1	100
2	100	6	1	100
3	20	4	2	100
4	40	4	1	200
5	70	6	2	200
6	90	8	3	200
7	130	4	1	300
8	180	4	4	300
9	140	2	2	300
10	50	6	1	300

3. Encuentre la política de inventario óptima para el siguiente modelo de 5 periodos. El costo de producción unitario es de $10 para todos los periodos. El costo de retención unitario es de $1 por periodo.

Periodo i	Demanda D_i (unidades)	Costo de preparación K_1 ($)
1	50	80
2	70	70
3	100	60
4	30	80
5	60	60

4. Encuentre la política de inventario óptima para la siguiente situación de inventario de 6 periodos: El costo de producción unitario es de $2 para todos los periodos.

Periodo i	D_i (unidades)	K_i ($)	h_i ($)
1	10	20	1
2	15	17	1
3	7	10	1
4	20	18	3
5	13	5	1
6	25	50	1

Heurística Silver Meal. Esta heurística es válida sólo cuando el costo de producción unitario es constante e idéntico para todos los periodos. Por esta razón sólo balancea los costos de preparación y retención.

La heurística identifica los periodos futuros sucesivos cuya demanda puede ser satisfecha a partir de la producción del periodo actual. El objetivo es minimizar los costos de preparación y retención asociados por periodo.

Suponga que producimos en el periodo i para los periodos $i, i + 1,\ldots,$ y t, $i \leq t$, y definimos $\text{TC}(i, t)$ como los costos de preparación y retención asociados para los mismos periodos. Utilizando la misma anotación de los modelos de PD, tenemos

$$\text{TC}(i,t) = \begin{cases} K_i, & t = i \\ K_i + h_i D_{i+1} + (h_i + h_{i+1})D_{i+2} + \cdots + \left(\sum_{k=i}^{t-1} h_k\right) D_t, & t > i \end{cases}$$

Luego definimos $\text{TCU}(i, t)$ como el costo por periodo asociado; es decir,

$$\text{TCU}(i,t) = \frac{\text{TC}(i,t)}{t - i + 1}$$

Dado un periodo actual i, la heurística determina i^* que minimiza el $\text{TCU}(i, t)$.

La función $\text{TC}(i, t)$ se calcula recursivamente como

$$\text{TC}(i,i) = K_i$$

$$\text{TC}(i,t) = \text{TC}(i,t-1) + \left(\sum_{k=i}^{t-1} h_k\right) D_t, t = i + 1, i + 2, \ldots, n$$

Paso 0. Establezca $i = 1$.

Paso 1. Determine el mínimo local t^* que satisfaga las dos condiciones siguientes:

$$\text{TCU}(i, t^* - 1) \geq \text{TCU}(i, t^*)$$

$$\text{TCU}(i, t^* + 1) \geq \text{TCU}(i, t^*)$$

La heurística requiere que se pida la cantidad $(D_i + D_{i+1} + \ldots + D_{i^*})$ en el periodo i para los periodos $i, i + 1,\ldots,$ y t^*.

Paso 2. Establezca $i = t^* + 1$. Si $i > n$, deténgase; ya se ha cubierto todo el horizonte de planeación. De lo contrario, vaya al paso 1.

Ejemplo 13.4-4

Encuentre la política de inventario óptima para la siguiente situación de inventario de 6 periodos:

Periodo t	D_i (unidades)	K_i (\$)	h_i (\$)
1	10	20	1
2	15	17	1
3	7	10	1
4	20	18	3
5	13	5	1
6	25	50	1

El costo de producción unitario es de \$2 para todos los periodos.

Iteración 1 ($i = 1$), $K_1 = \$20$). La función TC $(1, t)$ se calcula recursivamente en t. Por ejemplo, dada TC (1,1) = \$20, TC(1,2) = TC(1,1) + $h_1 D_2$ = 20 + (1 × 15) = \$35.

Periodo t	D_i	TC$(1, t)$	TCU$(1, t)$
1	10	\$20	$\frac{20}{1}$ = \$20.00
2	15	20 + 1 × 15 = \$35	$\frac{35}{2}$ = \$17.50
3	7	35 + (1 + 1) × 7 = \$94	$\frac{49}{3}$ = **\$16.33**
4	20	49 + (1 + 1 + 1) × 20 = \$109	$\frac{109}{4}$ = \$27.25

El mínimo local ocurre en $t^* = 3$, lo que requiere pedir 10 + 15 + 7 = 32 unidades en el periodo 1 para los periodos 1 a 3. Establezca $i = t^* + 1 = 3 + 1 = 4$.

Iteración 2 ($i = 4, K_4 = \$18$).

Periodo t	D_i	TC$(4, t)$	TCU$(4, t)$
4	20	\$18	$\frac{18}{1}$ = **\$18.00**
5	13	18 + 3 × 13 = \$57	$\frac{57}{2}$ = \$28.50

Los cálculos muestran que $t^* = 4$, el cual requiere pedir 20 unidades en el periodo 4 para el periodo 4. Establezca $i = 4 + 1 = 5$.

Iteración 3 ($i = 5, K_5 = \$5$)

Periodo t	D_r	TC$(5, t)$	TCU$(5, t)$
5	13	\$5	$\frac{5}{1}$ = **\$5**
6	25	5 + 1 × 25 = \$30	$\frac{30}{2}$ = \$15

El mínimo ocurre en $t^* = 5$, que requiere pedir 13 unidades en el periodo 5 para el periodo 5. Luego establecemos $i = 5 + 1 = 6$. Sin embargo, como $i = 6$ es el último periodo del horizonte de planificación, debemos pedir 25 unidades en el periodo 6 para el periodo 6.

Comentarios. La siguiente tabla compara la solución heurística y la solución de PD exacta. Hemos eliminado el costo de producción unitario en el modelo de programación dinámica porque no está incluido en los cálculos heurísticos.

	Heurística		Programación dinámica	
Periodo	*Unidades producidas*	*Costo ($)*	*Unidades producidas*	*Costo ($)*
1	32	49	10	20
2	0	0	22	24
3	0	0	0	0
4	20	18	20	18
5	13	5	38	30
6	25	50	0	0
Total	90	122	90	92

Los costos del programa de producción heurístico son alrededor de 32% más que los de la solución de PD ($122 vs. $92). El desempeño "inadecuado" de la heurística puede atribuirse a la naturaleza de los datos, ya que el problema puede quedar en los valores de costo de preparación extremos para los periodos 5 y 6. No obstante, el ejemplo muestra que la heurística no tiene la capacidad de "mirar hacia delante" en busca de mejores oportunidades de programación. Por ejemplo, si pedimos en el periodo 5 para los periodos 5 y 6 (en lugar de pedir para cada periodo por separado) podemos ahorrar $25, lo que reducirá el costo heurístico total a $97.

Momento de Excel

La plantilla *excelSilverMeal.xls* está diseñada para realizar todos los cálculos iterativos y proporcionar la solución final. El procedimiento se inicia con el ingreso de los datos necesarios para realizar los cálculos, incluyendo N, K, h y D para todos los periodos (estos ingresos aparecen resaltados en color turquesa en la hoja de cálculo). El usuario debe iniciar entonces cada iteración manualmente hasta que se hayan cubierto todos los periodos.

La figura 13.11 muestra la aplicación de la heurística Excel al ejemplo 13.4-4. La primera iteración se inicia ingresando el valor 1 en la celda J11, señalando que la iteración 1 se inicia en el periodo 1. La hoja de cálculo generará entonces tantas filas cuantos periodos N (=6 en este ejemplo). El número del periodo aparecerá en orden ascendente en las K11:K16. Ahora examinamos el TCU en la columna P (resaltado en color turquesa) y localizamos el periodo que corresponde al mínimo local en $t = 3$ con TCU = $16.33. Esto significa que la siguiente iteración se iniciará en el periodo 4. Ahora, deje una fila en blanco e ingrese el valor 4 en J18. Esta acción, la cual produce los cálculos en la iteración 2, muestra que su mínimo local aparecerá en el periodo 4 (TCU = $18.00) y señala el inicio de la iteración en el periodo 5. De nueva cuenta, ingresando 5 en J22, el mínimo local para la iteración 3 ocurre en el nodo 5. Luego, ingresando el valor de 6 en J25 se produce la iteración de terminación del problema. La hoja de cálculo actualizará automáticamente la política óptima asociada y su costo total, como se muestra en la figura 13.11.

Modelo de inventario heurístico Silver Medal							
Datos de entrada:							
Número de periodos, N =	6	<< Máximo 14 periodos					
Periodo t =	1	2	3	4	5	6	
Costo de preparación, K =	20	17	10	18	5	50	
Costo de retención, ht =	1	1	1	1	1	1	
Demanda, Dt =	10	15	7	20	13	25	
Solución completa	Cálculos del modelo (*Borrar la columna J manualmente*)						Solución óptima (Costo total = $122.00)
Iniciar iteración en el periodo	Periodo	D_t	$\sum D_t$	$\sum h_t$	TC	TCU	
1	1	10	10	0.00	20.00	20.00	
	2	15	25	1.00	35.00	17.50	
	3	7	32	2.00	49.00	16.33	
	4	20	52	3.00	109.00	27.25	
	5	13	65	6.00	187.00	37.40	Pedir 32 en el periodo 1 para los periodos 1 a 3, costo = $49.00
	6	25	90	7.00	362.00	60.33	
4	4	20	20	0.00	18.00	18.00	
	5	13	33	3.00	57.00	28.50	
	6	25	58	4.00	157.00	52.33	Pedir 20 en el periodo 4 para los periodos 4 a 4, costo = $18.00
5	5	13	13	0.00	5.00	5.00	
	6	25	38	1.00	30.00	15.00	Pedir 13 en el periodo 5 para los periodos 5 a 5, costo = $49.00
6	6	25	25	0.00	50.00	50.00	Pedir 25 en el periodo 6 para los periodos 6 a 6, costo = $50.00

FIGURA 13.11

Solución del ejemplo 13.4-4 obtenida con Excel por medio de heurística Silver-Meal (archivo *ExcelSiver-Medal.xls*)

CONJUNTO DE PROBLEMAS 13.4E

***1.** La demanda de cañas de pescar es mínima durante el mes de diciembre y máxima durante el mes de abril. Fishing Hole, Inc. estima que la demanda en diciembre es de 50 cañas. Se incrementa en 10 cañas cada mes hasta que llega a 90 en abril. De ahí en adelante, la demanda se reduce a razón de 5 cañas por mes. El costo de preparación de un lote de producción es de $250, excepto durante los meses de demanda máxima de febrero a abril, donde se incrementa a $300. El costo de producción por caña se mantiene aproximadamente constante en $15 a lo largo del año, y el costo de retención por mes es de $1. Fishing Hole está desarrollando el plan de producción del año siguiente (enero a diciembre). ¿Cómo debe programar sus instalaciones de producción?

2. Una pequeña casa editora reimprime una novela para satisfacer la demanda durante los siguientes 12 meses. Las estimaciones de la demanda en meses sucesivos son 100, 120, 50, 70, 90, 105, 115, 95, 80, 85, 100 y 110. El costo de preparación para reimprimir el libro es de $200.00 y el costo de retención por libro por mes es de $1.20. Determine el programa de reimpresión óptimo.

BIBLIOGRAFÍA

Bishop, J., “Experience with a Successful System for Forecasting and Inventory Control”, *Operations Research*, vol. 22, núm. 6, págs. 1224-1231, 1974.

Edwards, J., H. Wagner, y W. Wood, “Blue Bell Trims Its Inventory”, *Interfaces*, vol. 15, núm. 1, págs. 34-52, 1985.

Lewis, T., "Personal Operations Research: Practicing OR on Ourselves", *Interfaces*, vol. 26, núm. 5, págs. 34-41, 1996.

Nahmias, S., *Production and Operations Analysis,* 5a. ed., Irwin, Homewood, IL, 2005.

Silver, E., D. Pyke, y R. Peterson, *Decision Systems for InventoryManagement and Production Control*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 1998.

Tersine, R., *Principles of Inventory and Materials Management,* 3a. ed., North Holland, Nueva York, 1988.

Waters, C., *Inventory Control and Management,* Wiley, Nueva York, 1992.

CAPÍTULO 14

Repaso de probabilidad básica

14.1 LEYES DE PROBABILIDAD

La probabilidad tiene que ver con los resultados aleatorios de un **experimento**. La conjunción de todos los resultados es el **espacio de muestreo**, y un subconjunto de éste es un **evento**. A modo de ilustración, el experimento de lanzar un dado (de 6 caras) produce el espacio de muestreo {1,2,3,4,5,6}. El subconjunto {l,3,5} define el evento de obtener valores impares.

Un experimento también puede ocuparse de un espacio de muestreo continuo. Por ejemplo, el tiempo entre las fallas de un componente electrónico puede asumir cualquier valor no negativo.

Si un evento E ocurre m veces en un experimento de n ensayos, entonces la probabilidad de realizar el evento E se define como

$$P\{E\} = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}$$

La definición dice que cuando el experimento se repite un número infinito de veces ($n \to \infty$), la probabilidad de realizar un evento es m/n. Por ejemplo, cuantas más veces se lanza una moneda equilibrada, más se acercará la estimación de $P\{\text{cara}\}$ (o $P\{\text{cruz}\}$) al valor teórico de 0.5.

Por definición,

$$0 \leq P\{E\} \leq 1$$

Un evento E es imposible si $P\{E\} = 0$, y seguro si $P\{E\} = 1$. Por ejemplo, en el experimento del dado de 6 caras, obtener un siete es imposible, pero obtener un número en el rango de 1 a 6 es seguro.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.1A

*1. En una encuesta dirigida en las preparatorias del estado de Arkansas para estudiar la correlación entre las calificaciones de matemáticas de estudiantes del último año y la ins-

cripción en carreras de ingeniería, 400 de 1000 estudiantes encuestados han estudiado matemáticas. La inscripción en carreras de ingeniería muestra que, de los 1000 estudiantes de último año, 150 han llevado matemáticas y 29 no. Determine las probabilidades de los siguientes eventos:

(a) Un estudiante que llevó matemáticas se inscribe (o no) en una carrera de ingeniería.

(b) Un estudiante que ni llevó matemáticas ni se inscribe en una carrera de ingeniería.

(c) Un estudiante que no está en una carrera de ingeniería.

*__2.__ Considere una reunión aleatoria de n personas. Determine el número n mínimo de modo que sea más probable que dos personas hayan nacido el mismo día. (*Sugerencia:* Asuma que no hay años bisiestos y que todos los días del año tienen la misma probabilidad de ser el cumpleaños de una persona.)

*__3.__ Solucione el problema 2 suponiendo que dos o más personas comparten su cumpleaños.

14.1.1 Ley de la adición de probabilidad

La **unión** de dos eventos E y F es $E + F$ o $E \cup F$, y su **intersección** es EF o $E \cap F$. Los eventos E y F son **mutuamente excluyentes** si la ocurrencia de uno excluye la ocurrencia del otro, $P\{EF\} = 0$. Basada en estas definiciones, la ley de adición de probabilidad puede formularse como

$$P\{E + F\} = \begin{cases} P\{E\} + P\{F\}, & E \text{ y } F \text{ son mutuamente excluyentes} \\ P\{E\} + P\{F\} - P\{EF\}, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Ejemplo 14.1-1

Considere el experimento de lanzar un dado. El espacio de muestreo del experimento es {1,2,3,4,5,6}. Para un dado equilibrado, tenemos

$$P\{1\} = P\{2\} = P\{3\} = P\{4\} = P\{5\} = P\{6\} = \tfrac{1}{6}$$

Defina

$$E = \{1, 2, 3, \text{ o } 4\}$$

$$F = \{3, 4, \text{ o } 5\}$$

El evento $EF = \{3 \text{ o } 4\}$ porque los resultados 3 y 4 son comunes entre E y F. Por lo tanto

$$P\{E\} = P\{1\} + P\{2\} + P\{3\} + P\{4\} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{3}$$

$$P\{F\} = P\{3\} + P\{4\} + P\{5\} = \tfrac{1}{2}$$

$$P\{EF\} = P\{3\} + P\{4\} = \tfrac{1}{3}$$

$$P\{E + F\} = P\{E\} + P\{F\} - P\{EF\} = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{6}$$

Intuitivamente, el resultado tiene sentido porque $P\{E + F\} = P\{1, 2, 3, 4, 5\} = \tfrac{5}{6}$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.1B

1. Se lanza dos veces un dado de 6 caras. Si E y F representan los resultados de los dos lanzamientos, calcule las siguientes probabilidades:

(a) La suma de E y F es 11.

(b) La suma de E y F es par.

(c) La suma de E y F es impar y mayor que 3.

(d) E es par y menor que 6, y F es impar y mayor que 1.

(e) E es mayor que 2, y F es menor que 4.

(f) E es 4, y la suma de E y F es impar.

2. Se lanzan dos dados de forma independiente, y se registran los dos números que resulten. Determine lo siguiente:

(a) La probabilidad de que los dos números sean pares.

(b) La probabilidad de que la suma de los dos números sea 10.

(c) La probabilidad de que los dos números difieran en por lo menos 3.

3. Puede lanzar una moneda siete veces. Ganará $100 si aparecen tres cruces antes de que aparezca una cara. ¿Cuáles son las probabilidades de ganar?

***4.** Ann, Jim, John y Nancy se han programado para competir en un torneo de frontenis. Es dos veces más probable que Ann derrote a Jim, y Jim está al mismo nivel que John. El pasado registro ganador de Nancy contra John es uno de tres. Determine lo siguiente:

(a) La probabilidad de que Jim gane el torneo.

(b) La probabilidad de que una mujer gane el torneo.

(c) La probabilidad de que ninguna mujer gane.

14.1.2 Ley de probabilidad condicional

Dados los dos eventos E y F con $P\{F\} > 0$, la probabilidad condicional de E dado F se calcula como

$$P\{E|F\} = \frac{P\{EF\}}{P\{F\}}, \quad P\{F\} > 0$$

Si E es un subconjunto de F, entonces $P\{EF\} = P\{E\}$. Los dos eventos son independientes si, y sólo si,

$$P\{E|F\} = P\{E\}$$

En este caso, la ley de probabilidad condicional se reduce a

$$P\{EF\} = P\{E\}\,P\{F\}$$

Ejemplo 14.1-2

Usted participa en un juego en el que otra persona lanza un dado. No puede ver el dado, pero le informan sobre los resultados. Su tarea es predecir el resultado de cada lanzamiento. Determine la probabilidad de que el resultado sea 6, dado que le dicen que el resultado fue un número par.

Sea $E = \{6\}$, y defina $F = \{2,4 \text{ o } 6\}$ por lo tanto,

$$P\{E|F\} = \frac{P\{EF\}}{P\{F\}} = \frac{P\{E\}}{P\{F\}} = \left(\frac{1/6}{1/2}\right) = \tfrac{1}{3}$$

Observe que $P\{EF\} = P\{E\}$ porque E es un subconjunto de F.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.1C

1. En el ejemplo 14.1-2, suponga que le dicen que el resultado es menor que 6.

(a) Determine la probabilidad de obtener un número par.

(b) Determine la probabilidad de obtener un número non mayor que uno.

2. Las acciones de WalMark Stores, Inc. se cotizan en la Bolsa de Valores de Nueva York bajo el símbolo WMS. Históricamente, el precio de WMS sube con el índice Dow 60% de las veces, y baja 25% de las veces. Hay también 5% de probabilidades de que WMS suba cuando el Dow baja, y 10% de que baje cuando el Dow sube.

(a) Determine la probabilidad de que WMS subirá independientemente del Dow.

(b) Encuentre la probabilidad de que WMS suba dado que el Dow suba.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que WMS baje dado que el Dow baje?

***3.** Los graduados de preparatoria con una calificación ACT de al menos 26 pueden buscar ser admitidos en dos universidades, A y B. La probabilidad de ser aceptados en A es de .4, y de .25 en B. La probabilidad de ser aceptado en ambas universidades es de sólo 15%.

(a) Determine la probabilidad de que el estudiante sea aceptado en B, dado que también fue aceptado en A.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea aceptado en A, dado que el estudiante fue aceptado en *B*?

4. Demuestre que si la probabilidad $P\{\text{A}|\text{B}\} = P\{A\}$, entonces A y B deben ser independientes.

5. *Teorema de* Bayes.[1] Dados los dos eventos A y B, demuestre que

$$P\{A|B\} = \frac{P\{B|A\}P\{A\}}{P\{B\}},\ P\{B\} > 0$$

6. Un minorista recibe 75% de sus baterías de la fábrica A y 25% de la fábrica B. Se sabe que el porcentaje de baterías defectuosas producidas por A y B es de 1 y 2%, respectivamente. Un cliente acaba de comprarle una batería al minorista.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la batería resulte defectuosa?

(b) Si la batería resulta defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica A? (*Sugerencia:* Aplique el teorema de Bayes en el problema 5.)

***7.** Las estadísticas muestran que 70% de los hombres sufren de alguna forma de cáncer de próstata. El examen del antígeno prostático específico (PSA, por sus siglas en inglés) resulta positivo 90% de las veces en los hombres afectados, y 10% en hombres sanos. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre que haya resultado positivo no tenga cáncer de próstata?

14.2 VARIABLES ALEATORIAS Y DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Los resultados de un experimento pueden ser naturalmente numéricos (por ejemplo el lanzamiento de un dado), o estar representados por un código (como en el caso del lanzamiento de una moneda con el resultado cara/cruz codificado como 0/1). La representación numérica de los resultados define lo que se conoce como **variable aleatoria**.

Una variable aleatoria, x, puede ser **discreta** (como en el lanzamiento de un dado) o **continua** (como en el tiempo para que falle un equipo). Cada variable x aleato-

[1] La sección 15.2.2 proporciona más detalles sobre el teorema de Bayes.

ria continua o discreta puede ser cuantificada por una **función de distribución de probabilidad (fdp)**, $f(x)$ o $p(x)$, que satisface las siguientes condiciones:

	Variable aleatoria, x	
Característica	*Discreta*	*Continua*
Intervalo de aplicabilidad	$x = a, a + 1, \ldots, b$	$a \leq x \leq b$
Condiciones para la fdp	$p(x) \geq 0, \sum_{x=a}^{b} p(x) = 1$	$f(x) \geq 0, \int_a^b f(x)dx = 1$

Una importante medida de probabilidad es la **función de distribución acumulada (FDA)**, definida como

$$p\{x \leq X\} = \begin{cases} P(X) = \sum_{x=a}^{X} p(x), & x \text{ discreta} \\ F(X) = \int_a^X f(x)dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

Ejemplo 14.2-1

Considere el experimento de lanzar un dado representado por la variable aleatoria $x = \{1,2,3,4,5,6\}$. La fdp y la FDA asociadas son

$$p(x) = \frac{1}{6}, \; x = 1, 2, \ldots, 6$$
$$P(X) = \frac{X}{6}, \; X = 1, 2, \ldots, 6$$

La figura 14.1 grafica las dos funciones. La fdp $p(x)$ es una **función discreta uniforme** porque todos los valores de las variables aleatorias ocurren con iguales probabilidades.

La contraparte continua de la $p(x)$ uniforme se ilustra mediante el siguiente experimento. Una aguja de longitud l gira en el centro de un círculo de diámetro l. Después de marcar un punto de referencia arbitrario en la circunferencia, se hace girar la aguja en el sentido de las ma-

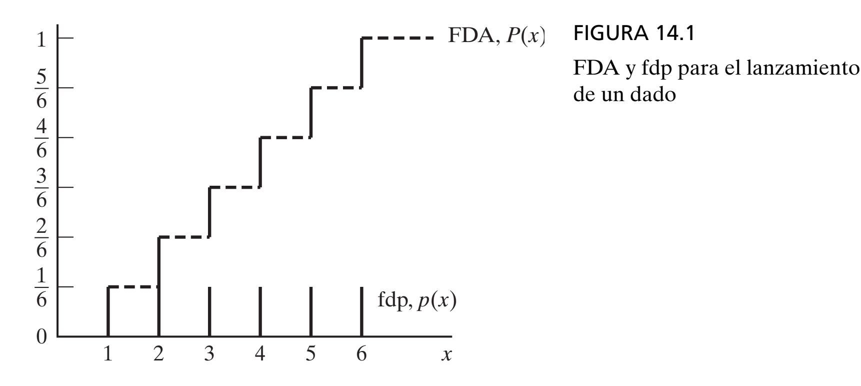


FIGURA 14.1
FDA y fdp para el lanzamiento de un dado

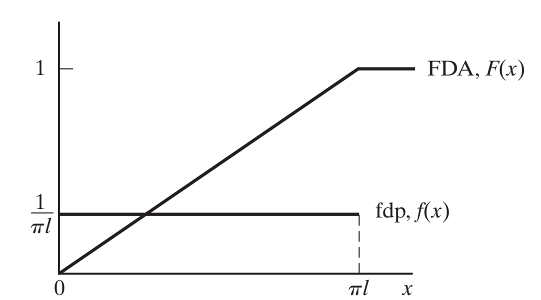


FIGURA 14.2
FDA y fdp para una aguja que gira

necillas del reloj y se mide la distancia de la circunferencia, x, desde el punto marcado hasta el punto donde se detuvo la aguja. Como cualquier punto de detención sobre la circunferencia tiene la misma probabilidad de ocurrir, la distribución de x es uniforme en el intervalo $0 \leq x \leq$ *pl* con la siguiente fdp:

$$f(x) = \frac{1}{\pi l}, \ 0 \leq x \leq \pi l$$

La FDA asociada, *F(X)* se calcula como

$$F(X) = P\{x \leq X\} = \int_0^X f(x)dx = \int_0^X \frac{1}{\pi l}\,dx = \frac{X}{\pi l}, 0 \leq X \leq \pi l$$

La figura 14.2 muestra las gráficas de las dos funciones.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.2A

1. El número de unidades, x, requeridas de un artículo es discreto de 1 a 5. La probabilidad, $p(x)$, es directamente proporcional al número de unidades requeridas. La constante de proporcionalidad es K.

(a) Determine la fdp y la FDA de x, y trace la gráfica de las funciones resultantes.

(b) Encuentre la probabilidad de que x sea un valor par.

2. Considere la siguiente función:

$$f(x) = \frac{k}{x^2}, \ 10 \leq x \leq 20$$

***(a)** Determine el valor de la constante k que hará que $f(x)$ sea una fdp.

(b) Determine la FDA y encuentre la probabilidad de que x sea (i) mayor que 12 y que (ii) tenga un valor entre 13 y 15.

***3.** La demanda diaria de gasolina sin plomo está uniformemente distribuida entre 750 y 1250 galones. El tanque de 1100 galones se rellena diariamente a medianoche. ¿Cuál es la probabilidad de que el tanque se vacíe antes de volverlo a rellenar?

14.3 EXPECTATIVA DE UNA VARIABLE ALEATORIA

Si $h(x)$ es una función real de una variable aleatoria x, el **valor esperado** de $h(x)$ se calcula como

$$E\{h(x)\} = \begin{cases} \sum_{x=a}^{b} h(x)p(x), & x \text{ discreta} \\ \int_a^b h(x)f(x)dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

Ejemplo 14.3-1

Durante la primera semana de cada mes pagué todas mis facturas y contesté algunas cartas. Suelo comprar 20 estampillas de primera clase cada mes para este propósito. En realidad, la cantidad de estampillas que uso varía al azar entre 10 y 24 con iguales probabilidades. Determine el promedio de estampillas que sobran (es decir, el excedente promedio) por mes.

La fdp de la cantidad de estampillas utilizadas es

$$p(x) = \tfrac{1}{15},\ x = 10, 11, \ldots, 24.$$

El número de estampillas sobrantes es

$$h(x) = \begin{cases} 20-x, & x = 10, 11, \ldots, 19 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$E\{h(x)\} = \tfrac{1}{15}[(20-10) + (20-11) + (20-12) + \ldots + (20-19)] + \tfrac{5}{15}(0) = 3\tfrac{2}{3}$$

El producto $\frac{5}{15}(0)$ representa el resultado de quedarse sin estampillas lo que corresponde a la probabilidad de utilizar al menos 20 estampillas; es decir,

$$P\{x \geq 20\} = p(20) + p(21) + p(22) + p(23) + p(24) = 5(\tfrac{1}{15}) = \tfrac{5}{15}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.3A

1. En el ejemplo 14.3-1, calcule el faltante promedio de estampillas por mes. (*Sugerencia:* Puede haber un faltante si necesita más de 20 estampillas.)

2. Los resultados del ejemplo 14.3-1 y del problema 1 muestran promedios *positivos tanto* del exceso *como* de la falta de estampillas. ¿Son inconsistentes estos resultados? Explique.

***3.** El propietario de un puesto de periódicos recibe 50 ejemplares del periódico *Al Ahram* cada mañana. La cantidad de ejemplares vendidos, x, varía al azar de acuerdo con la siguiente distribución de probabilidad:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{45}, & x = 35, 36, \ldots, 49 \\ \frac{1}{30}, & x = 50, 51, \ldots, 59 \\ \frac{1}{33}, & x = 60, 61, \ldots, 70 \end{cases}$$

(a) Determine la probabilidad de que el propietario venda todos los ejemplares.

(b) Determine el número esperado de ejemplares no vendidos por día.

(c) Un ejemplar cuesta 50 centavos y se vende a $1.00. Determine el ingreso neto esperado por día.

14.3.1 Media y varianza (desviación estándar) de una variable aleatoria

El **valor medio** $E\{x\}$ mide la tendencia central (o suma ponderada) de la variable aleatoria x. La **varianza** var$\{x\}$ mide la dispersión o desviación de x alrededor de su valor medio. Su raíz cuadrada se conoce como **desviación estándar** de x, Desv.Est.$\{x\}$. Una desviación estándar grande implica una alta incertidumbre.

Las fórmulas para la media y la varianza de derivan a partir de la definición general de $E\{h(x)\}$ en la sección 14.3 al sustituir $h(x) = x$ para obtener $E\{x\}$ y sustituir $h(x) = (x - \mathrm{E}\{x\})^2$ para obtener var$\{x\}$; es decir,

$$E(x) = \begin{cases} \sum_{x=a}^{b} xp(x), & x \text{ discreta} \\ \int_a^b xf(x)dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

$$\text{var}\{x\} = \begin{cases} \sum_{x=a}^{b} (x - E\{x\})^2 p(x), & x \text{ discreta} \\ \int_a^b (x - E\{x\})^2 f(x)dx, & x \text{ continua} \end{cases}$$

$$\text{Desv.Est.}\{x\} = \sqrt{\text{var}\{x\}}$$

Ejemplo 14.3-2

Calculamos la media y la varianza para cada uno de los experimentos del ejemplo 14-2-1.

Caso 1 (Lanzamiento de un dado) La fdp es $p(x) = 1/6, x = 1, 2,\ldots, 6$. Por lo tanto,

$$E\{x\} = 1\left(\tfrac{1}{6}\right) + 2\left(\tfrac{1}{6}\right) + 3\left(\tfrac{1}{6}\right) + 4\left(\tfrac{1}{6}\right) + 5\left(\tfrac{1}{6}\right) + 6\left(\tfrac{1}{6}\right) = 3.5$$

$$\text{var}\{x\} = \left(\tfrac{1}{6}\right)\left\{(1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + (3 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)^2 + (5 - 3.5)^2 + (6 - 3.5)^2\right\} = 2.917$$

$$\text{Desv.Est.}(x) = \sqrt{2.917} = 1.708$$

Caso 2 (Rotación de la aguja) Suponga que la longitud de la aguja es de una pulgada. Entonces,

$$f(x) = \frac{1}{3.14}, \quad 0 \leq x \leq 3.14$$

La media y la varianza son

$$E(x) = \int_0^{3.14} x\left(\tfrac{1}{3.14}\right)dx = 1.57 \text{ pulg.}$$

$$\text{var}(x) = \int_0^{3.14} (x - 1.57)^2\left(\tfrac{1}{3.14}\right)dx = .822 \text{ pulg.}^2$$

$$\text{Desv.Est.}(x) = \sqrt{.822} = .906 \text{ pulg.}$$

Momento de Excel

La plantilla *excelStatTables.xls* calcula la media, la desviación estándar, las probabilidades, y los percentiles para 16 fdp comunes, incluidas las distribuciones uniformes continuas. El uso de la hoja de cálculo es autoexplicativo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.3B

***1.** Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria definida en el problema 1, conjunto 14.2a.

2. Calcule la media y la varianza de la variable aleatoria del problema 2, conjunto 14.2a.

3. Demuestre que la media y la varianza de una variable aleatoria uniforme x, $a \leq x \leq$ b, son

$$E\{x\} = \frac{b + a}{2}$$

$$\text{var}\{x\} = \frac{(b - a)^2}{12}$$

4. Si $f(x)$, $a \leq x \leq b$ es una fdp, demuestre que

$$\text{var}\{x\} = E\{x^2\} - (E\{x\})^2$$

5. Si $f(x)$, $a \leq x \leq b$ es una fdp, y $y = cx + d$, donde c y d son constantes, demuestre que

$$E\{y\} = cE\{x\} + d$$

$$\text{var}\{y\} = c^2 \text{ var}\{x\}$$

14.3.2 Variables aleatorias conjuntas

Considere las dos variables aleatorias continuas x_1 y x_2, donde $a_1 \leq x_1 \leq b_1$ y $a_1 \leq x_2 \leq b_2$. Defina $f(x_1, x_2)$ como la **fdp conjunta** de x_1 y x_2 y $f_1(x_1)$ y $f_2(x_2)$ como sus respectivas **fdp marginales**. Entonces

$$f(x_1, x_2) \geq 0, a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 f(x_1, x_2) = 1$$

$$f_1(x_1) = \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2$$

$$f_2(x_2) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\, dx_1$$

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2), \text{si } x_1 \text{ y } x_2 \text{ son independientes}$$

Las mismas fórmulas aplican a las fdp discretas, al reemplazar la integración con la suma.

En el caso especial $y = c_1x_1 + c_2x_2$, donde las variables aleatorias x_1 y x_2 están conjuntamente distribuidas de acuerdo con la fdp $f(x_1, x_2)$, podemos demostrar que

$$E\{c_1x_1 + c_2x_2\} = c_1E\{x_1\} + c_2E\{x_2\}$$

$$\text{var}\{c_1x_1 + c_2x_2\} = c_1^2\text{var}\{x_1\} + c_2^2\text{var}\{x_2\} + 2c_1c_2\text{cov}\{x_1, x_2\}$$

donde

$$\begin{aligned}\text{cov}\{x_1, x_2\} &= E\{(x_1 - E\{x_1\})(x_2 - E\{x_2\})\\ &= E(x_1x_2 - x_1E\{x_2\} - x_2E\{x_1\} + E\{x_1\}E\{x_2\})\\ &= E\{x_1x_2\} - E\{x_1\}E\{x_2\}\end{aligned}$$

Si x_1 y x_2 son *independiente,* entonces $E\{x_1x_2\} = E\{x_1\}E\{x_2\}$ y cov $\{x_1, x_2) = 0$. Lo contrario no es cierto, en el sentido de que dos variables dependientes puedan tener covarianza cero.

Ejemplo 14.3-3

Un lote incluye cuatro artículos defectuosos (D) y seis buenos (G). Se selecciona un artículo al azar y se examina. Luego se selecciona un segundo artículo de entre los nueve artículos restantes y se examina. Sean x_1 y x_2 que representen los resultados de la primera y segunda selecciones.

(a) Determine las fdp conjuntas y marginales de x_1 y x_2.

(b) Suponga que un artículo bueno reditúa un ingreso neto de \$5 y uno defectuoso representa una pérdida de \$6. Determine la media y la varianza del ingreso después examinar los dos artículos.

Sea $p(x_1, x_2)$ la fdp conjunta de x_1 y x_2, y definimos a $p_1(x_1)$ y $p_2(x_2)$ como las fdp marginales. Primero, determinamos $p_1(x_1)$ como

$$p_1(G) = \tfrac{6}{10} = .6,\ p_1(D) = \tfrac{4}{10} = .4$$

Luego, sabemos que el segundo resultado x_2 depende del primer resultado x_1. Por consiguiente, para determinar $p_2(x_2)$, primero determinamos la fdp conjunta $p(x_1, x_2)$ (aplicando la fórmula $P\{AB\} = P\{A|B\}P\{B\}$ en la sección 14.1.2), a partir de la cual podemos determinar la distribución marginal $p_2(x_2)$. Por lo tanto,

$$P\{x_2 = G|x_1 = G\} = \tfrac{5}{9}$$
$$P\{x_2 = G|x_1 = B\} = \tfrac{6}{9}$$
$$P\{x_2 = B|x_1 = G\} = \tfrac{4}{9}$$
$$P\{x_2 = B|x_1 = B\} = \tfrac{3}{9}$$

Luego,

$$p\{x_2 = G, x_1 = G\} = \tfrac{5}{9} \times \tfrac{6}{10} = \tfrac{5}{15}$$
$$p\{x_2 = G, x_1 = B\} = \tfrac{6}{9} \times \tfrac{4}{10} = \tfrac{4}{15}$$
$$p\{x_2 = B, x_1 = G\} = \tfrac{4}{9} \times \tfrac{6}{10} = \tfrac{4}{15}$$
$$p\{x_2 = B, x_1 = B\} = \tfrac{3}{9} \times \tfrac{4}{10} = \tfrac{2}{15}$$

El ingreso esperado se determina con la distribución conjunta reconociendo que G produce \$5 y B produce $-\$6$. Por lo tanto,

$$\text{Ingreso esperado} = (5 + 5)\tfrac{5}{15} + (5 - 6)\tfrac{4}{15} + (-6 + 5)\tfrac{4}{15} + (-6 - 6)\tfrac{2}{15} = \$1.20$$

El mismo resultado puede determinarse reconociendo que el ingreso esperado de ambas selecciones es la suma del ingreso esperado de cada selección individual (aun cuando las dos variables *no* son independientes). Estos cálculos requieren determinar las distribuciones marginales $p_1(x_1)$ y $p_2(x_2)$.

Una forma conveniente de determinar las distribuciones marginales es presentar la distribución conjunta, $p(x_1, x_2)$, como una tabla y luego agregar las columnas y filas correspondientes para determinar $p(x_1)$y $p(x_2)$, respectivamente. Por lo tanto,

	$x_2 = G$	$x_2 = B$	$p_1(x_1)$
$x_1 = G$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{9}{15} = .6$
$x_1 = B$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15} = .4$
$p_2(x_2)$	$\frac{9}{15} = .6$	$\frac{6}{15} = .4$	

Ahora, las distribuciones marginales determinan el ingreso esperado como

$$\begin{aligned}\text{Ingreso esperado} &= \text{Ingreso esperado de la selección 1} + \text{Ingreso esperado de la selección 2}\\ &= (5 \times .6 - 6 \times .4) + (5 \times .6 - 6 \times .4) = \$1.20\end{aligned}$$

Para calcular la varianza del ingreso total observamos que

$$\text{var}\{\text{ingreso}\} = \text{var}\{\text{ingreso1}\} + \text{var}\{\text{ingreso2}\} + 2\text{cov}\{\text{ingreso1}, \text{ingreso2}\}$$

Ya que $p_1(x_1) = p_2(x_2)$, var{ingreso1} = var{ingreso2}. Para calcular la varianza, utilizamos la siguiente fórmula (vea el problema 4, conjunto 14.3b)

$$\text{var}\{x\} = E\{x^2\} - (E\{x\})^2$$

Por lo tanto,

$$\text{var}\{\text{ingreso1}\} = [5^2 \times .6 + (-6)^2 \times .4] - .6^2 = 29.04$$

Luego calculamos la covarianza aplicando la fórmula

$$\text{cov}\{x_1, x_2) = E\{x_1x_2\} - E\{x_1\}E\{x_2\}$$

El término $E\{x_1x_2\}$ se calcula a partir de la fdp conjunta de x_1 y x_2 como

$$\begin{aligned}\text{Convarianza} = [&(5 \times 5)(\tfrac{5}{15}) + (5 \times -6)(\tfrac{4}{15}) + (-6 \times 5)(\tfrac{4}{15})\\ &+ (-6 \times -6)(\tfrac{2}{15})] - .6 \times .6 = -3.23\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Varianza} = 29.04 + 29.04 + 2(-3.23) = 51.62$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.3C

1. La fdp conjunta de x_1 y x_2 es

$$p(x_1, x_2) = \begin{array}{c|ccc|} & x_2 = 3 & x_2 = 5 & x_2 = 7 \\ \hline x_1 = 1 & .2 & 0 & .2 \\ x_1 = 2 & 0 & .2 & 0 \\ x_1 = 3 & .2 & 0 & .2 \\ \hline \end{array}$$

*(a) Determine las fdp marginales $p_1(x_1)$ y $p_2(x_2)$
*(b) ¿x_1 y x_2 son independientes?
(c) Calcule $E\{x_1 + x_2\}$.
(d) Calcule $\text{cov}\{x_1, x_2\}$.
(e) Calcule $\text{var}\{5x_1 - 6x_2\}$.

14.4 CUATRO DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD COMUNES

En las secciones 14.2 y 14.3 analizamos la distribución uniforme (discreta y continua). Esta sección presenta cuatro fdp adicionales que a menudo se presentan en estudios de investigación de operaciones: binomial discreta y de Poisson, y exponencial continua y normal.

14.4.1 Distribución binomial

Un fabricante produce un artículo en lotes de n artículos cada uno. La fracción de artículos defectuosos, p, en cada lote se estima a partir de datos históricos. Nos interesa determinar la fdp de la cantidad de artículos defectuosos en un lote.

Hay $C_x^n = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ combinaciones distintas de x artículos defectuosos en un lote de tamaño n, y la probabilidad de realizar cada combinación es $p^x(1 - p)^{n-x}$. Por lo tanto, de acuerdo con la ley de la adición (sección 14.1.1), la probabilidad de k artículos defectuosos en un lote de n artículos es

$$P\{x = k\} = C_k^n p^k(1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Ésta es la distribución binomial con parámetros n y p. Su media y varianza son

$$E\{x\} = np$$
$$\text{var}\{x\} = np(1 - p)$$

Ejemplo 14.4-1

Las labores diarias de John Doe requieren hacer 10 viajes redondos por automóvil entre dos ciudades. Una vez que realiza los 10 viajes, el señor Doe puede descansar el resto del día, una motivación suficientemente buena para exceder el límite de velocidad. La experiencia muestra que hay 40% de probabilidad de ser multado por exceso de velocidad en cualquier viaje redondo.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el día termine sin una multa por exceso de velocidad?

(b) Si cada multa por exceso de velocidad es de $80, ¿cuál es la multa diaria promedio?

La probabilidad de ser multado en cualquier viaje es $p = .4$. Por lo tanto, la probabilidad de no ser multado en cualquier día es

$$P\{x = 0\} = C_0^{10}(.4)^0(.6)^{10} = .006$$

Esto significa que la probabilidad de terminar el día sin ser multado es menor que 1%.

La multa promedio por día es

$$\text{Multa promedio} = \$80\ E\{x\} = \$80\ (np) = 80 \times 10 \times .4 = \$320$$

Comentarios. $P\{x = 0\}$ puede calcularse con *excelStatTables.xls.* Ingrese 10 en F7, .4 en G7, y 0 en J7. La respuesta es $P\{x = 0\} = .006047$, aparece en M7.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.4A

*__1.__ Se lanza un dado 10 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado lanzado no muestre un número par?

2. Suponga que se lanzan cinco monedas de forma independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente una de las monedas sea diferente de las demás?

*__3.__ Un adivino de la suerte afirma que puede predecir si una persona amasará riqueza financiera a lo largo de su vida al examinar su escritura. Para verificar su afirmación, a 10 millonarios y a 10 profesores universitarios se les pidió que proporcionaran muestras de su escritura, las cuales luego se emparejaron, un millonario y un profesor, y se le presentaron al adivino de la suerte. Decimos que la afirmación es cierta si el adivino hace al menos ocho predicciones correctas. ¿Cuál es la probabilidad de que la afirmación sea un "fiasco".

4. En un casino hay un juego que consiste en seleccionar un número del 1 al 6 antes de que el operador lance 3 dados al mismo tiempo. El casino paga tantos dólares cuantos números de los dados resulten iguales a su selección. Si no hay ninguna coincidencia, usted sólo le paga $1 al casino. Determine su ganancia esperada a largo plazo.

5. Suponga que lanza dos dados al mismo tiempo. Si coinciden recibe 50 centavos. De lo contrario, paga 10 centavos. Determine la ganancia esperada del juego.

6. Compruebe las fórmulas de la media y la varianza de la distribución binomial.

14.4.2 Distribución de Poisson

Los clientes llegan a un banco o a una tienda de abarrotes de una forma "totalmente aleatoria"; es decir, las horas de llegada no pueden predecirse con anticipación. La fdp que describe el *número* de llegadas durante un lapso de tiempo específico es la distribución de Poisson.

Sea x el número de eventos (por ejemplo, llegadas) que ocurren durante un lapso de tiempo específico (a saber, un minuto, o una hora). Dado que l es una constante conocida, la función de densidad de probabilidad de Poisson se define como

$$P\{x = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

La media y la varianza de la distribución de Poisson son

$$E\{x\} = \lambda$$
$$\text{var}\{x\} = \lambda$$

La fórmula de la media revela que l debe representar la tasa a que ocurren los eventos.

La distribución de Poisson destaca en el estudio de colas (vea el capítulo 18).

Ejemplo 14.4-2

A un taller de reparación de motores pequeños llegan trabajos de reparación a razón de 10 por día.

(a) ¿Cuál es el número promedio de trabajos que se reciben a diario en el taller?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que no lleguen trabajos durante cualquier hora, suponiendo que el taller está abierto 8 horas al día?

El número promedio de trabajos recibidos por día es igual a $\lambda = 10$ trabajos por día. Para calcular la probabilidad de que lleguen trabajos por *hora*, tenemos que calcular la tasa de llegadas por hora; es decir, $\lambda_{\text{hora}} = \frac{10}{8} = 1.25$ trabajos de reparación por hora. Por lo tanto.

$$P\{\text{no hay llegadas por hora}\} = \frac{(\lambda_{\text{hora}})^0 e^{-\lambda_{\text{hora}}}}{0!}$$
$$= \frac{1.25^0 e^{-1.25}}{0!} = .2865$$

Comentario. La probabilidad anterior se puede calcular con *excelStatTables.xls.* Ingrese 1.25 en F16 y 0 en J16. La respuesta .286505 aparece en M16.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.4B

*__1.__ De acuerdo con la distribución de Poisson, los clientes llegan a una instalación de servicio a razón de 4 por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un cliente llegue en cualquier intervalo dado de 30 segundos?

2. La distribución de Poisson con el parámetro l se aproxima a la distribución binomial con parámetros *(n, p)* cuando $n \to \infty, p \to 0$ y $np \to \lambda$. Demuestre este resultado para la situación en la que sabe que un lote fabricado contiene 1% de artículos defectuosos. Si se toma una muestra de 10 artículos del lote, calcule la probabilidad de que en la muestra haya cuando mucho un artículo defectuoso, primero por medio de la distribución binomial (exacta) y luego por medio de la distribución de Poisson (aproximada). Demuestre que la aproximación no será aceptable si el valor de *p* se incrementa a, digamos, 0.5.

*__3.__ A una recepción llegan clientes al azar a una razón promedio de 20 por hora.

(a) Determine la probabilidad de que la recepción esté ociosa.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos personas hagan cola en espera de ser atendidas?

4. Compruebe las fórmulas de la media y la varianza de la distribución de Poisson.

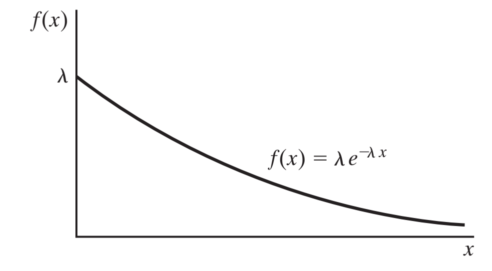


FIGURA 14.3

Función de densidad de probabilidad de la distribución exponencial

14.4.3 Distribución exponencial negativa

Si el *número* de llegadas a una instalación de servicio durante un lapso de tiempo específico sigue la distribución de Poisson (sección 14.4.2), entonces, automáticamente, la distribución del *tiempo entre llegadas* (es decir, entre llegadas sucesivas) es la distribución exponencial negativa (o, simplemente exponencial). Específicamente, si λ es la tasa de ocurrencia de las llegadas de Poisson, entonces la distribución del tiempo entre llegadas, x, es

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

La figura 14.3 muestra la gráfica de $f(x)$.

La media y la varianza de la distribución exponencial son

$$E\{x\} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{var}\{x\} = \frac{1}{\lambda}$$

La media $E\{x\}$ es consistente con la definición de λ. Si λ es la *tasa* a la cual ocurren los eventos, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es el intervalo de tiempo promedio entre eventos sucesivos.

Ejemplo 14.4-3

Los automóviles llegan al azar a una gasolinera. El tiempo promedio entre llegadas es de 2 minutos. Determine la probabilidad de que el tiempo entre llegadas no exceda de 1 minuto.

La determinación de la probabilidad deseada es igual a la de calcular la FDA de x; es decir,

$$P\{x \leq A\} = \int_0^A \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -e^{-\lambda x}|_o^A$$

$$= 1 - e^{-\lambda A}$$

La tasa de llegadas para el ejemplo es $\lambda = \frac{1}{2}$ llegadas por minuto. Si sustituimos $A = 1$, la probabilidad deseada es

$$P\{x \leq 1\} = 1 - e^{-(\frac{1}{2})(1)} = .3934$$

Comentarios. Puede utilizar la plantilla *excelStatTables.xls* para calcular la probabilidad anterior. Ingrese .5 en F9, 1 en J9. La respuesta (= .393468) aparece en O9.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.4C

***1.** Los clientes que compran en Walmark Store son tanto urbanos como suburbanos. Los clientes urbanos llegan a razón de 5 por minuto y los suburbanos llegan a razón de 7 por minuto. Las llegadas son totalmente aleatorias. Determine la probabilidad de que el tiempo entre llegadas de todos los clientes sea menor que 5 segundos.

2. Compruebe las fórmulas de la media y la varianza de la distribución exponencial.

14.4.4 Distribución normal

La distribución normal describe muchos fenómenos aleatorios de la vida diaria, como las calificaciones de exámenes y el peso y la estatura de las personas. La fdp de la distribución normal es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \ -\infty < x < \infty$$

La media y la varianza son

$$E\{x\} = \mu$$

$$\text{var}\{x\} = \sigma^2$$

La notación $N(\mu, \sigma)$ se suele utilizar para representar una distribución normal con media μ y desviación estándar σ.

La figura 14.4 muestra las gráficas de la fdp normal. La función siempre es simétrica alrededor de la media μ.

Una propiedad importante de la variable aleatoria normal es que representa de forma aproximada la distribución del promedio de una muestra tomada de *cualquier* distribución. Este notable resultado se basa en el teorema siguiente:

Teorema del límite central. Sean $x_1, x_2,\ldots$ y x_n *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una con media m y desviación estándar s, y se definan*

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

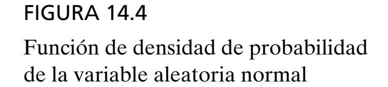
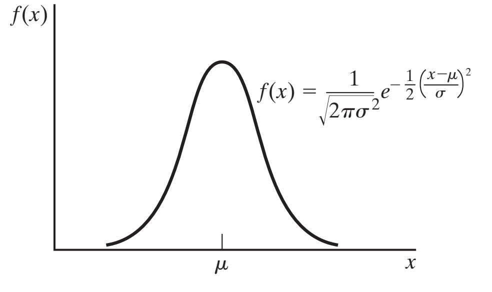


FIGURA 14.4
Función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria normal



La distribución de s_n es asintóticamente normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$, independientemente de la distribución original de $x_1, x_2,\ldots,$ y x_n.

Un caso especial del teorema del límite central tiene que ver con la distribución de la media de una muestra de tamaño n (tomada de *cualquier* distribución). El promedio es asintóticamente normal con media μ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$. Este resultado tiene importantes aplicaciones en el control de calidad estadístico.

La FDA de la variable aleatoria normal no puede determinarse en una forma cerrada. La tabla A.1 en el apéndice A da las probabilidades de $N(0, 1)$, la **distribución normal estándar** con media cero y desviación estándar 1. En general, una variable aleatoria normal x con media m y desviación estándar σ puede convertirse en normal estándar z mediante la transformación

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Más de 99% del área bajo cualquier función de densidad normal se encuentra encerrada en el intervalo $\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma$, también conocido como **límites 6 sigma**.

Ejemplo 14.4-4

El diámetro interno de un cilindro tiene la especificación 1 ± .03 cm. El resultado del proceso de maquinado que produce el cilindro sigue una distribución normal con media de 1 cm y desviación estándar de .1 cm. Determine el porcentaje de la producción que satisfará las especificaciones.

Definiendo x como el parámetro interno del cilindro, la probabilidad de que satisfaga las especificaciones es

$$P\{1 - .03 \leq x \leq 1 + .03\} = P\{.97 \leq x \leq 1.03\}$$

Esta probabilidad se calcula por medio de la normal estándar (tabla A.1 en el apéndice A). Dado que $\mu = 1$ y $\sigma = .1$, tenemos

$$\begin{aligned}P\{.97 \leq x \leq 1.03\} &= P\{\tfrac{.97 - 1}{.1} \leq z \leq \tfrac{1.03 - 1}{.1}\}\\ &= P\{-.3 \leq z \leq .3\}\\ &= P\{z \leq .3\} - P\{z \leq -.3\}\\ &= P\{z \leq .3\} - P\{z \geq .3\}\\ &= P\{z \leq .3\} - [1 - P\{z \leq .3\}]\\ &= 2P\{z \leq .3\} - 1\\ &= 2 \times .6179 - 1\\ &= .2358\end{aligned}$$

Observe que $P\{z \leq -.3\} = 1 - P\{z \leq .3\}$ debido a la simetría de la fdp, como se muestra en la figura 14.5. La probabilidad acumulada $P\{z \leq .3\}(= .6179)$ se obtiene con la tabla normal estándar (tabla A.1 en el apéndice A) como la entrada designada con la fila $z = 0.3$ y la columna $z = 0.00$.

Comentario. $P\{.97 \leq x \leq 1.03\}$ puede calcularse directamente desde *excelStatTablesxls.* Ingrese 1 en F15, .1 en G15, .97 en J15 y 1.03 en K15. La respuesta (= .235823) aparece en Q15.

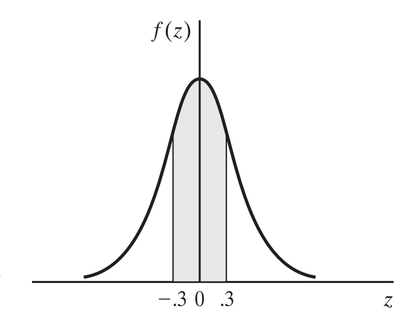


FIGURA 14.5
Cálculo de $P\{-.3 \leq z \leq .3\}$ en una distribución normal estándar

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.4D

1. La facultad de ingeniería de la Universidad de Arkansas requiere una calificación ACT mínima de 26. Las calificaciones de examen entre estudiantes del último año de preparatoria en un distrito escolar dado, por lo común se distribuyen con media de 22 y desviación estándar de 2.

(a) Determine el porcentaje de estudiantes de último año de la preparatoria que son reclutas potenciales de carreras de ingeniería.

(b) Si la Universidad de Arkansas no acepta a cualquier estudiante con una calificación ACT menor que 17, ¿qué porcentaje de estudiantes no será elegible para admisión en la Universidad de Arkansas?

***2.** Los pesos de personas que quieren hacer un paseo en helicóptero en un parque de diversiones tienen una media de 180 lb y una desviación estándar de 15 lb. El helicóptero puede llevar a 5 personas, pero su capacidad de peso máxima es de 1000 lb. ¿Cuál es la probabilidad de que el helicóptero no despegue con cinco personas a bordo? (*Sugerencia*: Aplique el teorema del límite central.)

3. Por lo común, el diámetro interno de un cilindro está distribuido con una media de 1 cm y una desviación estándar de .01 cm. En el interior de cada cilindro se ensambla una barra sólida. El diámetro de la barra también suele distribuirse con una media de .99 cm y una desviación estándar de .01 cm. Determine el porcentaje de pares de cilindro-barra que no podrán ser ensamblados. (*Sugerencia:* La diferencia entre dos variables aleatorias normales también es normal.)

14.5 DISTRIBUCIONES EMPÍRICAS

Las secciones precedentes abordaron las fdp y las FDA de cinco distribuciones comunes: uniforme, binomial, de Poisson, exponencial y normal. ¿Cómo se reconocen estas distribuciones en la práctica?

La base para identificar cualquier fdp son los datos sin procesar que reunimos sobre la situación que estamos estudiando. Esta sección muestra cómo los datos muestreados pueden convertirse en una fdp.

Paso 1. Resuma los datos sin procesar en la forma de un histograma de frecuencia apropiado para determinar la fdp empírica asociada.

Paso 2. Use la *prueba de bondad de ajuste* para evaluar si la fdp empírica resultante se muestrea a partir de una fdp teórica conocida.

Histograma de frecuencias. Este histograma se construye con datos sin procesar dividiendo el rango de éstos (valor mínimo a valor máximo) en clases que no se traslapan. La frecuencia en cada clase es la cuenta de los valores de los datos sin procesar que quedan comprendidos dentro de los límites designados de la clase.

Ejemplo 14.5-1

Los siguientes datos representan el tiempo de servicio (en minutos) en una instalación de servicio de una muestra de 60 clientes.

.7	.4	3.4	4.8	2.0	1.0	5.5	6.2	1.2	4.4
1.5	2.4	3.4	6.4	3.7	4.8	2.5	5.5	.3	8.7
2.7	.4	2.2	2.4	.5	1.7	9.3	8.0	4.7	5.9
.7	1.6	5.2	.6	.9	3.9	3.3	.2	.2	4.9
9.6	1.9	9.1	1.3	10.6	3.0	.3	2.9	2.9	4.8
8.7	2.4	7.2	1.5	7.9	11.7	6.3	3.8	6.9	5.3

Los valores mínimo y máximo de los datos son 2 y 11.7, respectivamente. Esto significa que la muestra está cubierta por el rango $(0, 12)$. Dividimos arbitrariamente el rango $(0, 12)$ en 12 clases, cada una de 1 minuto de ancho. La selección apropiada del ancho de la clase es crucial para revelar la forma de la distribución empírica. Aun cuando no haya reglas exactas para determinar el ancho de clase óptimo, una regla práctica es utilizar de 10 a 20 clases. En la práctica puede ser necesario probar diferentes anchos de clase antes de decidir sobre un histograma aceptable.

La siguiente tabla resume la información en forma de histograma de la muestra dada. La columna de frecuencias relativas f_i, se calcula dividiendo las entradas de la columna de frecuencias observadas o_i en el total de observaciones ($n = 60$). Por ejemplo, $f_1 = \frac{11}{60} = .1833$. La columna de frecuencias acumuladas F_i, se genera al sumar los valores de f_i de manera recursiva. Por ejemplo, $F_1 = f_1 = .1833$ y $F_2 = F_1 + f_2 = .1833 + .1333 = .3166$.

i	Intervalo de clase	Cuenta de observaciones	Frecuencia observada, o_i	Frecuencia relativa, f_i	Frecuencia relativa acumulada, F_i
1	(0, 1)	𝍸 𝍸 |	11	.1833	.1833
2	(1, 2)	𝍸 |||	8	.1333	.3166
3	(2, 3)	𝍸 ||||	9	.1500	.4666
4	(3, 4)	𝍸 ||	7	.1167	.5833
5	(4, 5)	𝍸 |	6	.1000	.6833
6	(5, 6)	𝍸	5	.0833	.7666
7	(6, 7)	||||	4	.0667	.8333
8	(7, 8)	||	2	.0333	.8666
9	(8, 9)	|||	3	.0500	.9166
10	(9, 10)	|||	3	.0500	.9666
11	(10, 11)	|	1	.0167	.9833
12	(11, 12)	|	1	.0167	1.0000
Totales			60	1.0000	

Los valores de f_i y F_i proporcionan una versión "discretizada" de la fdp y la FDA en el tiempo de servicio. Podemos convertir la FDA resultante en una función continua si unimos los puntos resultantes con segmentos de línea. La figura 14.6 proporciona la fdp empírica y la FDA para el ejemplo. La FDA, como la presenta el histograma, aparece definida en los puntos medios de las clases.

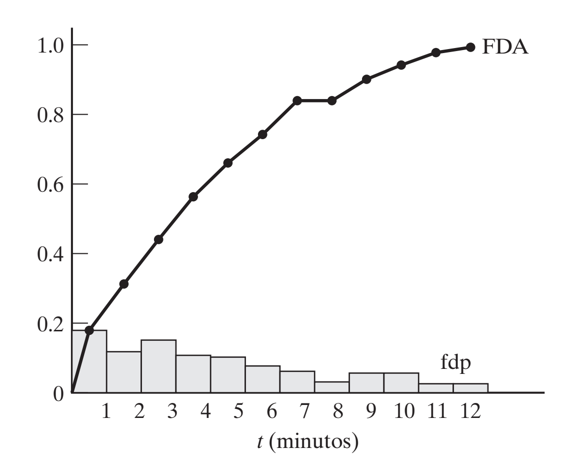


FIGURA 14.6
FDA lineal de una distribución empírica

Ahora podemos estimar la media, $\bar{t}$, y la varianza, s_t^2, de la distribución empírica. Sea N el número de clases en el histograma y se defina $\bar{t}_i$ como el punto medio de la clase i, entonces

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^{N} f_i \bar{t}_i$$

$$s_t^2 = \sum_{i=1}^{N} f_i (\bar{t}_i - \bar{t})^2$$

Aplicando estas fórmulas al ejemplo presente, obtenemos

$$\bar{t} = .1833 \times .5 + .133 \times 1.5 + \cdots + 11.5 \times .0167 = 3.934 \text{ minutos}$$

$$s_t^2 = .1883 \times (.5 - 3.934)^2 + .1333 \times (1.5 - 3.934)^2 + \cdots$$
$$+ .0167 \times (11.5 - 3.934)^2 = 8.646 \text{ minutos}^2$$

Momento de Excel

Los histogramas se pueden construir de manera muy cómoda si utilizamos Excel. Seleccione Data Analysis ⇒ Histogram, luego ingrese los datos pertinentes en el cuadro de diálogo.

La herramienta *Histogram* en Excel no produce la media y la desviación estándar directamente como parte de los resultados.[2] Puede utilizar la plantilla Excel *excelMeanVar.xls* para calcular la media, la varianza, el máximo y el mínimo de la muestra. Incluso, Excel permite utilizar la herramienta *Histogram*.

[2] *Data Análisis* en Excel proporciona una herramienta aparte llamada *Descriptive Statistics*, la cual puede usarse para calcular la media y la varianza (¡y también los volúmenes de otras estadísticas que quizá nunca utilice!).

Prueba de bondad de ajuste. Esta prueba evalúa si la muestra utilizada para determinar la distribución empírica se tomó de una distribución teórica específica. Puede realizarse una evaluación inicial de los datos comparando la FDA empírica con la FDA de la distribución teórica propuesta. Si las dos FDA no se desvían "en exceso", entonces es probable que la muestra se tomó de la distribución teórica propuesta. Esta "corazonada" inicial puede respaldarse aún más con la prueba de bondad de ajuste. El siguiente ejemplo proporciona los detalles del procedimiento propuesto.

Ejemplo 14.5-2

Este ejemplo prueba los datos del ejemplo 14.5-1 en cuanto a la hipótesis de una distribución exponencial. La primera tarea es especificar la función que define la distribución teórica. Según el ejemplo 14.5-1, $\bar{t} = 3.934$ minutos. Por consiguiente, $\lambda = \frac{1}{3.934} = .2542$ servicios por minuto según la distribución exponencial hipotética (vea la sección 14.4.3), y la fdp y la FDA asociadas se dan como

$$f(t) = .2542e^{-.2542t},\ t > 0$$

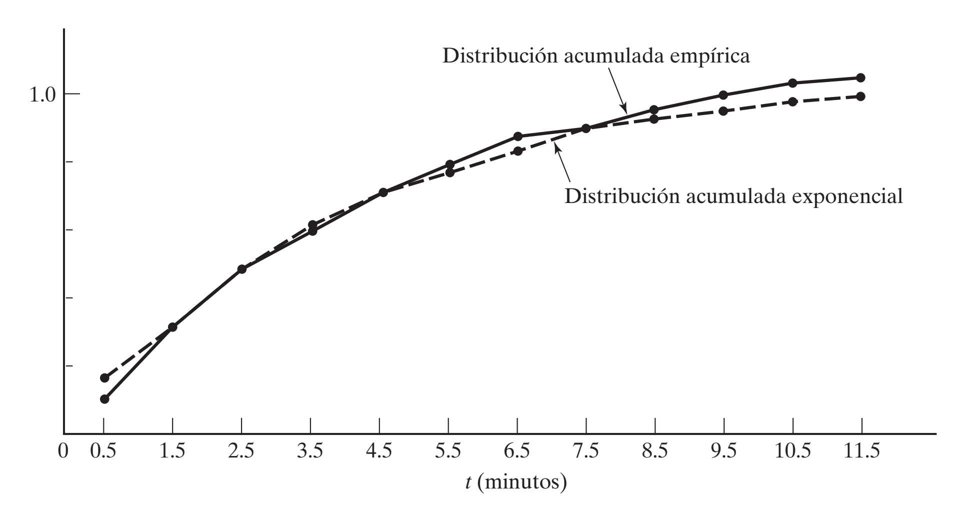
$$F(T) = \int_0^T f(t)\,dt = 1 - e^{-.2542T},\ T > 0$$

Podemos utilizar la FDA, $F(T)$, para calcular la FDA teórica para $T = .5, 1.5,\ldots,$ y 11.5, y luego compararla gráficamente con el valor empírico F_i, $i = 1,2,\ldots, 12$, calculado en el ejemplo 14.5-1 como se muestra en la figura 14.7. Un examen superficial de las dos gráficas sugiere que la distribución exponencial puede proporcionar un ajuste razonable por los datos observados.

El siguiente paso es implementar la prueba de bondad de ajuste. Existen dos pruebas como esa: (1) la prueba de **Kolmogrov-Smirnov**, y (2) la prueba **ji cuadrada**. Limitaremos la presentación a la prueba ji cuadrada.

FIGURA 14.7

Comparación de la FDA empírica y la FDA exponencial teórica



La prueba ji cuadrada se basa en una medición de la desviación entre las frecuencias empíricas y teóricas. Específicamente, para la clase i, la frecuencia teórica n_i correspondiente a la frecuencia observada o_i se calcula como

$$\begin{aligned} n_i &= n\int_{I_{i-1}}^{I_i} f(t)dt \\ &= n(F(I_i) - F(I_{i-1})) \\ &= 60(e^{-.2542I_{i-1}} - e^{-.2542I_i}) \end{aligned}$$

Luego, suponiendo N clases, se calcula una medida de la desviación entre las frecuencias empíricas y observadas como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(o_i - n_i)^2}{n_i}$$

La medida χ^2 es asintóticamente una función de densidad de probabilidad ji cuadrada con $N - k - 1$ grados de libertad, donde k es el número de parámetros estimados desde los datos sin procesar y utilizados para definir la distribución teórica.

La hipótesis nula de la prueba que expresa que la muestra observada se toma de la distribución teórica $f(t)$ se acepta si

$$\text{H: Aceptar } f(t) \text{ si } \chi^2 < \chi^2_{N-k-1,1-\alpha}$$

El valor crítico $\chi^2_{N-k-1,1-\alpha}$ se obtiene a partir de tablas ji cuadrada (vea la tabla A.3, apéndice A) correspondientes a $N - k - 1$ grados de libertad y a un nivel de significancia α.

Los cálculos de la prueba se muestran en la siguiente tabla:

i	Clase	Frecuencia observada, o_i		Frecuencia teórica, n_i		$\frac{(o_i - n_i)^2}{n_i}$
1	(0, 1)	11		13.448		.453
2	(1, 2)	8		10.435		.570
3	(2, 3)	9		8.095		.100
4	(3, 4)	7		6.281		.083
5	(4, 5)	6	11	4.873	8.654	.636
6	(5, 6)	5		3.781		
7	(6, 7)	4		2.933		
8	(7, 8)	2	9	2.276	6.975	.588
9	(8, 9)	3		1.766		
10	(9, 10)	3		1.370		
11	(10, 11)	1	5	1.063	6.111	.202
12	(11, ∞)	1		3.678		
Totales		$n = 60$		$n = 60$		valor de $c^2 = 2.623$

Como regla práctica, el conteo de frecuencia *teórica* debe ser al menos de 5. Este requerimiento se suele resolver combinando clases sucesivas hasta que se satisface la regla, como se muestra en la tabla. El número resultante de clases llega a ser $N = 7$. Como estamos estimando un parámetro a partir de los datos observados (es decir, l), el grado de libertad de la ji cuadrada

es $7 - 1 - 1 = 5$. Si consideramos un nivel de significancia $\alpha = .05$, obtenemos el valor crítico $\chi^2_{5,.05} = 11.07$ (utilice la tabla A.3 en el apéndice A, o, en *excelStatTables.xls*, ingrese 5 en F8 y .05 en L8, y obtenga la respuesta en R8). Ya que el valor de χ^2 (= 2.623) es menor que el valor crítico, aceptamos la hipótesis de que la muestra de toma de una fdp exponencial.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 14.5A

1. Los datos siguientes representan el tiempo entre llegadas (en minutos) a una instalación de servicio:

4.3	3.4	.9	.7	5.8	3.4	2.7	7.8
4.4	.8	4.4	1.9	3.4	3.1	5.1	1.4
.1	4.1	4.9	4.8	15.9	6.7	2.1	2.3
2.5	3.3	3.8	6.1	2.8	5.9	2.1	2.8
3.4	3.1	.4	2.7	.9	2.9	4.5	3.8
6.1	3.4	1.1	4.2	2.9	4.6	7.2	5.1
2.6	.9	4.9	2.4	4.1	5.1	11.5	2.6
.1	10.3	4.3	5.1	4.3	1.1	4.1	6.7
2.2	2.9	5.2	8.2	1.1	3.3	2.1	7.3
3.5	3.1	7.9	.9	5.1	6.2	5.8	1.4
.5	4.5	6.4	1.2	2.1	10.7	3.2	2.3
3.3	3.3	7.1	6.9	3.1	1.6	2.1	1.9

(a) Use Excel para desarrollar tres histogramas con los datos basados en anchos de clase de .5, 1 y 1.5 minutos, respectivamente.

(b) Compare gráficamente la distribución acumulada de la FDA empírica y la de una distribución exponencial correspondiente.

(c) Pruebe la hipótesis de que la muestra dada se toma de una distribución exponencial. Aplique un nivel de confianza de 95%.

(d) ¿Cuál de los tres histogramas es el "mejor" para comprobar la hipótesis nula?

2. Los datos siguientes representan el periodo (en segundos) necesarios para transmitir un mensaje.

25.8	67.3	35.2	36.4	58.7
47.9	94.8	61.3	59.3	93.4
17.8	34.7	56.4	22.1	48.1
48.2	35.8	65.3	30.1	72.5
5.8	70.9	88.9	76.4	17.3
77.4	66.1	23.9	23.8	36.8
5.6	36.4	93.5	36.4	76.7
89.3	39.2	78.7	51.9	63.6
89.5	58.6	12.8	28.6	82.7
38.7	71.3	21.1	35.9	29.2

Utilice Excel para construir un histograma apropiado. Compruebe la hipótesis de que estos datos se toman de una distribución uniforme con un nivel de confianza de 95%, dada la siguiente información adicional sobre la distribución uniforme teórica:

(a) El rango de la distribución es entre 0 y 100.

(b) El rango de la distribución se estima a partir de los datos muestreados.

(c) El límite máximo en el rango de la distribución es 100, pero el límite mínimo debe estimarse a partir de los datos muestreados.

3. Para contar el volumen del tráfico en una intersección de congestionamiento se utiliza un dispositivo automático. Se registra el tiempo de llegada y se transforma en un tiempo absoluto que inicia de cero. La siguiente tabla proporciona los tiempos de llegada (en minutos) de los primeros 60 automotores. Use Excel para construir un histograma apropiado. Compruebe la hipótesis de que el tiempo entre llegadas es exponencial utilizando un nivel de confianza de 95%.

Llegada	Tiempo de llegada (min)	Llegada	Tiempo de llegada (min)	Llegada	Tiempo de llegada (min)	Llegada	Tiempo de llegada (min)
1	5.2	16	67.6	31	132.7	46	227.8
2	6.7	17	69.3	32	142.3	47	233.5
3	9.1	18	78.6	33	145.2	48	239.8
4	12.5	19	86.6	34	154.3	49	243.6
5	18.9	20	91.3	35	155.6	50	250.5
6	22.6	21	97.2	36	166.2	51	255.8
7	27.4	22	97.9	37	169.2	52	256.5
8	29.9	23	111.5	38	169.5	53	256.9
9	35.4	24	116.7	39	172.4	54	270.3
10	35.7	25	117.3	40	175.3	55	275.1
11	44.4	26	118.2	41	180.1	56	277.1
12	47.1	27	124.1	42	188.8	57	278.1
13	47.5	28	1127.4	43	201.2	58	283.6
14	49.7	29	127.6	44	218.4	59	299.8
15	67.1	30	127.8	45	219.9	60	300.0

BIBLIOGRAFÍA

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, 2a. ed., vols. 1 y 2, Wiley, Nueva York, 1967.

Paulos, J.A., *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences*, Hill y Wang, Nueva York, 1988.

Papoulis, A., *Probability and Statistics,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1990.

Ross, S., *Introduction to Probability Models*, 5a. ed., Academic Press, Nueva York, 1993.

CAPÍTULO 15

Análisis de decisiones y juegos

Aplicación de la vida real. Planeación de la distribución de planta de una instalación de fabricación integrada por computadora (FIC)

El colegio de ingeniería en una institución académica desea establecer un laboratorio de fabricación integrada por computadora (FIC)) en un edificio desocupado. El nuevo laboratorio funcionará como instalación de enseñanza e investigación y como centro industrial de excelencia técnica. Se recopilan las recomendaciones solicitadas por los profesores sobre el plan de diseño del nuevo laboratorio, incluida el área ideal y absoluta para cada unidad. El estudio utiliza tanto un proceso de jerarquía analítica (PJA) como la programación de metas para llegar a una solución comprometida que cumpla con las necesidades de enseñanza, investigación y servicio a la industria. (El caso 9 del capítulo 26, en el sitio web de este libro, detalla este estudio).

15.1 TOMA DE DECISIONES BAJO CERTIDUMBRE. PROCESO DE JERARQUÍA ANALÍTICA (PJA)

Los modelos de PL presentados en los capítulos 2 a 9 son ejemplos de toma de decisiones bajo certidumbre (todos los datos se conocen con certeza). El PJA está diseñado para situaciones en que las ideas, sentimientos y emociones que afectan el proceso de toma de decisiones se cuantifican y así obtener una escala numérica para priorizar las alternativas.

Ejemplo 15.1-1 (Idea general del PJA)

Martin Hans, un brillante estudiante del último año de la preparatoria, recibió ofertas de becas académicas completas de tres instituciones: U de A, U de B y U de C. Martin fundamenta su elección en dos criterios: la ubicación y la reputación académica. Para él, la reputación académica es cinco veces más importante que la ubicación, y asigna un peso de aproximadamente 83% a la reputación y un 17% a la ubicación. Luego utiliza un proceso sistemático (el cual se detallará

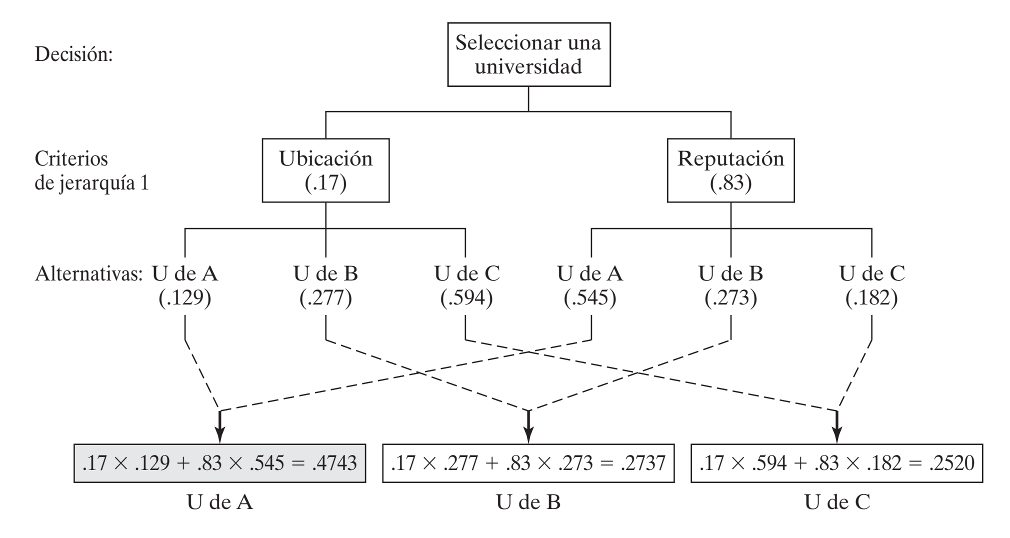


FIGURA 15.1
Resumen de cálculos de PJA para el ejemplo 15.1-1

más adelante) para calificar las tres universidades desde el punto de vista de la ubicación y la reputación, como se muestra en la tabla siguiente:

	Estimaciones de peso en porcentaje para		
Criterio	U de A	U de B	U de C
Ubicación	12.9	27.7	59.4
Reputación	54.5	27.3	18.2

La estructura del problema de decisión se resume en la figura 15.1. El problema implica una sola jerarquía (nivel) con dos criterios (ubicación y reputación) y tres alternativas de decisión (U de A, U de B y U de C).

La calificación de cada universidad se basa en los siguientes pesos *compuestos*:

$$\text{U de A} = .17 \times .129 + .83 \times .545 = \mathbf{.4743}$$

$$\text{U de B} = .17 \times .277 + .83 \times .273 = .2737$$

$$\text{U de C} = .17 \times .594 + .83 \times .182 = .2520$$

Basado en estos cálculos, Martin elige la U de A porque tiene el peso compuesto más alto.

Comentarios. La estructura general del PJA puede incluir varios niveles de criterios. Suponga en el ejemplo 15.1-1 que la hermana gemela de Martin, Jane, también fue aceptada con beca completa a las tres universidades. Los padres insisten en que los dos hermanos asistan a la misma universidad. La figura 15.2 resume el problema de decisión, el cual ahora implica dos jerarquías. Los valores de p y q en la primera jerarquía son los pesos relativos que representan las opiniones de Martin y Jane (presumiblemente iguales). Los pesos (p_1, p_2) y (q_1, q_2) en la segunda jerarquía,

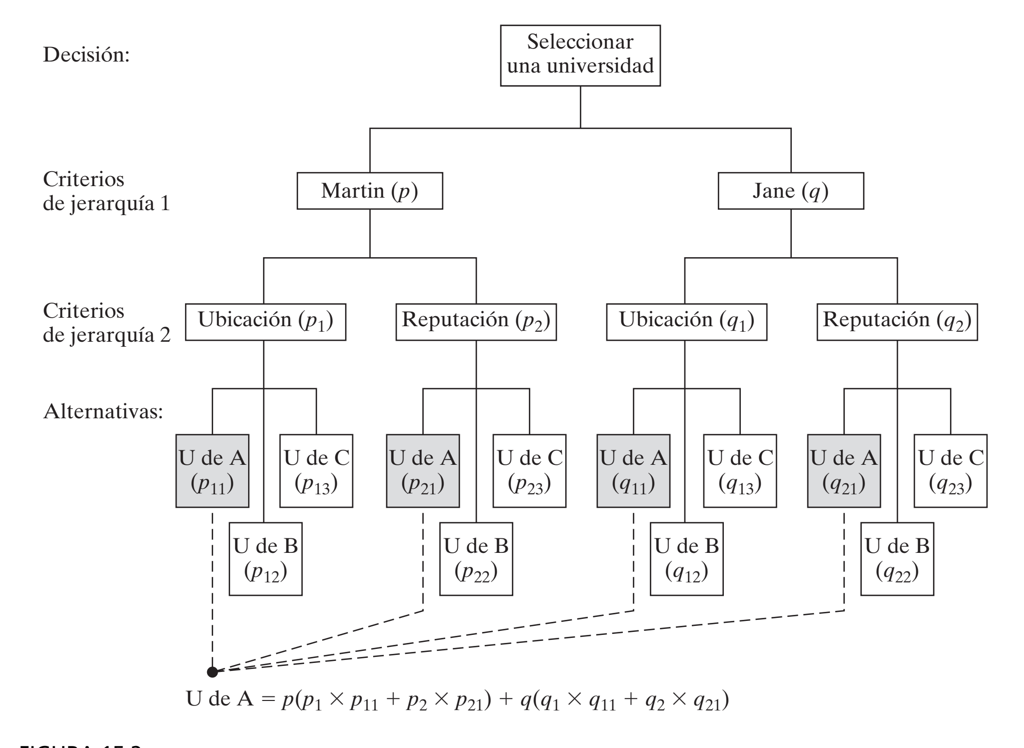


FIGURA 15.2

Refinamiento del problema de decisión del ejemplo 15.1-1

respectivamente, representan las preferencias de Martin y Jane con respecto a la ubicación y reputación de cada universidad. El resto de la gráfica de toma de decisiones puede interpretarse del mismo modo. Observe que $p + q = 1, p_1 + p_2 = 1, q_1 + q_2 = 1, p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1, p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1, q_{11} + q_{12} + q_{13} = 1$, y $q_{21} + q_{22} + q_{23} = 1$. La parte inferior de la figura 15.2 demuestra cómo se calcula el peso compuesto de la U de A.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.1A

***1.** Suponga que se especifican los siguientes pesos para la situación de Martin y Jane (figura 15.2):

$$p = .5, q = .5$$
$$p_1 = .17, p_2 = .83$$
$$p_{11} = .129, p_{12} = .277, p_{13} = .594$$
$$p_{21} = .545, p_{22} = .273, p_{23} = .182$$
$$q_1 = .3, q_2 = .7$$
$$q_{11} = .2, q_{12} = .3, q_{13} = .5$$
$$q_{21} = .5, q_{22} = .2, q_{23} = .3$$

Basado en esta información, califique las tres universidades.

Determinación de los pesos. El *quid* (asunto) del PJA es la determinación de los pesos relativos (como los utilizados en el ejemplo 15.1-1) para calificar las alternativas. Suponiendo que nos enfrentamos a n criterios en una jerarquía dada, el PJA establece una **matriz de comparación** por pares **A** de $n \times n$, que cuantifica el juicio del tomador de decisiones de la importancia relativa de los criterios. La comparación por pares se hace de modo que el criterio en la fila i ($i = 1, 2,\ldots, n$) se califica con respecto a cada criterio alterno. Si a_{ij} define el elemento (i, j) de **A**, el PJA utiliza una escala numérica del 1 al 9 en la cual $a_{ij} = 1$ significa que i y j son de *igual importancia*, $a_{ij} = 5$ indica que i es *mucho más importante* que j, y $a_{ij} = 9$ indica que i es *extremadamente más importante* que j. Otros valores intermedios entre 1 y 9 se interpretan según corresponda. **Consistencia** en el juicio implica que si $a_{ij} = k$, entonces $a_{ji} = \frac{1}{k}$. Además, todos los elementos diagonales a_{ii} de **A** son iguales a 1, porque estos elementos califican cada criterio contra sí mismo.

Ejemplo 15.1-2

Para demostrar cómo se determina la matriz de comparación A para el problema de decisión de Martin del ejemplo 15.1-1, comenzamos con la jerarquía superior que tiene que ver con los criterios de ubicación (L) y reputación (R). En el juicio de Martin, R es *mucho más importante* que L, y por consiguiente $a_{21} = 5$ y, de forma automática, $a_{12} = \frac{1}{5}$, por lo que se produce la siguiente matriz de comparación:

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & L & R \\ L & 1 & \frac{1}{5} \\ R & 5 & 1 \end{matrix}$$

Los pesos relativos de R y L se determinan normalizando **A** para crear una nueva matriz **N**. El proceso requiere dividir los elementos individuales de cada columna entre la suma de la columna. Por lo tanto, dividimos los elementos de la columna 1 entre 6 (1 + 5) y los de la columna 2 entre 1.2 ($= \frac{1}{5} + 1$). Los pesos relativos deseados, w_R y w_L, se calculan entonces como promedios de fila:

$$\mathbf{N} = \begin{matrix} & L & R \\ L & .17 & .17 \\ R & .83 & .83 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{Promedios de fila} \\ w_L = \frac{.17 + .17}{2} = .17 \\ w_R = \frac{.83 + .83}{2} = .83 \end{matrix}$$

Los cálculos arrojan $w_L = .17$ y $w_R = .83$, los pesos que utilizamos en la figura 15.1. Las columnas de **N** son iguales, una indicación de que el tomador de decisiones está ejerciendo un juicio consistente al especificar las entradas de la matriz de comparación **A**. La consistencia siempre está garantizada en matrices de comparación de 2×2 pero no en matrices de mayor orden (como explicaremos en breve).

Las preferencias de Martin con respecto a la importancia relativa de las tres universidades desde el punto de vista de los dos criterios L y R se resumen en las siguientes matrices de comparación:

$$\mathbf{A}_L = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ B & 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ C & 5 & 2 & 1 \end{matrix}, \quad \mathbf{A}_R = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 1 & 2 & 3 \\ B & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ C & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{matrix}$$

A continuación, tenemos

$$\text{Suma de la columna } \mathbf{A}_L = \{8, 3, 5, 1, 7\}$$

$$\text{Suma de la columna } \mathbf{A}_R = \{1.83, 3.67, 5.5\}$$

Las matrices normalizadas se determinan dividiendo cada entrada de una columna entre la suma de la columna respectiva; es decir,

$$\mathbf{N}_L = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & .125 & .143 & .118 \\ B & .250 & .286 & .294 \\ C & .625 & .571 & .588 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{Promedios de fila} \\ w_{LA} = \frac{.125 + .143 + .118}{3} = .129 \\ w_{LB} = \frac{.250 + .286 + .294}{3} = .277 \\ w_{LC} = \frac{.625 + .571 + .588}{3} = .594 \end{matrix}$$

$$\mathbf{N}_R = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & .545 & .545 & .545 \\ B & .273 & .273 & .273 \\ C & .182 & .182 & .182 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{Promedios de fila} \\ w_{RA} = \frac{.545 + .545 + .545}{3} = .545 \\ w_{RB} = \frac{.273 + .273 + .273}{3} = .273 \\ w_{RC} = \frac{.182 + .182 + .182}{3} = .182 \end{matrix}$$

Los valores w_{LA}, w_{LB}, y w_{LC} (=.129, .277, y .594) dan los pesos de las ubicaciones respectivas de U de A, U de B y U de C, respectivamente. Asimismo, los valores de w_{RA}, w_{RB}, y w_{RC} (= .545, .273, .182) dan los pesos relativos con respecto a la reputación académica de las tres universidades. Éstos son los valores utilizados en la figura 15.1.

Consistencia de la matriz de comparación. En el ejemplo 15.1-2, todas las columnas de las matrices normalizadas **N** y $\mathbf{N}_R$ son idénticas, y las de $\mathbf{N}_L$ no lo son. Esto significa que **A** y $\mathbf{A}_R$ son *consistentes* y que $\mathbf{A}_L$ no lo es.

Consistencia implica juicio racional por parte del tomador de decisiones. Matemáticamente decimos que una matriz de comparación **A** es consistente si

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}, \text{ para todas las } i, j \text{ y } k$$

Por ejemplo, en la matriz $\mathbf{A}_R$ del ejemplo 15.1-2, $a_{13} = 3$ y $a_{12}a_{23} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$. Esta propiedad requiere que todas las columnas (y filas) de $\mathbf{A}_R$ sean linealmente dependientes. En particular, las columnas de cualquier matriz de comparación de 2×2, como **A**, son dependientes por definición, y por consiguiente una matriz de 2×2 siempre es consistente.

Es raro que las matrices de comparación de mayor orden sean siempre consistentes, y se espera un grado de inconsistencia. Para decidir qué nivel de inconsistencia es "tolerable" tenemos que desarrollar una medida cuantificable de consistencia para la matriz de comparación **A**. En el ejemplo 15.1-2 vimos que una matriz consistente **A** produce una matriz normalizada **N** en la cual todas las columnas son idénticas; es decir,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \ldots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \ldots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n & w_n & \ldots & w_n \end{pmatrix}$$

La matriz de comparación original **A** puede determinarse a partir de **N** mediante un proceso de retroceso que divide los elementos de la columna i entre w_i; es decir,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicado por $\mathbf{A}$ por $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, A es consistente si,

$$\mathbf{Aw} = n\mathbf{w}$$

Para el caso en que $\mathbf{A}$ no sea consistente, el peso relativo, w_i, está dado aproximadamente por el promedio de los n elementos de la fila i en la matriz normalizada $\mathbf{N}$ (vea el ejemplo 15.1-2). Si $\overline{\mathbf{w}}$ es el vector de los promedios calculados, se puede demostrar que

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{w}} = n_{\text{máx}}\overline{\mathbf{w}}, n_{\text{máx}} \geq n$$

En este caso, cuanto más se acerca $n_{\text{máx}}$ a n, más consistente es la matriz de comparación $\mathbf{A}$. Basado en esta observación, el PJA calcula la **razón de consistencia** como

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

donde

$$CI = \text{Índice de consistencia } \mathbf{A}$$

$$= \frac{n_{\text{máx}} - n}{n - 1}$$

$$RI = \text{Consistencia aleatoria de } \mathbf{A}$$

$$= \frac{1.98(n - 2)}{n}$$

El índice de consistencia aleatoria, RI, se determina empíricamente como el promedio CI de una muestra grande de matrices de comparación $\mathbf{A}$ generadas al azar.

Si $CR \leq .1$, el nivel de inconsistencia es aceptable. De lo contrario, la inconsistencia es alta, y quizás el tomador de decisiones tenga que revisar las estimaciones de los elementos a_{ij} para obtener una mejor consistencia.

El valor de $n_{\text{máx}}$ se calcula a partir de $\mathbf{A}\overline{\mathbf{w}} = n_{\text{máx}}\overline{\mathbf{w}}$ observando que la i-ésima ecuación es

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{w}_j = n_{\text{máx}}\overline{w}_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

Dado que $\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i = 1$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{w}_j\right) = n_{\text{máx}}\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_i = n_{\text{máx}}$$

Esto significa que el valor de $n_{\text{máx}}$ es igual a la suma de los elementos de la columna del vector $\mathbf{A}\overline{\mathbf{w}}$.

Ejemplo 15.1-3

En el ejemplo 15.1-2, la matriz $\mathbf{A}_L$ es inconsistente porque las columnas de su $\mathbf{N}_L$ no son idénticas. Para probar la consistencia de $\mathbf{N}_L$, comenzamos calculando $n_{\text{máx}}$. Por el ejemplo 15.1.2, tenemos

$$\overline{w}_1 = .129, \overline{w}_2 = .277, \overline{w}_3 = .594$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{A}_L\overline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} .129 \\ .277 \\ .594 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3863 \\ 0.8320 \\ 1.7930 \end{pmatrix}$$

$$n_{\text{máx}} = .3863 + .8320 + 1.7930 = 3.0113$$

Ahora, con $n = 3$,

$$CI = \frac{n_{\text{máx}} - n}{n - 1} = \frac{3.0113 - 3}{3 - 1} = .00565$$

$$RI = \frac{1.98(n - 2)}{n} = \frac{1.98 \times 1}{3} = .66$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{.00565}{.66} = .00856$$

Ya que $CR < .1$, el nivel de inconsistencia en $\mathbf{A}_L$ es aceptable.

Momento de Excel

Los datos introducidos por el usuario controlan la plantilla *excelAHP.xls* y puede manejar matrices de comparación de tamaño 8 × 8 o menor. La figura 15.3 demuestra la aplicación del modelo al ejemplo 15.1-2 (las columnas F:I y las filas 10:13 están ocultas para conservar espacio). Las matrices de comparación del problema se ingresan *una por una* en la sección (superior) de datos de entrada de la hoja de cálculo. El orden en el cual se ingresan las matrices de comparación no es importante, aunque tiene más sentido considerarlas en su orden jerárquico natural.

La sección de resultados (inferior) de la hoja de cálculo proporciona la matriz normalizada asociada y su relación de consistencia, *CR*.[1] Los pesos, w, se copian de la columna J y se pegan en el área de resumen de la solución (la sección derecha de la hoja de cálculo). Recuerde utilizar Pegado especial ⇒ Valores cuando realice este paso para garantizar un registro permanente. El proceso se repite hasta que todos los pesos de todas las matrices de comparación se guardan en el área de resumen de la solución que comienza en la columna *K*.

[1]Los resultados más precisos de la hoja de cálculo difieren de los ejemplos 15.1.2 y 15.1.3, debido a la aproximación redondeada manual.

	A	B	C	D	E	J	K	L	M	N
1	AHP-Analytic Hierarchy Process									
2	Input: Comparison matrix						Solution summary			
3	Matrix name:	AL						A		
4	Matrix size=	3	<<Maximum 8				R	0.83333		
5	Matrix data:	UA	UB	UC			L	0.16667		
6	UA	1	0.5	0.2				AR		AL
7	UB	2	1	0.5			UA	0.54545	UA	0.1285
8	UC	5	2	1			UB	0.27273	UB	0.27661
9							UC	0.18182	UC	0.59489
14	Col sum	8	3.5	1.7						
15	Output: Normalized matrix									
16		nMax=	3.00746	CR=	0.0056					
17		UA	UB	UC		Weight	Final ranking			
18	UA	0.12500	0.14286	0.11765		0.12850		UA= 0.47596		
19	UB	0.25000	0.28571	0.29412		0.27661		UB= 0.27337		
20	UC	0.62500	0.57143	0.58824		0.59489		UC= 0.25066		

FIGURA 15.3

Solución del ejemplo 15.1-2 obtenida con Excel (archivo *excelAHP.xls*)

En la figura 15.3, la calificación final se da en las celdas (K18:K20). La fórmula en la celda K18 es

= $L$4*$L7 + $L$5*$N7

Esta fórmula proporciona el peso compuesto de la alternativa U de A y se copia en las celdas K19 y K20 para evaluar las alternativas U de B y U de C. Observe por la fórmula en K18 que la referencia a la alternativa U de A debe estar fija en la *columna* (es decir, $L7 y $N7), mientras que *todas* las demás referencias deben estar fijas en la *fila y columna* (o bien $L$4 y $L$5). La validez de las fórmulas copiadas requiere que se apilen los pesos *alternativos* (fijos en la columna) de cada matriz en una *sola* columna (sin celdas vacías que intervengan). En la figura 15.3, los pesos A_R están en la columna L y los pesos A_L están en la columna N. No hay restricciones en la colocación de los pesos A porque son columna y fila fijas en la fórmula.

Puede refinar la fórmula en K18 para capturar los nombres de las alternativas aplicando

= $K7&" = "&TEXT($L$4*$L7 + $L$5*$ N7,"#### 0.00000")

El procedimiento para evaluar alternativas puede ampliarse a cualquier cantidad de niveles de jerarquía. Una vez que desarrolla la fórmula correctamente para la primera alternativa, la misma fórmula se copia en las celdas restantes. Recuerde que *todas* las referencias a celdas en la fórmula deben estar fijas en columna y fila, excepto las referencias a las alternativas, las cuales deben estar fijas sólo en la columna. El problema 1, conjunto 15.1b, le pide que desarrolle la fórmula para un problema de 3 niveles.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.1B[2]

1. Considere las dos jerarquías del problema 1, conjunto 15.1a. Copie los pesos en un orden lógico en la sección de resumen de solución de la hoja de cálculo *excelAHP.xls*, luego de-

[2]La hoja de cálculo *excelAHP.xls* debe resultar útil para verificar sus cálculos.

sarrolle la fórmula para evaluar la primera alternativa, U de A, y cópiela para evaluar las dos alternativas restantes.

*2. El departamento de personal en C&H ha reducido la búsqueda de una nueva contratación a tres candidatos: Steve (S), Jane (J), y Maisa (M). La selección final se basa en tres criterios: entrevista personal (I), experiencia (E), y referencias (R). El departamento utiliza la matriz **A** (dada a continuación) para establecer las preferencias entre los tres criterios. Después de entrevistar a los tres candidatos y compilar los datos con respecto a sus experiencias y referencias, se construyen las matrices $\mathbf{A}_I$, $\mathbf{A}_E$ y $\mathbf{A}_R$. ¿Cuál de los tres candidatos debe ser contratado? Evalúe la consistencia de los datos.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ I \\ E \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} I & E & R \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{A}_I = \begin{array}{c} \\ S \\ J \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{A}_E = \begin{array}{c} \\ S \\ J \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{A}_R = \begin{array}{c} \\ S \\ J \\ M \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} S & J & M \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Kevin y June Park (K y J) están en el proceso de comprar una nueva casa. Tres casas están disponibles: A, B y C. Los Park acordaron dos criterios para seleccionar la casa, como cantidad de trabajo de jardinería (Y), y cercanía al lugar de trabajo (W), para lo cual desarrollaron las siguientes matrices de comparación. Califique las tres casas en orden de prioridad, y calcule la relación de consistencia para cada matriz.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ K \\ J \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} K & J \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{A}_K = \begin{array}{c} \\ Y \\ W \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} Y & W \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{A}_J = \begin{array}{c} \\ Y \\ W \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} Y & W \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{A}_{KY} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{A}_{KW} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{A}_{JY} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ \frac{1}{4} & 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \mathbf{A}_{JW} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

*4. Un nuevo autor establece tres criterios para seleccionar un editor para un libro de texto de Investigación de Operaciones: porcentaje de regalías (R), comercialización (M), y pago anticipado (A). Dos editores, H y P, expresaron su interés en el libro. Utilizando las siguientes matrices de comparación clasifique a los dos editores y evalúe la consistencia de la decisión.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & R & M & A \\ R & 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ M & 1 & 1 & \frac{1}{5} \\ A & 4 & 5 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_R = \begin{matrix} & H & P \\ H & 1 & 2 \\ P & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_M = \begin{matrix} & H & P \\ H & 1 & \frac{1}{2} \\ P & 2 & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_A = \begin{matrix} & H & P \\ H & 1 & 1 \\ P & 1 & 1 \end{matrix}$$

5. Un profesor de ciencias políticas desea predecir el resultado de elección de la mesa directiva de la escuela. Tres candidatos, Ivy (I), Bahrn (B) y Smith (S), se postularon para el puesto. Existen tres categorías de votantes: izquierda (L), centro (C) y derecha (R). Se juzga a los candidatos con base en tres factores: experiencia académica (E), postura ante los problemas (S) y carácter personal (P). Las siguientes son las matrices de comparación para la primera jerarquía de izquierda, centro y derecha.

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & L & C & R \\ L & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ C & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ R & 2 & 5 & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_L = \begin{matrix} & E & S & P \\ E & 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ S & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ P & 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_C = \begin{matrix} & E & S & P \\ E & 1 & 2 & 2 \\ S & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ P & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_R = \begin{matrix} & E & S & P \\ E & 1 & 1 & 9 \\ S & 1 & 1 & 8 \\ P & \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 1 \end{matrix}$$

El profesor generó nueve matrices de comparación más para la segunda jerarquía que representa experiencia (E), postura ante los problemas (S), y carácter personal (P). Luego se utilizó el PJA para reducir las matrices a los siguientes pesos relativos.

	Izquierda			Centro			Derecha		
Candidato	*E*	*S*	*P*	*E*	*S*	*P*	*E*	*S*	*P*
Ivy	.1	.2	.3	.3	.5	.2	.7	.1	.3
Bahrn	.5	.4	.2	.4	.2	.4	.1	.4	.2
Smith	.4	.4	.5	.3	.3	.4	.2	.5	.5

Determine el candidato ganador y evalúe la consistencia de la decisión.

6. Un distrito escolar enfrenta la imperiosa necesidad de reducir gasto para cumplir con las nuevas restricciones de presupuesto en sus escuelas primarias. Hay dos opciones disponibles: Eliminar el programa de educación física (E), o el de música (M). El superintendente formó un comité con igual representación de votos de la Mesa Directiva (S) y la Asociación de Padres y Profesores (P) para estudiar la situación y hacer una recomendación. El comité ha decidido estudiar el problema desde el punto de vista de restricción al presupuesto (B) y de necesidades de los estudiantes (N). El análisis produjo las siguientes matrices de comparación:

$$\mathbf{A}_s = \begin{matrix} & B & N \\ B & 1 & 1 \\ N & 1 & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_P = \begin{matrix} & B & N \\ B & 1 & \frac{1}{2} \\ N & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_{SB} = \begin{matrix} & E & M \\ E & 1 & \frac{1}{2} \\ M & 2 & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_{SN} = \begin{matrix} & E & M \\ E & 1 & \frac{1}{3} \\ M & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_{PB} = \begin{matrix} & E & M \\ E & 1 & \frac{1}{3} \\ M & 3 & 1 \end{matrix} \quad \mathbf{A}_{PN} = \begin{matrix} & E & M \\ E & 1 & 2 \\ M & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}$$

Analice el problema de decisión y haga recomendaciones.

7. Una persona va a comprar un automóvil y redujo las opciones a tres modelos: $M1$, $M2$ y $M3$. Los factores para decidir incluyen el precio de compra (PP), el costo de mantenimiento (MC), el costo de manejo en la ciudad (RD). La siguiente tabla proporciona los datos pertinentes durante 3 años de operación:

Modelo del automóvil	PP($)	MC($)	CD($)	RD($)
$M1$	6,000	1800	4500	1500
$M2$	8,000	1200	2250	750
$M3$	10,000	600	1125	600

Utilice los datos de costos para desarrollar las matrices de comparación. Evalúe la consistencia de las matrices, y determine la selección del modelo.

15.2 TOMA DE DECISIONES EN CONDICIONES DE RIESGO

En condiciones de riesgo, los beneficios asociados con cada alternativa de decisión están representados por distribuciones de probabilidad, y la decisión puede basarse en el *criterio de valor esperado,* maximización de la utilidad esperada o la minimización del costo esperado. En ocasiones, el criterio del valor esperado se modifica para tener en cuenta otras situaciones, como se describirá más adelante en esta sección.

Aplicación de la vida real. Límites en las reservaciones de un hotel

El hotel La Posada cuenta con 300 habitaciones. Su clientela incluye tanto a viajeros por negocios como por placer. Las tarifas de las habitaciones tienen descuentos, sobre todo para los viajeros por placer. Los viajeros por negocios, que suelen tardarse en reservar sus habitaciones, pagan la tarifa completa. La Posada establece un *límite en la reservación* de habitaciones con tarifas descontadas para aprovechar la tarifa completa que pagan los clientes por negocios. El caso 10 en el capítulo 26 en el sitio web utiliza el análisis del árbol de decisiones para determinar el límite de las reservaciones.

15.2.1 Árbol de decisiones. Basado en el criterio del valor esperado

El criterio del valor esperado busca maximizar la utilidad esperada (promedio) o la minimización del costo esperado. Los datos del problema asumen que la retribución (o costo) asociado con cada alternativa de decisión es probabilística.

Análisis con árbol de decisiones. El siguiente ejemplo considera situaciones de decisión simples con una cantidad finita de alternativas de decisión y matrices explícitas de retribución.

Ejemplo 15.2-1

Suponga que desea invertir $10,000 en el mercado de valores adquiriendo acciones en una de dos compañías: A y B. Las acciones de la compañía A, aun cuando son riesgosas, podrían redituar 50% durante el siguiente año. Si las condiciones del mercado de valores no son favorables (es decir, un mercado “bajista”) las acciones pueden perder 20% de su valor. La compañía B proporciona inversiones seguras con 15% de rendimiento en un mercado “alcista” y de sólo 5% en un mercado “bajista”. Todas las publicaciones que ha consultado (¡y siempre hay una abundancia de ellas al final del año!) pronostican una probabilidad de 60% de un mercado “alcista” y 40% de un mercado “bajista”. ¿Cómo debe invertir su dinero?

El problema de decisión se resume en la siguiente tabla.

	Rendimiento a 1 año de la inversión de 10,000	
Alternativa de decisión	*Mercado “alcista” ($)*	*Mercado “bajista” ($)*
Acciones de la compañía A	5000	−2000
Acciones de la compañía B	1500	500
Probabilidad de ocurrencia	.6	.4

El problema también puede representarse como un **árbol de decisiones** como se muestra en la figura 15.4. Se utilizan dos tipos de nodos en el árbol: Un cuadrado (☐) representa un *punto de decisión*, y un círculo (O) representa un *evento aleatorio.* Por lo tanto, las dos ramas que emanan del punto de decisión 1 representan las dos alternativas de invertir en la acción A o en la acción B. A continuación, las dos ramas que emanan de los eventos aleatorios 2 y 3 representan los mercados “alcista” y “bajista” con sus respectivas probabilidades y retribuciones.

Según la figura 15.4, las retribuciones esperadas a 1 año son

$$\text{Acción } A = (\$5000 \times .6) + (-2000 \times .4) = \$2200$$

$$\text{Acción } B = (\$1500 \times .6) + (\$500 \times .4) = \$1100$$

Se elige la acción A porque produce un rendimiento esperado más alto.

Comentarios. En la terminología de teoría de la decisión, los mercados probabilísticos “alcista” y “bajista” se llaman **estados de naturaleza**. Por lo general, un problema de decisión puede incluir n estados de naturaleza y m alternativas. Si $p_j(>0)$ es la probabilidad de ocurrencia del estado j y a_{ij} es la retribución de la alternativa i, dado el estado $j (i = 1, 2,\ldots, m; j = 1, 2,\ldots, n)$, entonces la retribución esperada de la alternativa i se calcula como

$$EV_i = a_{i1} p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n, i = 1, 2, \ldots, n$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

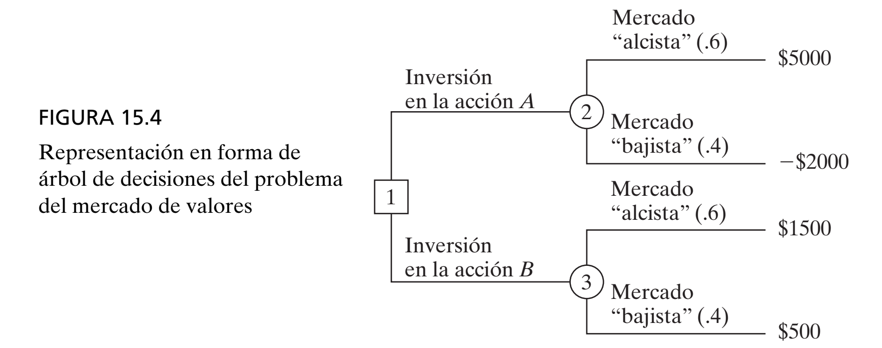


FIGURA 15.4
Representación en forma de árbol de decisiones del problema del mercado de valores

La mejor alternativa es la asociada con $EV^* = \text{máx}_i\{EV_i$ en el caso de utilidad o $EV^* = \text{mín}_i\{EV_i\}$ en el caso de pérdida.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.2A

1. Lo invitaron a participar en el juego de la Rueda de la Fortuna en la televisión. La rueda funciona electrónicamente con dos botones para producir un giro duro (H) y un giro suave (S). La rueda está dividida en dos regiones semicirculares, una blanca (W) y una roja (R). Le dijeron que la rueda está diseñada para que se detenga 30% de las veces en la región blanca. La retribución del juego es

	W	R
H	\$800	\$200
S	−\$2500	\$1000

Desarrolle un árbol de decisiones asociado, y determine un curso de acción basado en el criterio del valor esperado.

***2.** Farmer McCoy puede sembrar maíz o soya (soja). Las probabilidades de que los precios de la siguiente cosecha suban, no cambien, o bajen son .25, .30 y .45, respectivamente. Si los precios suben, la cosecha de maíz redituará un ingreso neto de \$30,000 y la de soya redituará un ingreso neto de \$10,000. Si los precios no cambian, McCoy (apenas) saldrá a mano. Pero si los precios bajan, las cosechas de maíz y soya sufrirán pérdidas de \$35,000 y \$5000, respectivamente.

(a) Represente el problema de McCoy como un árbol de decisiones.

(b) ¿Cuál cosecha debe sembrar McCoy?

3. Se le presenta la oportunidad de invertir en tres fondos mutuos: de servicios, de crecimiento agresivo, y global. El valor de su inversión cambiará según las condiciones del mercado. Hay 10% de probabilidades de que el mercado baje; 50% de que permanezca moderado, y 40% de que funcione bien. La siguiente tabla proporciona el cambio porcentual del valor de la inversión en las tres condiciones:

	Porcentaje de rendimiento sobre la inversión		
Alternativa	*Mercado bajista (%)*	*Mercado moderado (%)*	*Mercado alcista (%)*
Servicios	+5	+7	+8
Crecimiento agresivo	−10	+5	+30
Global	+2	+7	+20

(a) Represente el problema como un árbol de decisiones.

(b) ¿Cuál fondo mutuo debe seleccionar?

4. Hay la oportunidad de invertir su dinero en un bono que rinde 7.5% y que se vende a su precio nominal, o en una acción de crecimiento agresivo que paga sólo 1% de dividendo. Si ocurre inflación, la tasa de interés subirá a 8%, en cuyo caso el valor principal del bono bajará 10% y el valor de la acción bajará 20%. Si la recesión se materializa, la tasa de interés bajará a 6%. En este caso, se espera que el valor principal del bono baje 5%, y que el valor de la acción suba 20%. Si la economía no cambia, el valor de la acción subirá 8% y el valor principal del bono no cambiará. Los economistas estiman 20% de probabilidad

de inflación y 15% de recesión. Usted está basando su decisión de inversión en las condiciones económicas del siguiente año.

(a) Represente el problema como un árbol de decisiones.

(b) ¿Invertiría en acciones o en bonos?

5. AFC está a punto de lanzar su nueva comida rápida Wings 'N Things a nivel nacional. El departamento de investigación está convencido de que Wings 'N Things será un gran éxito y desea presentarlo de inmediato en todas las tiendas de distribución de AFC sin publicidad. El departamento de mercadotecnia ve las "cosas" de forma diferente y desea lanzar una intensa campaña publicitaria. La campaña publicitaria costará $100,000, y hay 70% de probabilidades de que tenga éxito con ingresos de $950,000. Si la campaña no tiene éxito, el ingreso estimado bajará a $200,000. Si no se utiliza publicidad, el ingreso se estima en $400,000 con una probabilidad de .8 si los clientes son receptivos al nuevo producto, y de $200,000 con probabilidades de .2 si no lo son.

(a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.

(b) ¿Qué curso de acción debe seguir AFC al lanzar el nuevo producto?

***6.** Se lanza al aire una moneda tres veces sucesivas. Recibe $1.00 por cada cara ($H$) que salga y $.25 más por cada dos caras sucesivas que aparezcan (recuerde que HHH incluye dos conjuntos de HH). Sin embargo, regresa $1.10 por cada cruz que salga. Tiene las opciones de jugar o no jugar el juego.

(a) Desarrolle el árbol de decisiones para el juego.

(b) ¿Le favorecería la decisión de continuar el juego?

7. Se le presenta la oportunidad de participar en el siguiente juego en un casino. Se lanza un dado dos veces, con cuatro resultados: (1) ambos lanzamientos muestran el mismo número par; (2) ambos lanzamientos muestran el mismo número impar; (3) los dos lanzamientos muestran un número par seguido por uno impar o un número impar seguido por uno par, y 4) todos los demás resultados. Le permiten apostar su dinero en exactamente dos resultados con cantidades en dólares iguales. Por ejemplo, puede apostar cantidades de dólares iguales a un lanzamiento par (resultado 1) y un lanzamiento impar (resultado 2). El premio por cada dólar que apueste es de $2.00 por el primer resultado, $1.95 por el segundo y tercer resultados, y $1.50 por el cuarto resultado.

(a) Desarrolle el árbol de decisiones para el juego.

(b) ¿Cuál de las dos opciones tomaría?

(c) ¿Alguna vez resultó ganador en este juego?

8. Acme Manufacturing produce lotes de aparatos con 0.8%, 1%, 1.2% y 1.4% de aparatos defectuosos de acuerdo con las probabilidades respectivas, 0.4, 0.3, 0.25 y 0.05. Tres clientes, A, B, y C están contratados para recibir lotes con no más de 0.8%, 1.2% y 1.4% de aparatos defectuosos, respectivamente. Si los aparatos defectuosos resultan ser más que los contratados, se penaliza a Acme con $100 por cada 0.1% de incremento. Si Acme surte lotes con mayor calidad que la requerida le cuesta $50 por cada 0.1% por debajo de las especificaciones. Suponga que no se inspeccionan los lotes antes de su envío.

(a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.

(b) ¿Cuál de los tres clientes debe tener la más alta prioridad para recibir su pedido?

9. TriStar planea abrir una nueva planta en Arkansas. La compañía puede abrir una planta de tamaño normal ahora o una planta pequeña que puede ampliarse 2 años más tarde si se garantiza una demanda alta. El horizonte de tiempo para el problema de decisión es de 10 años. TriStar estima que las probabilidades de demandas altas y bajas durante los siguientes 10 años son .75 y .25, respectivamente. El costo de construcción dentro de

2 años es de $4.2 millones. El ingreso por la operación durante los siguientes 10 años se da en la tabla siguiente:

	Estimaciones del ingreso anual (en $1000)	
Alternativa	*Demanda alta*	*Demanda baja*
Planta de tamaño normal ahora	1000	300
Planta pequeña ahora	250	200
Planta ampliada en 2 años	900	200

(a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado, si después de 2 años TriStar tiene la opción de ampliar o no la planta pequeña.

(b) Desarrolle una estrategia de construcción para TriStar durante los siguientes 10 años. (Por sencillez, ignore el valor del dinero con el tiempo.)

10. Resuelva de nuevo el problema 9, suponiendo que las decisiones se toman considerando el valor del dinero con el tiempo a una tasa de interés anual de 10%. [*Nota*: Necesita tablas de interés compuesto para resolver este problema. Puede utilizar la función NPV (i,R) de Excel para calcular el valor actual de los flujos de efectivo en el rango R, dada una tasa de interés i. NPV asume que cada flujo de efectivo ocurre al final del año.]

11. Resuelva una vez más el problema 9, suponiendo que la demanda puede ser alta, media y baja con probabilidades de 0.7, 0.2 y 0.1, respectivamente. La ampliación de una planta pequeña ocurrirá sólo si la demanda en los primeros 2 años es alta. La siguiente tabla proporciona estimaciones del ingreso anual. Ignore el valor del dinero con el tiempo.

	Estimaciones del ingreso anual (en $1000)		
Alternativa	*Demanda alta*	*Demanda mediana*	*Demanda baja*
Planta de tamaño normal ahora	1000	500	300
Planta pequeña ahora	400	280	150
Planta ampliada dentro de 2 años	900	600	200

***12.** Sunray Electric Coop utiliza una flotilla de 20 camiones para dar servicio a su red eléctrica. La compañía desea desarrollar un programa de mantenimiento preventivo para la flotilla. La probabilidad de una avería en el año 1 es cero. Durante el año 2, la probabilidad de una avería es de 0.03 y se incrementa 0.01 en los años del 3 al 10. Después del año 10, la probabilidad de una avería se mantiene constante en 0.13. El costo de mantenimiento por camión es de $200 por una avería aleatoria y de $75 por un mantenimiento programado.

(a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.

(b) Determine el periodo óptimo (en meses) entre mantenimientos preventivos sucesivos.

13. La demanda diaria de hogazas de pan en una tienda de abarrotes se especifica mediante la siguiente distribución de probabilidades:

n	100	150	200	250	300
p_n	.20	.25	.30	.15	.10

La tienda compra una hogaza a 55 centavos y la vende a $1.20 cada una. Las hogazas que no se venden al final del día se liquidan a 25 centavos cada una. Suponga que el nivel de las existencias se limita a uno de los niveles de demanda especificado para p_n.

(a) Desarrolle el árbol de decisión asociado.

(b) ¿Cuántas hogazas deben tenerse en existencia diariamente?

14. En el problema 13, suponga que la tienda desea ampliar el problema de decisión a un horizonte de 2 días. Las alternativas para el segundo día dependen de la demanda en el primer día. Si la demanda en el día 1 es igual a la cantidad en existencia, la tienda continuará pidiendo la misma cantidad para el día 2; si excede la cantidad en existencia, la tienda puede pedir cualquiera de las existencias de alto nivel; y si es menor que la cantidad en existencia, la tienda puede pedir cualquiera de la existencia de bajo nivel. Desarrolle el árbol de decisiones y determine la estrategia de colocación de pedidos óptima.

***15.** Una máquina automática produce μ (miles de) unidades de un producto por día. A medida que α se incrementa, la proporción de unidades defectuosas, p, se eleva de acuerdo con la siguiente función de densidad de probabilidad

$$f(p) = \begin{cases} \alpha p^{\alpha-1}, & 0 \leq p \leq 1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Cada unidad defectuosa incurre en una pérdida de $50. Una unidad en buen estado produce una utilidad de $5.

(a) Desarrolle un árbol de decisiones para este problema.

(b) Determine el valor de α que maximice la utilidad esperada.

16. El diámetro externo, d, de un cilindro se procesa con una máquina automática con límites de tolerancia superiores e inferiores de $d + t_U$ y $d - t_L$. El proceso de producción sigue una distribución normal con media μ y desviación estándar s. Los cilindros de dimensiones excedidas se vuelven a trabajar a un costo de c_1 dólares cada uno. Los cilindros de dimensiones menores se desechan a un costo de c_2 dólares cada uno. Desarrolle el árbol de decisiones, y determine el ajuste d óptimo para la máquina.

17. *Cohan and Associates (1984).* La dirección de bosques de ahora aplica incendios controlados para reducir los riesgos de incendio y estimular el crecimiento de nuevos árboles. La dirección tiene la opción de posponer o planear una quema. En una extensión de bosque específica, si se pospone una quema, se incurre en un costo administrativo general de $300. Si se planea una quema controlada, hay 50% de probabilidades de que el buen tiempo prevalecerá y que la quema costará $3200. Los resultados de la quema pueden ser exitosos con probabilidad de .6, o marginales con probabilidad de .4. La ejecución exitosa producirá un beneficio estimado de $6000, y la ejecución marginal proporcionará sólo $3000 en beneficios. Si el tiempo es malo, la quema se cancelará y se incurrirá en un costo de $1200 sin beneficios.

(a) Desarrolle un árbol de decisiones para determinar si la quema debe planearse o posponerse.

(b) Estudie la sensibilidad de la solución a los cambios de la probabilidad de buen tiempo.

18. *Rappaport* (1967). Un fabricante ha utilizado programación lineal para determinar la combinación de producción óptima de los varios modelos de televisiones que fabrica. Información reciente recibida por el fabricante indica que hay 40% de probabilidad de que el proveedor de un componente utilizado en uno de los modelos pueda elevar el precio en $35. Por tanto, el fabricante puede seguir utilizando la combinación de productos (óptima) original (A1), o utilizar una nueva combinación (óptima) con base en el componente de mayor precio (A2). Desde luego, la acción A1 es ideal si el precio no se eleva, y la acción A2 también será ideal si el precio se eleva. La siguiente tabla proporciona la uti-

lidad resultante por mes como una función de la acción tomada y el resultado aleatorio con respecto al precio del componente.

	Incremento de precio (01)	Sin incremento de precio (02)
Combinación original (A1)	$400,000	$295,500
Combinación nueva (A2)	$372,000	$350,000

(a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado, y determine la acción que debe adoptarse.

(b) El fabricante puede invertir $1000 para obtener más información sobre si el precio se incrementará o no. Esta información dice que hay 58% de probabilidades de que el incremento del precio sea de .9 y 42% de que sea de .3. ¿Recomendaría la inversión adicional?

*__19.__ *Criterio del nivel de aspiración.* Acme Manufacturing utiliza un producto químico en uno de sus procesos. La vida de anaquel es de un mes, y cualquier cantidad sobrante se destruye. La cantidad, x, en galones del producto químico utilizada por Acme está representada por la siguiente distribución:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{200}{x^2}, & 100 \le x \le 200 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

El consumo real del producto químico ocurre instantáneamente al inicio del mes. Acme desea determinar el nivel del producto químico que satisfaga dos criterios conflictivos (o niveles de aspiración): La cantidad excedente mensual no debe superar los 20 galones, y la cantidad faltante promedio mensual no debe exceder de 40 galones.

15.2.2 Variantes del criterio del valor esperado

Esta sección aborda dos temas relacionados con el criterio del valor esperado: la determinación de *probabilidades a posteriori* basada en experimentación, y el uso de la *utilidad* contra el valor real del dinero.

Probabilidades a posteriori (de Bayes). Las probabilidades utilizadas en el criterio del valor esperado se suelen estimar a partir de datos históricos (vea la sección 14.5). En algunos casos la precisión de estas estimaciones puede mejorarse por medio de experimentación adicional. Las probabilidades resultantes se conoce como **probabilidades a posteriori (o de Bayes)**, en contraste con las **probabilidades a priori** determinadas a partir de datos duros sin procesar.

Aplicación de la vida real. Problema de Casey: Interpretación y evaluación de un nuevo examen

Un examen de detección de un recién nacido, de nombre Casey, revela una deficiencia de la enzima C14:1. La enzima se requiere para digerir una forma particular de grasas de cadena larga, y su ausencia podría conducir a una enfermedad grave o a una muerte misteriosa (catalogada comúnmente bajo el síndrome de muerte repentina infantil, o SIDS por sus siglas en inglés). El examen se había administrado antes a aproximadamente 13,000 recién nacidos, y Casey fue el primero en dar positivo. Aun cuando el examen de detección por sí mismo no constituye un diagnóstico definitivo, la extrema rareza de la condición llevó a los doctores a concluir que había 80-90% de probabili-

dades de que padeciera esta deficiencia. Dado que Casey dio positivo, se utiliza la probabilidad a posteriori de Bayes para valorar si la bebé sufre o no de deficiencia de C14:1. La situación se detalla en el caso 11, capítulo 26 en el sitio web.

Ejemplo 15.2-2

Este ejemplo demuestra cómo se modifica el criterio del valor esperado para aprovechar las probabilidades a posteriori. En el ejemplo 15.2-1, las probabilidades (anteriores) de .6 y .4 de un mercado "alcista" y un mercado "bajista" se determinan a partir de publicaciones financieras disponibles. Suponga que en lugar de depender únicamente de estas publicaciones, usted decidió conducir una investigación más "personal" al consultar a un amigo que se desempeña bien en el mercado de valores. El amigo cuantifica una recomendación de invertir "a favor/o en contra", de la siguiente manera: En un mercado "alcista", hay 90% de probabilidades de que la recomendación sea "a favor". Se reduce a 50% en un mercado "bajista". ¿Cómo afecta la información adicional a la decisión?

La afirmación del amigo proporciona probabilidades condicionales de las recomendaciones "a favor" y "en contra" dado que los estados de la naturaleza son mercados "alcista" y "bajista". Defina

v_1 = Voto "a favor"
v_2 = Voto "en contra"
m_1 = Mercado "alcista"
m_2 = Mercado "bajista"

Por lo tanto, la afirmación del amigo se escribe en la forma de enunciados de probabilidad como

$$P\{v_1|m_1\} = .9, P\{v_2|m_1\} = .1$$
$$P\{v_1|m_2\} = .5, P\{v_2|m_2\} = .5$$

Con esta representación el problema de decisión se resume como:

1. Si la recomendación del amigo es "a favor", ¿invertiría en la acción A o en la acción B?
2. Si la recomendación del amigo es "en contra", ¿invertiría en la acción A o en la acción B?

El árbol de decisiones que aparece en la figura 15.5 representa el problema. El nodo 1 es un evento aleatorio que representa las posibilidades "a favor" y "en contra". Los nodos 2 y 3 son puntos de decisión para seleccionar entre las acciones A y B, dadas las recomendaciones "a favor" y "en contra", respectivamente. Por último, los nodos 4 a 7 son eventos aleatorios que representan los mercados "alcista" y "bajista".

Para evaluar las diferentes alternativas en la figura 15.5 es necesario calcular las probabilidades *a posteriori* $P\{m_i|v_j\}$ mostradas en las ramas m_1 y m_2 de los nodos 4, 5, 6 y 7. Estas probabilidades a posteriori toman en cuenta la información adicional proporcionada por la recomendación "a favor" o "en contra" y se calculan de acuerdo con los siguientes pasos generales:

Paso 1. Resuma las probabilidades condicionales $P\{v_j|m_i\}$ en la siguiente forma tabular:

	v_1	v_2
m_1	.9	.1
m_2	.5	.5

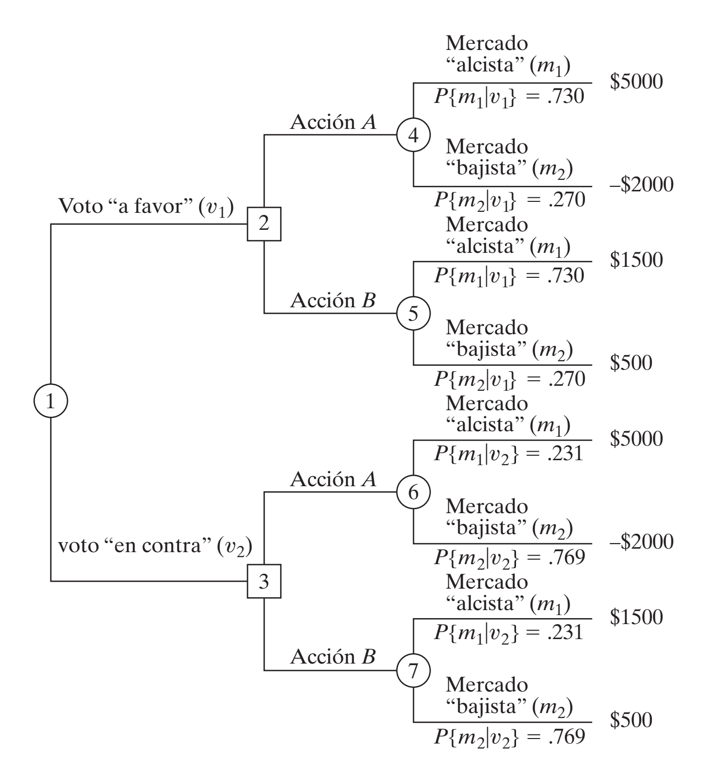


FIGURA 15.5

Árbol de decisiones para el problema del mercado de valores con probabilidades a posteriori

Paso 2. Calcule las probabilidades conjuntas como

$$P\{m_i, v_j\} = P\{v_j|m_i\}P\{m_i\}, \text{ para todas las } i \text{ y } j$$

Dadas las probabilidades a *priori* $P\{m_1\} = .6$ y $P\{m_2\} = .4$, las probabilidades conjuntas se determinan multiplicando la primera y segunda filas de la tabla en el paso 1 por .4, respectivamente; es decir,

	v_1	v_2
m_1	.54	.06
m_2	.20	.20

La suma de todas las entradas en la tabla es igual a 1.

Paso 3. Calcule las probabilidades absolutas como

$$P\{v_j\} = \sum_{\text{todas } i} P\{m_i, v_j\}, \text{ para todas las } j$$

Estas probabilidades son las sumas en las columnas de la tabla del paso 2; es decir,

$P\{v_1\}$	$P\{v_2\}$
.74	.26

Paso 4. Determine las probabilidades a posteriori deseadas como

$$P\{m_i|v_j\} = \frac{P\{m_i, v_j\}}{P\{v_j\}}$$

Estas probabilidades se calculan dividiendo cada columna en la tabla del paso 2 entre la suma en la columna correspondiente en la tabla del paso 3, lo cual da

	v_1	v_2
m_1	.730	.231
m_2	.270	.769

Éstas son las probabilidades utilizadas en la figura 15.5 y son diferentes de las probabilidades previas $P\{m_1\} = .6$ y $P\{m_2\} = .4$.

Ahora ya estamos listos para evaluar las alternativas basados a partir de las retribuciones esperadas para los nodos 4,5,6 y 7; es decir,

Recomendación "A favor"

Acción A en el nodo 4 = $(5000 \times 0.730) + (-2000 \times 0.270) =$ **$3110**

Acción B en el nodo 5 = $(1500 \times 0.730) + (500 \times 0.270) = 1230$

Decisión. Invertir en la acción A.

Recomendación "En contra"

Acción A en el nodo 6 = $(5000 \times 0.231) + (-2000 \times 0.769) = -\$383$

Acción B en el nodo 7 = $(1500 \times 0.231) + (500 \times 0.769) =$ **$731**

Decisión. Invertir en la acción B.

Las decisiones dadas equivalen a decir que las retribuciones esperadas en los nodos de decisión 2 y 3 son $3110 y $731, respectivamente (vea la figura 15.5). Por lo tanto, dadas las probabilidades $P\{v_1\} = 0.74$ y $P\{v_2\} = 0.26$ como se calcularon en el paso 3, podemos calcular la retribución esperada para todo el árbol de decisiones (vea el problema 3, conjunto 15.2b).

Momento de Excel

El archivo *excelBayes.xls* está diseñado para determinar las probabilidades *a posteriori* de matrices de probabilidad previa de tamaños hasta de 10×10 (algunas filas y columnas se ocultaron para conservar espacio). Los datos de entrada incluyen $P\{m\}$ y $P\{v|m\}$. La hoja de cálculo verifica los errores en los datos de entrada y muestra los mensajes de error apropiados.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.2B

1. Los datos en un colegio comunitario muestran que el 75% de los estudiantes que cursaron cálculo en la preparatoria se desempeñan bien, en comparación con el 50% de los que no lo cursaron. Las admisiones para el año académico actual muestran que sólo 30%

de los estudiantes nuevos completaron un curso de cálculo. ¿Cuál es la probabilidad que un estudiante nuevo se desempeñe bien en el colegio?

***2.** Elektra recibe 75% de sus componentes electrónicos del proveedor *A* y el 25% restante del vendedor *B*. El porcentaje de componentes defectuosos provenientes de los proveedores *A* y *B* son 1 y 2%, respectivamente. Cuando se inspeccionó una muestra aleatoria de tamaño 5 de un lote recibido, sólo se encontró una unidad defectuosa. Determine la probabilidad de que el lote se reciba del vendedor *A*. Del vendedor *B.* (*Sugerencia:* La distribución de probabilidad de artículos defectuosos en una muestra es binomial.)

3. En el ejemplo 15.2-2, suponga que tiene la opción de invertir los $10,000 originales en un certificado de depósito seguro que produce 8% de interés. El consejo del amigo es invertir sólo en el mercado de valores.

(a) Desarrolle el árbol de decisión asociado.

(b) ¿Cuál es la decisión óptima en este caso? *(Sugerencia:* Utilice las probabilidades $P\{v_1\}$ y $P\{v_2\}$ dadas en el paso 3 del ejemplo 15.2-2 para determinar el valor esperado de invertir en el mercado de valores.)

***4.** Usted es el autor de la que promete ser una novela exitosa. Tiene la opción de o publicar la novela usted mismo, o por medio de un editor. El editor le ofrece $20,000 por firmar el contrato. Si la novela tiene éxito, venderá 200,000 copias. De lo contrario, venderá sólo 100,000. El editor le paga $1 de regalías por ejemplar. Una investigación del mercado indica que hay 70% de probabilidades de que la novela tenga éxito. Si decide publicarla usted mismo, incurrirá en un costo inicial de $90,000 por la impresión y la comercialización, pero obtendrá una utilidad neta de $2 por cada ejemplar vendido.

(a) Basado en la información dada, ¿aceptaría la oferta del editor, o publicaría usted mismo la novela?

(b) Suponga que contrata a un agente literario para que realice una encuesta en relación con el éxito potencial de la novela. Por experiencia pasada, el agente le aconseja que cuando una novela tiene éxito, la encuesta predecirá el resultado equivocado 20% de las veces. Cuando la novela no tenga éxito, la encuesta predecirá correctamente 85% de las veces. ¿Cómo afectaría esta información su decisión?

5. Considere la situación de decisión de Farmer McCoy en el problema 2, conjunto 15.2a. El granjero tiene la opción adicional de utilizar el terreno como área de pastizales, en cuyo caso está garantizada una retribución de $7500. El granjero también recabó información adicional segura de un corredor de bolsa con respecto al grado de estabilidad de los futuros precios de artículos de consumo. La valoración del agente de "favorable" o "desfavorable" se describe por medio de las siguientes probabilidades condicionales:

$P\{a_j|s_i\} =$

	a_1	a_2
s_1	.85	.15
s_2	.50	.50
s_3	.15	.85

Los símbolos a_1 y a_2 representan las valoraciones "favorable" y "desfavorable", y s_1, s_2 y s_3 representan los cambios "hacia arriba", "iguales", y "hacia abajo" de los futuros precios.

(a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.

(b) Especifique la decisión óptima para el problema.

6. En el problema 5, conjunto 15.2a, suponga que la gerencia de AFC decidió investigar el mercado para su nuevo producto Wings 'N Things en lugares seleccionados. El resultado

de la investigación es o “bueno” (a_1) o “malo” (a_2). La investigación arroja las siguientes probabilidades condicionales y sin campaña publicitaria.

$P\{a_j|v_i\}$ − Con campaña

	a_1	a_2
v_1	.95	.05
v_2	.3	.7

$P\{a_j|w_i\}$ − Sin campaña

	a_1	a_2
w_1	.8	.2
w_2	.4	.6

Los símbolos v_1 y v_2 representan “éxito” y “no éxito”, y w_1 y w_2 representan “receptivo” y no “receptivo”.

(a) Desarrolle el árbol de decisiones asociado.

(b) Determine el mejor curso de acción para AFC.

7. Datos históricos en Acme Manufacturing estiman 5% de probabilidad de que un lote de artefactos sea inaceptable (malo). Un lote malo tiene 15% de artículos defectuosos, y un lote bueno incluye sólo 4% de artículos defectuosos. Si $a = \theta_1$ y $a = \theta_2$ representan un lote bueno y un lote malo, respectivamente, las probabilidades *a priori* se dan como

$$P\{a = \theta_1\} = .95 \text{ y } P\{a = \theta_2\} = .05$$

En lugar de enviar lotes con base en sólo probabilidades *a priori*, se utiliza una muestra de prueba de dos artículos, y se obtienen tres posibles resultados: (1) ambos artículos son buenos (z_1); (2) un artículo está bueno (z_2), y (3) ambos artículos están defectuosos (z_3).

(a) Determine las probabilidades *a posteriori* $P\{\theta_i|z_j\}$, $i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3$.

***(b)** Suponga que el fabricante envía lotes a dos clientes A y B. Los contratos especifican que los artículos defectuosos para A y B no deben exceder de 5 y 8%, respectivamente. Se incurre en una penalización de $100 por punto porcentual por arriba del límite máximo. Si entrega lotes de mejor calidad que la especificada por los costos del contrato le cuesta al fabricante $50 por punto porcentual. Desarrolle el árbol de decisiones, y determine la estrategia de prioridad para enviar los lotes.

Funciones de utilidad. En la sección anterior el criterio del valor esperado se aplica a situaciones en que la retribución es dinero *real.* Hay casos en que debe aplicarse la *utilidad* en lugar del valor real en el análisis. Para ilustrar este punto, suponga que hay una probabilidad 50-50 de que una inversión de $20,000 produzca una retribución de $40,000 o que se pierda. La retribución esperada asociada es de ($40,000 × 0.5) — ($20,000 × 0.5) = $10,000. Aunque hay una retribución esperada neta, diferentes individuos interpretan de forma diferente el resultado. Un inversionista que desea correr el riesgo puede realizar la inversión con 50% de probabilidades de obtener una retribución de $40,000. Por el contrario, quizás un inversionista conservador no esté dispuesto a correr el riesgo de perder $20,000. El concepto de *función de utilidad* se ideó para reflejar estas diferencias. La función de utilidad ocupa entonces el lugar del dinero real en el modelo de toma de decisiones.

¿Cómo se cuantifica la actitud subjetiva ante el riesgo en la forma de una función de utilidad? En la ilustración anterior de inversión, la mejor retribución es de $40,000, y la peor de − $20,000. Podemos establecer una escala de utilidad, U, de 0 a 100 que especifique $U(-\$20{,}000) = 0$ y $U(\$40{,}000) = 100$. El valor de U para un rendimiento de la inversión entre − $20,000 y $40,000 se determina como sigue: Si la actitud del tomador de decisiones hacia el riesgo es neutra (indiferente), entonces U puede represen-

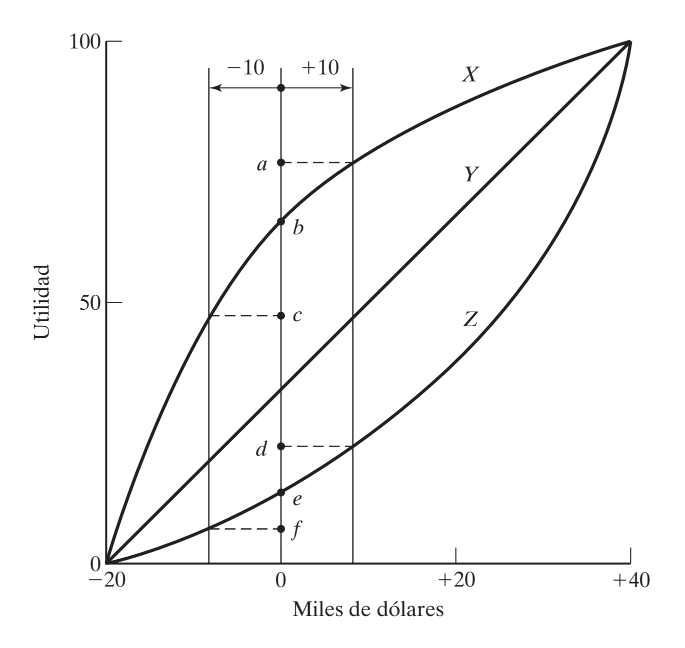


FIGURA 15.6

Funciones de utilidad para tomadores de decisiones reacios al riesgo (X), neutros ante el riesgo (Y), y buscadores de riegos (Z)

tarse por medio de una línea recta que une (0, — \$20,000) y (100, \$40,000). En este caso, tanto el dinero real como su utilidad conducen a las mismas decisiones. De manera más general, la función U puede adoptar otras formas que reflejan diferentes actitudes hacia el riesgo. La figura 15.6 ilustra los casos de los individuos X, Y y Z. El individuo Y es **neutro ante el riesgo**, el individuo X es **adverso al riesgo** (o precavido), y el individuo Z es lo opuesto de X, es un **propenso al riego**. La figura demuestra que para el adverso al riesgo X, la reducción de la utilidad bc correspondiente a una pérdida de \$10,000 es mayor que el incremento ab asociado con una ganancia de \$10,000. Lo contrario funciona para el propenso al riesgo Z donde $de > ef$. Por lo general, un individuo puede ser tanto propenso como adverso al riesgo, en cuyo caso la curva de utilidad seguirá una forma de S alargada.

Curvas de utilidad similares a las demostradas en la figura 15.6 se determinan "cuantificando" la actitud del tomador de decisiones hacia el riesgo, con diferentes niveles de efectivo. En nuestro ejemplo, el intervalo deseado es (−\$20,000 a \$40,000) con $U(-\$20{,}000) = 0$ y $U(\$40{,}000) = 100$. Para especificar los valores de U para valores de efectivo intermedio (por ejemplo, −\$10,000, \$0, \$10,000, \$20,000 y \$30,000), establecemos una **lotería** para una suma de efectivo x cuya utilidad esperada es

$$\begin{aligned} U(x) &= pU(-20{,}000) + (1 - p)U(\$40{,}000), 0 \leq p \leq 1 \\ &= 0p + 100(1 - p) \\ &= 100 - 100p \end{aligned}$$

Para determinar $U(x)$, el tomador de decisiones debe formular una preferencia entre una cantidad de efectivo *garantizada* x y la oportunidad de jugar una lotería en la que puede haber una pérdida de −\$20,000 con probabilidad p y una utilidad de \$40,000

con probabilidad $1 - p$. El valor de p refleja la neutralidad del tomador de decisiones (o indiferencia) hacia el riesgo. Por ejemplo, para $x = \$20{,}000$, el tomador de decisiones puede pensar que un efectivo garantizado de \$20,000 y la lotería con $p = 0.8$ son igualmente atractivos. En este caso podemos calcular la utilidad de $x = \$20{,}000$ como

$$U(\$20{,}000) = 100 - (100 \times 0.8) = 20$$

Observe que los altos valores de p con la misma lotería reflejan la búsqueda del riesgo (en oposición a la aversión al riesgo). Por ejemplo, con $p = 0.2$,

$$U(\$20{,}000) = 100 - (100 \times 0.2) = 80$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.2C

***1.** Usted es un estudiante en la Universidad de Arkansas y desea desesperadamente asistir al siguiente juego de básquetbol de los Razorbacks. El problema es que el boleto de admisión cuesta \$10 y usted sólo tiene \$5. Puede apostar sus \$5 en un juego de *poker*, con una probabilidad de 50-50 de duplicar su dinero o perderlo todo.

(a) Basado en el valor real del dinero, ¿intentaría participar en el juego de *poker*?

(b) Basado en su ardiente deseo de ver el juego, transforme el dinero real en una función de utilidad.

(c) Basado en la función de utilidad que desarrolló en (b), ¿intentaría participar en el juego de *poker*?

***2.** La familia Golden se acaba de mudar a una ciudad donde los terremotos no son raros. Deben decidir si construyen su casa de acuerdo con el código sísmico de alto estándar. El costo de construcción aplicando el código sísmico es de \$850,000; de lo contrario, puede construirse una casa comparable por sólo \$350,000. Si ocurre un sismo (y la probabilidad de que ocurra uno es de .001), costará \$900,000 reparar una casa construida por debajo de las normas. Desarrolle la lotería asociada con esta situación, suponiendo una escala de utilidad de 0 a 100.

3. Una inversión de \$10,000 en una empresa de alto riesgo tiene una probabilidad de 50-50 de que se incremente a \$14,000 o de que se reduzca a \$8,000 durante el siguiente año. Por lo tanto el rendimiento neto puede ser o de \$4000 o de − \$2,000.

(a) Suponiendo un inversionista neutro hacia el riesgo y una escala de utilidad de 0 a 100, determine la utilidad de rendimiento *neto* de \$0 sobre la inversión y la probabilidad de indiferencia asociada.

(b) Suponga que dos inversionistas A y B han seguido las siguientes probabilidades de indiferencia:

	Probabilidad de indiferencia	
Rendimiento neto (\$)	*Inversionista A*	*Inversionista B*
−2000	1.00	1.00
−1000	0.30	0.90
0	0.20	0.80
1000	0.15	0.70
2000	0.10	0.50
3000	0.05	0.40
4000	0.00	0.00

Trace la gráfica de las funciones de utilidad para los inversionistas A y B, y clasifique a cada inversionista ya sea como persona adversa al riesgo o como propensa al riesgo.

(c) Suponga que el inversionista A tiene la oportunidad de invertir en una de dos opciones. Venture I puede producir un rendimiento neto de \$20,000 con probabilidad de 0.4 o una pérdida neta de \$10,000 con probabilidad de 0.6. Venture II puede producir un rendimiento de \$3000 con probabilidad de 0.6 y de nada de rendimiento con probabilidad de 0.4. Basado en la función de utilidad en (b), aplique el criterio de utilidad esperado para determinar la empresa que el inversionista A debe elegir. ¿Cuál es el valor monetario esperado asociado con la empresa seleccionada? *(Sugerencia:* Utilice interpolación lineal de la función de utilidad).

(d) Repita el inciso (c) para el inversionista B.

15.3 DECISIÓN BAJO INCERTIDUMBRE

La toma de decisiones bajo incertidumbre, así como bajo riesgo, implica acciones alternativas cuyas retribuciones dependen de los *estados de la naturaleza* (aleatorios). Específicamente, la matriz de retribución de un problema de decisión con m acciones alternativas y n estados de la naturaleza puede representarse como

	s_1	s_2	$\dots$	s_n
a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	$\dots$	$v(a_1, s_n)$
a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	$\dots$	$v(a_2, s_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$	$\dots$	$v(a_m, s_n)$

El elemento a_i representa la acción i y el elemento s, representa el estado de la naturaleza j. La retribución o resultado asociado con la acción a_i y el estado s_j es $v(a_i, s_j)$.

En la toma de decisiones bajo incertidumbre, la distribución de probabilidad asociada con los estados s_j, $j = 1,2,\dots, n$, o se desconoce o no puede ser determinada. Esta falta de información condujo al desarrollo de criterios de decisión especiales:

1. Laplace
2. Minimax
3. Savage
4. Hurwicz

Estos criterios difieren en el enfoque que adopte el tomador de decisiones ante el problema.

El criterio de **Laplace** se basa en el **principio de razón insuficiente**. Ya que no se conocen las distribuciones de probabilidad, no hay razón alguna para creer que las probabilidades asociadas con los estados de la naturaleza sean diferentes. Por tanto, las alternativas se evalúan utilizando la suposición *simplificadora* de que todos los estados son igualmente probables de que ocurran; es decir, $P\{s_1\} = P\{s_2\} = \dots = P\{s_n\} = \frac{1}{n}$. Si la retribución $v(a_i, s_j)$ representa la ganancia, la mejor alternativa es la que da por resultado

$$\max_{a_i}\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v(a_i, s_j) \right\}$$

El criterio **maximin (minimax)** está basado en la actitud *conservadora* de hacer la mejor de las peores condiciones posibles. Si $v(a_i, s_j)$ es una pérdida, entonces seleccionamos la acción que corresponde al siguiente criterio *minimax*.

$$\min_{a_i}\left\{\max_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}$$

Si $v(a_i, s_j)$ es una ganancia, utilizamos el criterio *maximin* dado por

$$\max_{a^i}\left\{\min_{s_\Downarrow} \ v(a_i, s_j)\right\}$$

El criterio de **lamento de Savage** "modera" el grado de conservadurismo del criterio *minimax* (*maximin*) al reemplazar la matriz de retribución (ganancia o pérdida) $v(a_i, s_j)$ con una matriz de *pérdida* (o lamento), $r(a_i, s_j)$ mediante la siguiente transformación:

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} v(a_i, s_j) - \min_{a_k}\{v(a_k, s_j)\}, & \text{si } v \text{ es una pérdida} \\ \max_{a_k}\{v(a_k, s_j)\} - v(a_i, s_j), & \text{si } v \text{ es una ganancia} \end{cases}$$

Para demostrar por qué el criterio de Savage modera el criterio minimax (maximin), considere la siguiente matriz *de pérdida*:

$v(a_i, s_j) =$

	s_1	s_2	Fila máx	
a_1	\$11,000	\$90	\$11,000	
a_2	\$10,000	\$10,000	\$**10,000**	← Minimax

La aplicación del criterio minimax muestra que a_2, con una pérdida definida de \$10,000, es la alternativa preferida. Sin embargo, puede ser mejor elegir a_1 porque hay una probabilidad de limitar la pérdida a \$90 sólo si s_2 ocurre. Éste suele ser el caso cuando se utiliza la matriz de lamento:

$r(a_i, v_j) =$

	s_1	s_2	Fila máx	
a_1	\$1,000	\$0	\$**1,000**	← Minimax
a_2	\$0	\$9,910	\$9,910	

El último criterio, **Hurwicz**, está diseñado para representar diferentes actitudes de decisión que van desde la más optimista hasta la más pesimista. Defina $0 \leq a \leq 1$. La acción seleccionada debe asociarse con

$$\max_{a_i}\left\{\alpha \max_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha)\min_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}, \text{ si } v \text{ es una ganancia}$$

$$\min_{a_i}\left\{\alpha \min_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha)\max_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}, \text{ si } v \text{ es una pérdida}$$

El parámetro α es el **índice de optimismo**. Si $\alpha = 0$, entonces el criterio se reduce al criterio minimax conservador, que busca la *mejor de las peores condiciones*. Si $\alpha = 1$, entonces el criterio es optimista porque busca *la mejor de las mejores condiciones*. El

grado de optimismo (o pesimismo) puede ajustarse seleccionando un valor de α entre 0 y 1. Sin la fuerte sensación con respecto a un optimismo y a un pesimismo extremos, $\alpha = .5$ puede ser una elección justa.

Ejemplo 15.3-1

National Outdoors School (NOS) está preparando un sitio para acampar en el verano en el corazón de Alaska para enseñar técnicas de sobrevivencia en áreas salvajes. NOS estima que la asistencia puede caer dentro de una de cuatro categorías: 200, 250, 300 y 350 personas. El costo del campamento será mínimo cuando su tamaño satisfaga la demanda con exactitud. Las desviaciones por encima y por debajo de los niveles de demanda ideales incurren en costos adicionales por construir más capacidad que la necesaria o por perder oportunidades de ingresos cuando la demanda no se satisface. Si a_1 a a_4 representan los tamaños de los campamentos (200, 250, 300 y 350 personas) y s_1 a s_4 el nivel de asistencia, la siguiente tabla resume la matriz de costos (en miles de dólares) para la situación.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	12	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

El problema se analiza aplicando los cuatro criterios.

Laplace. Dado que $P\{s_j\} = \frac{1}{4}$, $j = 1$ a 4, los valores esperados con las diferentes acciones se calculan como

$$E\{a_1\} = \frac{1}{4}(5 + 10 + 18 + 25) = \$14{,}500$$

$$E\{a_2\} = \frac{1}{4}(8 + 7 + 12 + 23) = \$\mathbf{12{,}500} \leftarrow \textbf{Óptimo}$$

$$E\{a_3\} = \frac{1}{4}(21 + 18 + 12 + 21) = \$18{,}000$$

$$E\{a_4\} = \frac{1}{4}(30 + 22 + 19 + 15) = \$21{,}500$$

Minimax. El criterio minimax produce la siguiente matriz:

	s_1	s_2	s_3	s_4	Fila máx
a_1	5	10	18	25	25
a_2	8	7	12	23	23
a_3	21	18	12	21	**21** ← Minimax
a_4	30	22	19	15	30

Savage. La matriz de arrepentimiento se determina restando 5, 7, 12 y 15 de las columnas 1 a 4, respectivamente. Por lo tanto,

	s_1	s_2	s_3	s_4	Fila máx
a_1	0	3	6	10	10
a_2	3	0	0	8	**8** ← Minimax
a_3	16	11	0	6	16
a_4	25	15	7	0	25

Hurwicz. La siguiente tabla resume los cálculos.

Alternativa	Fila mín	Fila máx	α(Fila mín) + $(1 - \alpha)$(Fila máx)
a_1	5	25	$25-20\alpha$
a_2	7	23	$23-16\alpha$
a_3	12	21	$21-9\alpha$
a_4	15	30	$30-15\alpha$

Utilizando una α apropiada podemos determinar la alternativa óptima. Por ejemplo, en $\alpha = .5$, a_1 o a_2 es la óptima, y en $\alpha = .25$, a_3 es la óptima.

Momento de Excel

La plantilla *excelUncertainty.xls* puede usarse para automatizar los cálculos de los criterios de Laplace, maximin, Savage y Hurwicz. La hoja de cálculo está basada en el uso de una matriz de costos. Para utilizar una matriz de recompensas, todas las entradas deben multiplicarse por -1. El tamaño máximo de la matriz es (10×10).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.3A

*__1.__ Hank es un estudiante inteligente y suele obtener buenas calificaciones, siempre que pueda repasar el material del curso la noche anterior al examen. Para el examen de mañana, Hank enfrenta un pequeño problema. Sus hermanos de fraternidad van a tener una fiesta que va a durar toda la noche, y a la cual le gustaría asistir. Hank tiene tres opciones:

a_1 = Parrandear toda la noche

a_2 = Dividir la noche en partes iguales entre estudiar y participar en la fiesta

a_3 = Estudiar toda la noche

El examen de mañana puede ser fácil (s_1), moderado (s_2), o difícil (s_3), dependiendo del impredecible humor del profesor. Hank anticipa las siguientes calificaciones:

	s_1	s_2	s_3
a_1	85	60	40
a_2	92	85	81
a_3	100	88	82

(a) Recomiende un curso de acción para Hank (basado en cada uno de los cuatro criterios de decisión bajo incertidumbre).

(b) Suponga que a Hank le interesa más la calificación que obtendrá. Las calificaciones aprobatorias que van de la A a la D, son 90, 80, 70 y 60, respectivamente. ¿Exigiría esta actitud hacia las calificaciones un cambio del curso de acción de Hank?

2. Para la temporada de siembra venidera, Farmer McCoy puede sembrar maíz (a_1), trigo (a_2), o soya (a_3), o utilizar el terreno para pastoreo (a_4). Las retribuciones asociadas con las diferentes acciones dependen de la cantidad de lluvia: lluvia fuerte (s_1), lluvia moderada (s_2), lluvia ligera (s_3), o sequía (s_4). La matriz de retribuciones (en miles de dólares) se estima como

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	−20	60	30	−5
a_2	40	50	35	0
a_3	−50	100	45	−10
a_4	12	15	15	10

Desarrolle un curso de acción para Farmer McCoy basado en cada una de las cuatro decisiones bajo criterios de incertidumbre.

3. Hay que seleccionar una de N máquinas para fabricar Q unidades de un producto específico. Las demandas mínima y máxima del producto son Q^* y Q^{**}, respectivamente. El costo de producción total de Q artículos con la máquina i implica un costo fijo K_i y un costo variable por unidad c_i, y está dado como

$$TC_i = K_i + c_iQ$$

(a) Idee una solución para el problema conforme a cada uno de los cuatro criterios de decisión bajo incertidumbre.

(b) Con $1000 \leq Q \leq 4000$ y el siguiente conjunto de datos, resuelva el problema:

Máquina i	K_i (\$)	C_i (\$)
1	100	5
2	40	12
3	150	3
4	90	8

15.4 TEORÍA DE JUEGOS

Esta teoría tiene que ver con situaciones de decisión en la que dos oponentes *inteligentes* con objetivos conflictivos (en caso de suma cero) compiten intensamente para superar al otro. Ejemplos típicos incluyen el lanzamiento de campañas publicitarias de productos que compiten y estrategias de planeación de batallas en la guerra.

En un conflicto, cada uno de los dos **jugadores** (oponentes) tiene una cantidad (finita o infinita) de alternativas o **estrategias**. Asociada con cada par de estrategias está la **retribución** que un jugador recibe del otro. Tal situación se conoce como **juego de suma cero entre dos personas** porque la ganancia de un jugador es igual a la pérdida del otro. Esto significa que podemos representar el juego en función de la retribución que recibe un jugador. Designando los dos jugadores A y B con m y n estrategias,

respectivamente, el juego se presenta usualmente en función de la matriz de retribuciones que recibe el jugador A como

	B_1	B_2	$\ldots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m1}	$\ldots$	a_{mn}

La representación indica que si A utiliza la estrategia i y B utiliza la estrategia j, la retribución para A es a_{ij}, y la retribución para B es $-a_{ij}$.

Aplicación de la vida real. Ordenación de golfistas en el último día de juegos por parejas de la copa Ryder

En el día final de un torneo de golf, dos equipos compiten por el campeonato. El capitán de cada equipo presenta una *pizarra* (una lista ordenada de los golfistas) que determina las parejas. Para dos golfistas que ocupan el mismo orden en sus respectivas pizarras, es plausible suponer que haya una probabilidad de 50-50 de que cualquiera de ellos gane el juego. La probabilidad de ganar se incrementa para un golfista de más alto orden cuando se enfrenta a uno de más bajo orden. El objetivo es desarrollar un procedimiento analítico que apoye o refute la idea de utilizar pizarras. El caso 12, capítulo 26, en el sitio web detalla el estudio basado en la teoría de juegos.

15.4.1 Solución óptima de juegos de suma cero entre dos personas

Debido a que los juegos de suma cero o constante implican un conflicto de intereses, la base para la selección de estrategias óptimas garantiza que ninguno de los jugadores intenta buscar una estrategia diferente porque el resultado será una retribución peor. Estas soluciones pueden ser en la forma de una sola estrategia o varias estrategias combinadas al azar.

Ejemplo 15.4-1

Dos compañías, A y B, venden dos marcas de un medicamento para la gripe. La compañía A se anuncia en radio (A_1), televisión (A_2) y periódicos (A_3). La compañía B, además de utilizar la radio (B_1), la televisión (B_2) y los periódicos (B_3), también envía folletos por correo (B_4). Dependiendo de la efectividad de cada campaña publicitaria, una compañía puede capturar una parte del mercado de la otra. La siguiente matriz resume el porcentaje del mercado capturado o perdido por la compañía A.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Fila mín
A_1	8	−2	9	−3	−3
A_2	6	**5**	6	8	**5** ← Maximin
A_3	−2	4	−9	5	−9
Columna máx	8	**5**	9	8	
		↑ Minimax			

La solución del juego se basa en el principio de asegurar lo *mejor de lo peor* para cada jugador. Si la compañía A selecciona la estrategia A_1, entonces, independientemente de lo que haga B, lo peor que puede suceder es que A pierda 3% del segmento del mercado ante B. Esto se representa por medio del valor mínimo de las entradas en la fila 1. Asimismo, con la estrategia A_2, el peor resultado es que A capture 5% de B, y con la estrategia A_3, el peor resultado es que A pierda 9% ante B. Estos resultados aparecen bajo *fila mín*. Para lograr lo *mejor* de lo *peor*, la compañía A elige la estrategia A_2 porque corresponde a un valor maximin.

Luego, para la compañía B, la matriz de retribuciones dada es para A, la *mejor* de la *peor* solución de B está basada en el valor minimax. El resultado es que la compañía B elegirá la estrategia B_2.

La solución óptima del juego exige seleccionar las estrategias A_2 y B_2, lo que significa que ambas compañías deben utilizar la publicidad por televisión. La retribución favorecerá a la compañía A porque su segmento del mercado se incrementará 5%. En este caso decimos que el **valor del juego** es 5% y que A y B están utilizando una solución de **punto de silla**.

La solución de punto de silla impide seleccionar una mejor estrategia por parte de cualquiera de las compañías. Si B cambia de estrategia (B_1, B_3 o B_4), la compañía A puede seguir con la estrategia A_2, lo que resultaría en una pérdida peor para B (6 u 8%). Por la misma razón, A no buscaría una estrategia diferente porque B puede cambiar a B_3 para obtener 9% de ganancia del mercado si se utiliza A_1, y 3% si se utiliza A_3.

La solución de punto de silla óptima de un juego no tiene que ser una estrategia pura. En su lugar, la solución puede requerir combinar dos o más estrategias al azar, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15.4-2

Dos jugadores, A y B, juegan a tirar la moneda. Cada jugador, sin saberlo el otro, escoge cara (H) o cruz (T). Ambos jugadores revelan sus elecciones al mismo tiempo. Si coinciden (HH o TT), el jugador A recibe \$1 de B. De lo contrario, A le paga \$1a B.

La siguiente matriz de retribuciones para el jugador A da los valores de fila mín y columna máx correspondientes a las estrategias de A y B, respectivamente.

	B_H	B_T	Fila mín
A_H	1	−1	−1
A_T	−1	1	−1
Columna máx	1	1	

Los valores maximin y minimax de los juegos son − \$1 y \$1, respectivamente, y el juego no tiene una estrategia pura porque los dos valores no son iguales. Específicamente, si el jugador A selecciona A_H, el jugador B puede seleccionar B_T para recibir \$1 de A. Si esto sucede, A puede cambiar a la estrategia A_T para invertir el resultado al recibir \$1 de B. La constante tentación de cambiar de estrategia muestra que una solución de estrategia pura no es aceptable. Lo que se requiere en este caso es que ambos jugadores combinen al azar sus estrategias puras respectivas. El valor óptimo del juego ocurrirá entonces en alguna parte entre los valores maximin y minimax del juego; es decir,

$$\text{valor maximin (menor)} \leq \text{valor del juego} \leq \text{valor minimax (mayor)}$$

En el ejemplo de tirar la moneda, el valor del juego debe quedar entre − \$1 y + \$1 (vea el problema 5 del conjunto 15.4a).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.4A

1. En los juegos (a) y (b) dados a continuación, la retribución es para el jugador A. Cada juego tiene una solución de estrategia pura. En cada caso, determine las estrategias que definan el punto de silla y el valor del juego.

*__(a)__

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	5
A_3	7	5	3	5

(b)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	−4	−5	6
A_2	−3	−4	−9	−2
A_3	6	7	−8	−9
A_4	7	3	−9	5

2. En los juegos (a) y (b) dados a continuación, la retribución es para el jugador A. Determine los valores de p y q que harán de (A_2, B_2) un punto de silla:

(a)

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	q	6
A_2	p	5	10
A_3	6	2	3

(b)

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	5
A_2	10	7	q
A_3	4	p	6

3. En los juegos (a) y (b) dados a continuación, la retribución es para el jugador A. Especifique el intervalo del valor del juego en cada caso.

*__(a)__

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	9	6	0
A_2	2	3	8	4
A_3	−5	−2	10	−3
A_4	7	4	−2	−5

(b)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	−1	9	6	8
A_2	−2	10	4	6
A_3	5	3	0	7
A_4		−2	8	4

(c)

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	6	1
A_2	5	2	3
A_3	4	2	−5

(d)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	7	1	3
A_2	4	8	0	−6
A_3	6	−9	−2	4

4. Dos compañías promueven dos productos competidores. En la actualidad, cada producto controla 50% del mercado. Debido a mejoras recientes en los dos productos, cada compañía planea lanzar una campaña publicitaria. Si ninguna de las dos compañías se anuncia, continuarán iguales las partes del mercado. Si alguna de las compañías lanza una campaña más agresiva, la otra compañía con toda certeza perderá un porcentaje proporcional de sus clientes. Un encuesta del mercado muestra que se puede llegar a 50% de los clientes potenciales por medio de la televisión, a 30% por medio de periódicos, y a 20% por medio de la radio.

(a) Formule el problema como un juego de suma cero entre dos personas, y determine el medio publicitario para cada compañía.

(b) Determine un intervalo para el valor del juego. ¿Puede operar cada compañía con una estrategia pura única?

5. Si a_{ij} es el elemento (i, j)-ésimo de una matriz de retribuciones con m estrategias para el jugador A y n estrategias para el jugador B, la retribución es para el jugador A. Demuestre que

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$$

15.4.2 Solución de juegos con estrategias combinadas

Los juegos con estrategias combinadas pueden resolverse por medio de métodos gráficos o programación lineal. La solución gráfica es adecuada para juegos con exactamente dos estrategias puras de uno o ambos jugadores. Por otra parte, la PL (programación lineal) puede resolver cualquier juego de suma cero entre dos personas. El método gráfico es interesante porque explica la idea de un punto de silla visualmente.

Solución gráfica de juegos. Comenzamos con el caso de $(2 \times n)$ juegos en los cuales el jugador A tiene dos estrategias, A_1 y A_2.

		y_1	y_2	$\ldots$	y_n
x_1:	A_1	B_1	B_2	$\ldots$	B_n
$1 - x_1$:	A_2	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1m}
		a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2m}

El jugador A combina las estrategias A_1 y A_2 con probabilidades x_1 y $1 - x_1$, $0 \leq x_1 \leq 1$. El jugador B combina las estrategias $B_1, B_2, \ldots$, y B_n con probabilidades $y_1, y_2, \ldots$, y y_n, $y_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, y $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$. En este caso, la retribución esperada de A correspondiente a la estrategia pura j-ésima de B es

$$(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}, j = 1, 2, \ldots, n$$

El jugador A busca el valor de x_1 que maximice las retribuciones mínimas esperadas, es decir,

$$\max_{x_j} \min_j \{(a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}\}$$

Ejemplo 15.4-3

Considere el siguiente juego de 2×4. La retribución es para el jugador A.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	−1
A_2	4	3	2	6

El juego no tiene ninguna solución de estrategia pura porque los valores maximin y minimax no son iguales (¡compruébelo!). Las retribuciones esperadas de A correspondientes a las estrategas puras de B se dan como

Estrategia pura de B	Retribución esperada de A
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$

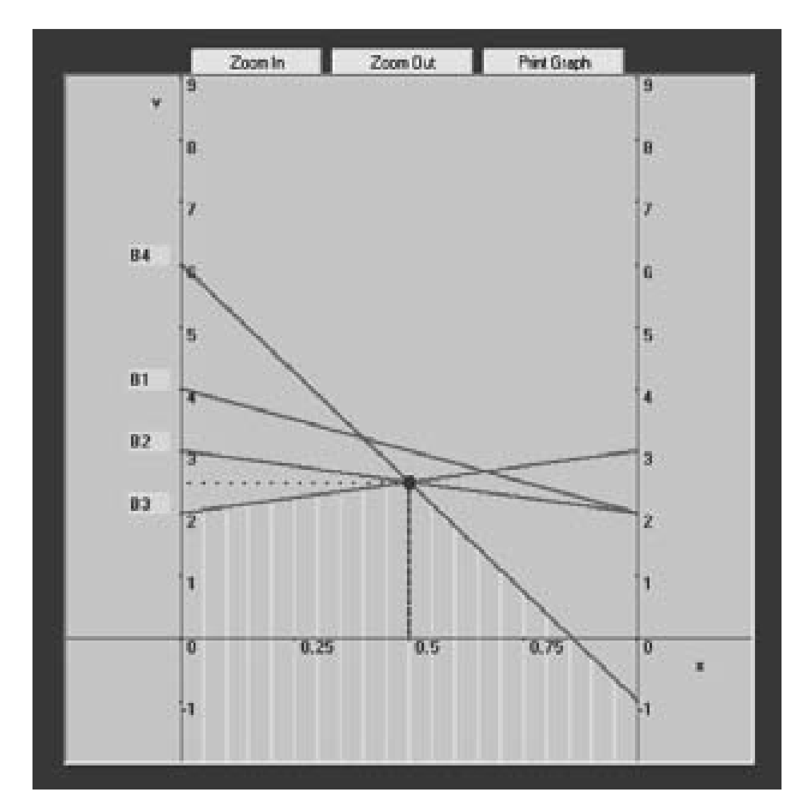


FIGURA 15.7

Solución gráfica del juego de suma cero entre dos personas del ejemplo 15.4-3 obtenida con TORA (archivo *toraEx15.4-3.txt*)

La figura 15.7 muestra una gráfica creada por TORA de las cuatro líneas rectas asociadas con las estrategias puras de B (archivo *toraExl5.4-3*.txt).[3] Para determinar *la mejor de la peor solución*, la envolvente inferior de las cuatro líneas (delineada por franjas verticales) representa la retribución mínima (peor) esperada para A, independientemente de las elecciones de B. El máximo (mejor) de la envolvente inferior corresponde al punto de solución maximin $x_1^* = 0.5$. Este punto es la intersección de las líneas asociadas con las estrategias B_3 y B_4. La solución óptima del jugador A demanda una combinación 50-50 de A_1 y A_2. El valor correspondiente del juego, v, se determina sustituyendo $x_1 = 0.5$ en la función o bien de la línea 3, o de la línea 4, lo cual da

$$v = \begin{cases} \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}, & \text{desde la línea 3} \\ -7(\frac{1}{2}) + 6 = \frac{5}{2}, & \text{desde la línea 4} \end{cases}$$

La combinación óptima del jugador B se determina por medio de las dos estrategias que definen la envolvente inferior de la gráfica. Esto significa que B puede combinar las estrategias B_3 y B_4 en cuyo caso $y_1 = y_2 = 0$ y $y_4 = 1 - y_3$. En consecuencia, las retribuciones esperadas de B correspondientes a estrategias puras de A son

[3]Del menú Main, seleccione la opción Zero-sum Games e ingrese los datos del problema, luego seleccione la opción Graphical en el menú desplegable SOLVE/MODIFY.

Estrategia pura de A	Retribuciones esperadas de B
1	$4y_3 - 1$
2	$-4y_3 + 6$

La *mejor de la peor solución* para B es el punto mínimo de la envolvente *superior* de las dos líneas dadas (será instructivo que trace las dos líneas e identifique la envolvente superior). Este proceso equivale a resolver la ecuación

$$4y_3 - 1 = -4y_3 + 6$$

La solución da $y_3 = \frac{7}{8}$, la cual da el valor del juego como $v = 4 \times (\frac{7}{8}) - 1 = \frac{5}{2}$.

La solución del juego exige que el jugador combine A_1 y A_2 con probabilidades iguales, y que el jugador B combine B_3 y B_4 con probabilidades $\frac{7}{8}$ y $\frac{1}{8}$. (En realidad, el juego tiene soluciones alternativas para B, porque el punto máximo en la figura 15.7 está determinado por más de dos líneas. Cualquier combinación no negativa de estas soluciones alternativas también es una solución legítima.)

Comentarios. Los juegos en que el jugador A tiene m estrategias y el jugador B sólo tiene dos, pueden tratarse del mismo modo. La diferencia principal es que graficaremos la retribución esperada de B correspondiente a estrategias puras de A. Por consiguiente, buscaremos el punto minimax en lugar del punto maximin de la *envolvente superior* de las líneas trazadas. Sin embargo, para resolver el problema con TORA, es necesario expresar la retribución en función del jugador que tiene dos estrategias, multiplicándola por − 1.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.4B[4]

***1.** Resuelva gráficamente el juego de tirar la moneda del ejemplo 15.4-2.

***2.** Robin viaja entre dos ciudades y puede utilizar dos rutas. La ruta A es una carretera rápida de cuatro carriles, y la ruta B es una larga carretera sinuosa. Robin maneja "superrápido". La patrulla de caminos cuenta con una fuerza policial limitada. Si se asignara toda la fuerza a la ruta por la que maneja Robin, con toda certeza recibiría una multa de $100 por exceso de velocidad. Si la fuerza se reparte 50-50 entre las dos rutas, hay 50% de probabilidades de que reciba una multa de $100 en la ruta A, y sólo 30% de que reciba la misma multa en la ruta B. Desarrolle una estrategia tanto para Robin como para la patrulla de caminos.

3. Resuelva gráficamente los siguientes juegos. La retribución es para el jugador A.

(a)

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	−3	7
A_2	2	4	−6

(b)

	B_1	B_2
A_1	5	8
A_2	6	5
A_3	5	7

[4]Puede usar el módulo Zero-sum games de TORA para verificar su respuesta.

4. Considere el siguiente juego de suma cero entre dos personas:

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	50	50
A_2	1	1	.1
A_3	10	1	10

(a) Compruebe que las estrategias ($\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}$) para A y ($\frac{49}{54}, \frac{5}{54}$, 0) para B son óptimas, y determine el valor del juego.

(b) Demuestre que el valor óptimo del juego es igual a

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i y_j$$

Solución de juegos por medio de programación lineal. La teoría de juegos está estrechamente relacionada con la PL en el sentido de que cualquier juego de suma cero entre dos personas puede expresarse como un programa lineal, y viceversa. De hecho, G. Dantzig (1963, pág. 24) expresa que cuando J. von Neumann, padre de la teoría de juegos, la introdujo por primera vez al método simplex en 1947, de inmediato reconoció esta relación y además precisó y recalcó el concepto de *dualidad* en la programación lineal. Esta sección explica cómo se resuelven los juegos mediante PL.

Las probabilidades óptimas del jugador A, $x_1, x_2, \ldots$, y x_m, pueden determinarse resolviendo el siguiente problema maximin:

$$\max_{x_i}\left\{ \min\left(\sum_{i=l}^{m} a_{i1}x_i,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i \right) \right\}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m$$

Sea

$$v = \min\left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i,\ \ldots,\ \sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i \right\}$$

La ecuación implica que

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq v, j = 1, 2, \ldots, n$$

El problema del jugador A puede escribirse por lo tanto como

$$\text{Maximizar } z = v$$

sujeto a

$$v - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \leq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$v \text{ irrestricta}$$

Observe que el valor del juego, v, no está restringido en cuanto a signo.

Las estrategias óptimas del jugador B $y_1, y_2, \ldots,$ y y_n, se determinan resolviendo el problema

$$\min_{y_j} \left\{ \text{máx}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j \right) \right\}$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

Utilizando un procedimiento similar al del jugador A, el problema de B se reduce a

$$\text{Minimizar } w = v$$

sujeto a

$$v - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$v \text{ irrestricta}$$

Los dos problemas optimizan la misma variable v (irrestricta), el valor del juego. La razón es que el problema de B es el dual del problema de A (verifique esta afirmación por medio de la definición de dualidad del capítulo 4). Esto significa que la solución óptima de un problema da automáticamente la solución óptima del otro.

Ejemplo 15.4-4

Resuelva el siguiente juego mediante programación lineal. El valor del juego, v, queda entre -2 y 2.

	B_1	B_2	B_3	Fila mín
A_1	3	−1	−3	−3
A_2	−2	4	−1	**−2**
A_3	−5	−6	2	−6
Columna máx	3	4	**2**	

Programa lineal del jugador *A*

$$\text{Maximizar } z = v$$

sujeto a

$$v - 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 0$$
$$v + x_1 - 4x_2 + 6x_3 \leq 0$$
$$v + 3x_1 + x_2 - 2x_2 \leq 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$v \text{ irrestricta}$$

La solución óptima[5] es $x_1 = 0.39, x_2 = 0.31, x_3 = 0.29$, y $v = -0.91$

Programa lineal del jugador *B*

$$\text{Minimizar } z = v$$

sujeto a

$$v - 3y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 0$$
$$v + 2y_1 - 4y_2 + y_3 \geq 0$$
$$v + 5y_1 + 6y_2 - 2y_3 \geq 0$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$
$$v \text{ irrestricta}$$

La solución da $y_1 = .32, y_2 = .08, y_3 = .60$, y $v = -0.91$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 15.4C

1. En un paseo campestre, 2 equipos de dos personas juegan a las escondidas. Hay cuatro escondites (A,B,C y D) y los dos miembros del equipo que se esconden pueden hacerlo por separado en dos de los cuatro escondites. El otro equipo puede entonces buscar en los otros dos escondites restantes. El equipo que busca obtiene un punto si encuentra a los dos miembros del equipo que se esconde; si no encuentra a los dos pierde un punto. De lo contrario, el resultado es un empate.

*(a) Desarrolle el problema como un juego de suma cero entre dos personas.

(b) Determine la estrategia óptima y el valor del juego.

2. La U de A y la U de D están ideando sus estrategias para el juego de básquetbol colegial varonil del campeonato de 1994. Valorando las fuerzas de sus respectivas "bancas", cada entrenador aparece con cuatro estrategias para rotar a los jugadores durante el encuentro. La habilidad de cada equipo de encestar canastas de 2 puntos, 3 puntos y tiros libres es la clave para determinar el marcador final del juego. La siguiente tabla resume los puntos netos que la U de A anotará por posesión como una función de las diferentes estrategias disponibles para cada equipo:

[5]Puede usarse la opción Zero-sum Games ⇒ Solve ⇒ LP-based de TORA para resolver cualquier juego de suma cero entre dos personas.

	U de D_1	U de D_2	U de D_3	U de D_5
U de A_1	3	−2	1	2
U de A_2	2	3	−3	0
U de A_3	−1	2	−2	2
U de A_4	−1	−2	4	1

(a) Resuelva el juego mediante programación lineal, y determine una estrategia para el juego de campeonato.

(b) Basado en la información dada, ¿cuál de los dos equipos se perfila para ganar el campeonato?

(c) Suponga que todo el juego constará de 60 posesiones (30 para cada equipo). Pronostique el número de puntos esperado con el cual se ganará el campeonato.

3. El ejército del coronel Blotto está peleando por el control de dos posiciones estratégicas. Blotto dispone de dos regimientos y el enemigo de tres. Una posición caerá ante el ejército con más regimientos. De lo contrario, el resultado de la batalla es un empate.

*(a) Formule el problema como un juego de suma cero entre dos personas y resuélvalo mediante programación lineal.

(b) ¿Cuál ejército ganará la batalla?

4. En el juego Morra de dos dedos entre dos jugadores, cada jugador muestra uno o dos dedos, y al mismo tiempo adivina cuántos dedos mostrará el oponente. El jugador que adivina correctamente gana una cantidad igual al número de dedos mostrados. De lo contrario, el juego es un empate. Desarrolle el problema como un juego de suma cero entre dos personas, y resuélvalo mediante programación lineal.

BIBLIOGRAFÍA

Chen, S., y C. Hwang, *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making,* Springer-Verlag, Berlín, 1992.

Clemen, R.J., y T. Reilly, *Making Hard Decisions: An introduction to Decision Analysis,* 2a. ed., Duxbury, Pacific Grove, CA, 1996.

Cohan, D., S. Haas, D. Radloff, y R. Yancik, "Using Fire in Forest Management: Decision Making under Uncertainty", *Interfaces,* vol. 14, núm. 5, págs. 8-19, 1984.

Dantzig, G.B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

Meyerson, R., *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1991.

Rapport, A. "Sensitivity Analysis in Decision Making", *The Accounting Review*, vol. 42, núm. 3, págs.441-456, 1967.

Saaty, T.*L.*, *Fundamentals of Decision Making*, RWS Publications, Pittsburgh, 1994.

CAPÍTULO 16

Modelos de inventario probabilísticos

Aplicación de la vida real. Decisiones de inventario en la cadena de abasto de Dell

Dell, Inc. implementa un modelo de negocio de ventas directas en el que las computadoras personales se venden directamente a los clientes en los Estados Unidos. Cuando llega un pedido de un cliente, las especificaciones se envían a una planta de manufactura en Austin, Texas, donde la computadora se construye, prueba y empaca en, aproximadamente, 8 horas. Dell maneja poco inventario. A sus proveedores, que por lo común se ubican en el sureste asiático, se les pide que manejen lo que se conoce como inventario "revolvente" disponible en *revolvedores* (almacenes) cerca de las plantas de manufactura. Estos revolvedores son propiedad de Dell y los rentan a los proveedores. Dell entonces "saca" las partes que necesita de los revolvedores, y la responsabilidad de los proveedores es reponer el inventario para satisfacer la demanda de Dell. Aunque Dell no posee el inventario guardado en los revolvedores, su costo se transfiere de manera indirecta a los clientes mediante la fijación de precios de los componentes. Por lo tanto, cualquier reducción del inventario beneficia directamente a los clientes de Dell con la reducción de los precios de los productos. La solución propuesta ha dado por resultado un estimado de $2.7 millones en ahorros anuales. (El caso 13 del capítulo 26, en el sitio web de este libro, detalla este estudio).

16.1 MODELOS DE REVISIÓN CONTINUA

Esta sección presenta dos modelos: (1) una versión "probabilizada" del modelo EOQ determinístico (sección 13.3-1) que utiliza existencias de reserva para satisfacer las demandas probabilísticas, y (2) un modelo EOQ probabilístico más exacto que incluye la demanda aleatoria directamente en la formulación.

16.1.1 Modelo EOQ "probabilizado"

Algunos profesionales han buscado adaptar el modelo EOQ determinístico (sección 13.3.1) para representar de forma aproximada la naturaleza probabilística de la demanda. El periodo crítico durante el ciclo de inventario ocurre entre la colocación y la

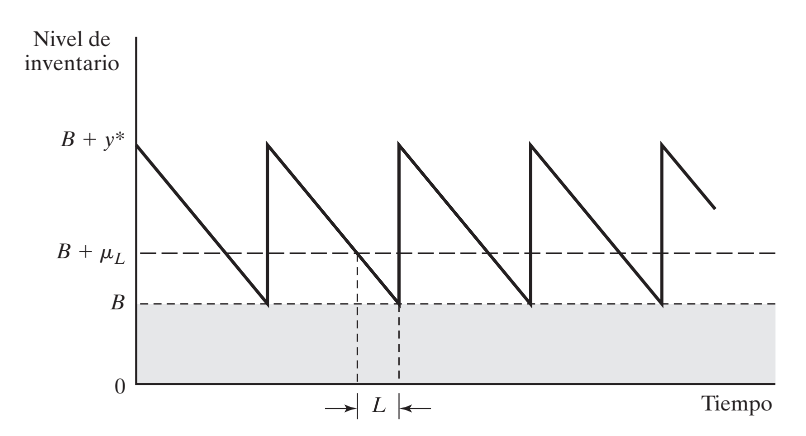


FIGURA 16.1
Existencias de reserva, B, impuestas al modelo EOQ clásico

recepción de pedidos. Éste es el lapso de tiempo en que se podrían presentar los faltantes (agotamiento de las existencias). La idea entonces es mantener existencias de seguridad constantes que eviten la probabilidad de faltantes. Por intuición, una probabilidad de pocos faltantes implica mayores existencias de reserva, y viceversa.

La figura 16.1 ilustra la relación entre las existencias de reserva, B, y los parámetros del modelo EOQ determinístico que incluyen el tiempo de espera, L; la demanda promedio durante el tiempo de espera, μ_L, y la cantidad económica de pedido (EOQ), y^*. Observe que L es el tiempo de espera *efectivo* definido en la sección 13.3.1.

La suposición principal del modelo es que la demanda por unidad de tiempo es normal con media D y desviación estándar σ; es decir, $N(D, \sigma)$. Con arreglo a esta suposición, la demanda durante el tiempo de espera L también debe ser normal con media $\mu_L = DL$ y desviación estándar $\sigma_L = \sqrt{L\sigma^2}$. La fórmula para σ_L supone que L es (representado de forma aproximada si es necesario por) un valor entero.

El tamaño de las existencias de reserva B se determina de modo que la probabilidad de faltantes durante L sea a lo sumo α. Si x_L es la demanda durante el tiempo de espera L, entonces

$$P\{x_L \geq B + \mu_L\} \leq \alpha$$

Utilizando $N(0, 1)$, $z = \frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L}$ (como se define en la sección 14.4.4), obtenemos

$$P\left\{z \geq \frac{B}{\sigma_L}\right\} \leq \alpha$$

Definiendo el parámetro K_α para la distribución normal estándar de modo que $P\{z \geq k_\alpha\} \leq \alpha$ (vea la figura 16.2) se desprende que

$$B \geq \sigma_L K_\alpha$$

La cantidad $\sigma_L K_\alpha$ proporciona el valor mínimo de B. (El valor de K_α puede determinarse desde la tabla normal estándar que aparece en el apéndice A, o utilizando el archivo *excelStatTables.xls*.)

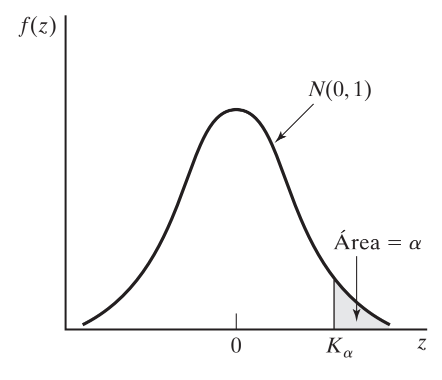


FIGURA 16.2
Probabilidad de que se agoten las existencias, $P\{z \leq K_\alpha\} = \alpha$

Ejemplo 16.1-1

En el ejemplo 13.3-1, donde se determina la política de inventario de las luces de neón, la cantidad económica de pedido es de 1000 unidades. Suponga que la demanda *diaria* es $N(100, 10)$; es decir, $D = 100$ unidades y que la desviación estándar es $\sigma = 10$ unidades. Determine el tamaño de las existencias de reserva, B, utilizando $\alpha = .05$.

Según el ejemplo 13.3-1, el tiempo de espera *efectivo* es $L = 2$ días. Por lo tanto,

$$\mu_L = DL = 100 \times 2 = 200 \text{ unidades}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L} = \sqrt{10^2 \times 2} = 14.14 \text{ unidades}$$

Si $K_{.05} = 1.645$, las existencias de reserva se calculan como

$$B \geq 14.14 \times 1.645 \approx 23 \text{ luces de neón}$$

La política de inventario óptimo (de reserva) requiere pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 223 ($= B + \mu_L = 23 + 2 \times 100$) unidades.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.1A

1. En el ejemplo 16.1-1, determine la política de inventario óptima en cada uno de los siguientes casos:
   *(a) Tiempo de espera = 15 días.
   (b) Tiempo de espera = 23 días.
   (c) Tiempo de espera = 8 días.
   (d) Tiempo de espera = 10 días.
2. La demanda diaria de un popular CD en una tienda de música es aproximadamente $N(200, 20)$. El costo de conservar el CD en los anaqueles es de \$.04 por disco por día. A la tienda le cuesta \$100 colocar un nuevo pedido. El tiempo de espera para la entrega es de 7 días. Determine la política de inventario óptima de la tienda dado que la tienda desee limitar la probabilidad de un faltante a cuando mucho .02.
3. La demanda diaria de rollos de película para cámara en una tienda de regalos es $N(300, 5)$. El costo de retener un rollo en la tienda es de \$.02 por día, y el costo fijo de colocar un pedido de reposición es de \$30. La política de inventario de la tienda es pedir 150 rollos siempre que el nivel del inventario se reduzca a 80 unidades. Al mismo tiempo, mantiene siempre una existencia de reserva de 20 rollos.
   (a) Determine la probabilidad de quedarse sin existencias.
   (b) Dados los datos de la situación, recomiende la política de inventario para la tienda, puesto que la probabilidad de que haya faltantes no puede exceder el .10.

16.1.2 Modelo EOQ probabilístico

La base para el desarrollo del modelo EOQ "probabilizado" en la sección 16.1.1 es "plausible", pero no hay razón alguna para creer que el modelo produce una política de inventario óptima. El hecho de que la información pertinente en relación con la naturaleza probabilística de la demanda se ignore en un principio, sólo para ser "revivida" de una manera totalmente independiente en una etapa posterior de los cálculos, basta para refutar la optimalidad. Para remediar la situación, esta sección presenta un modelo más preciso en el cual la naturaleza probabilística de la demanda se incluye directamente en la información del modelo. Por supuesto, la precisión más alta se obtiene a expensas de cálculos más complejos.

La figura 16.3 ilustra un cambio típico del nivel de inventario con el tiempo. Pueden o no ocurrir faltantes durante los tiempos de espera (posiblemente aleatorios), como se ilustra por los ciclos 1 y 2, respectivamente. La política exige pedir la cantidad y, siempre que la cantidad del inventario disponible se reduzca a un nivel R. Como en el caso determinístico, el nivel de volver a pedir R es una función del tiempo de espera entre la colocación y la recepción de un pedido. Los valores óptimos de y y R se determinan minimizando la suma esperada de los costos de retención y los costos de faltantes por unidad de tiempo.

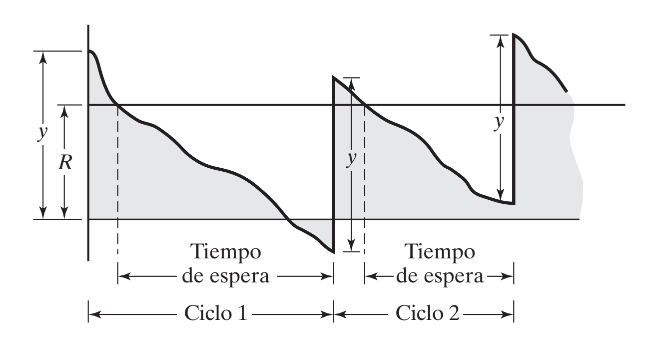
El modelo está basado en tres suposiciones:

1. La demanda no satisfecha durante el tiempo de espera se pone en rezago.
2. No se permite más de un pedido pendiente.
3. La distribución de la demanda durante el tiempo de espera permanece estacionaria con el tiempo.

Para desarrollar la función de costo total por unidad de tiempo, sean

$f(x)$ = fdp de la demanda, x, durante el tiempo de espera
D = Demanda esperada por unidad de tiempo
h = Costo de retención por unidad de inventario por unidad de tiempo
p = Costo por faltantes por unidad de inventario
K = Costo de preparación por pedido

FIGURA 16.3
Modelo de inventario probabilístico con faltantes



Ahora se determinan los elementos de la función de costos.

1. *Costo de preparación.* La cantidad aproximada de pedidos por unidad de tiempo es $\frac{D}{y}$, de modo que el costo de preparación por unidad de tiempo es aproximadamente $\frac{KD}{y}$.
2. *Costo de retención esperado.* Si I es el nivel de inventario promedio, el costo de retención esperado por unidad de tiempo es hI. El nivel de inventario promedio se calcula como

$$I = \frac{(y + E\{R - x\}) + E\{R - x\}}{2} = \frac{y}{2} + R - E\{x\}$$

   La fórmula promedia los inventarios inicial y final esperados en un ciclo, el cual es $y + E\{R-x\}$ y $E\{R-x\}$, respectivamente. Como una aproximación, la expresión ignora el caso en que $R - E\{x\}$ pueda ser negativo.
3. *Costo por faltantes esperado.* Los faltantes ocurren cuando $x > R$. Su valor esperado por ciclo se calcula como

$$S = \int_R^\infty (x - R)f(x)dx$$

Debido a que se supone que p es proporcional sólo a la cantidad faltante, el costo esperando por ciclo es pS, y, basándose en $\frac{D}{y}$ ciclos por unidad de tiempo, el costo por faltante por unidad de tiempo es $\frac{pS}{y/D} = \frac{pDS}{y}$.

La función de costo total resultante por unidad de tiempo es

$$\text{TCU}(y, R) = \frac{DK}{y} + h\left(\frac{y}{2} + R - E\{x\}\right) + \frac{pD}{y}\int_R^\infty (x - R)f(x)\,dx$$

Los valores óptimo, y^* y R^*, se determinan a partir de

$$\frac{\partial \text{TCU}}{\partial y} = -\left(\frac{DK}{y^2}\right) + \frac{h}{2} - \frac{pDS}{y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \text{TCU}}{\partial R} = h - \left(\frac{pD}{y}\right)\int_R^\infty f(x)dx = 0$$

Estas dos ecuaciones dan por resultado

$$y^* = \sqrt{\frac{2D(K + pS)}{h}} \tag{1}$$

$$\int_R^\infty f(x)\,dx = \frac{hy^*}{pD} \tag{2}$$

Los valores óptimos de y^* y R^* no pueden determinarse en formas cerradas. Se aplica un algoritmo iterativo, desarrollado por Hadley y Whitin (1963, págs. 169-174) a

las ecuaciones (1) y (2) para determinar la solución. El algoritmo converge en un número finito de iteraciones, siempre que haya una solución factible.

Para $R = 0$, las ecuaciones (1) y (2) producen

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2D(K + pE\{x\})}{h}}$$

$$\tilde{y} = \frac{PD}{h}$$

Los valores óptimos únicos de y y R existen cuando $\tilde{y} \geq \hat{y}$. El valor mínimo de y^* es $\sqrt{\frac{2KD}{h}}$, el cual ocurre cuando $S = 0$.

Los pasos del algoritmo son

Paso 0. Use la solución inicial $y_1 = y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$, y sea $R_0 = 0$. Establezca $i = 1$, y continúe con el paso i.

Paso i. Use y_i para determinar R_i a partir de la ecuación (2). Si $R_i \approx R_{i-1}$, deténgase; la solución óptima es $y^* = y_i$ y $R^* = R_i$. De lo contrario, use R_i en la ecuación (1) para calcular y_i. Establezca $i = i + 1$, y repita el paso i.

Ejemplo 16.1-2

Electro utiliza resina en su proceso de fabricación a razón de 1000 galones por mes. Colocar un pedido le cuesta $100 a Electro. El costo de retención por galón por mes es de $2, y el costo por faltante por galón es de $10. Los datos históricos muestran que la demanda durante el tiempo de espera es uniforme en el rango (0, 100) galones. Determine la política de colocación de pedidos óptima para Electro.

Utilizando los símbolos del modelo, tenemos

$D = 1000$ galones por mes
$K = \$100$ por pedido
$h = \$2$ por galón por mes
$p = \$10$ por galón
$f(x) = \frac{1}{100}, 0 \leq x \leq 100$
$E\{x\} = 50$ galones

Primero tenemos que verificar si el problema tiene una solución única. Con las ecuaciones de $\hat{y}$ y $\tilde{y}$ obtenemos

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2 \times 1000(100 + 10 \times 50)}{2}} = 774.6 \text{ galones}$$

$$\tilde{y} = \frac{10 \times 1000}{2} = 5000 \text{ galones}$$

Debido a que $\tilde{y} \geq \hat{y}$, existe una solución única para y^* y R^*.

La expresión para S se calcula como

$$S = \int_R^{100} (x - R)\frac{1}{100}\,dx = \frac{R^2}{200} - R + 50$$

Utilizando S en las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$y_i = \sqrt{\frac{2 \times 1000(100 + 10S)}{2}} = \sqrt{100{,}000 + 10{,}000S}\,\text{galones} \tag{3}$$

$$\int_R^{100} \frac{1}{100}\,dx = \frac{2y_i}{10 \times 1000} \tag{4}$$

La ecuación (4) produce

$$R_i = 100 - \frac{y_i}{50} \tag{5}$$

Ahora utilizamos las ecuaciones (3) y (5) para determinar la solución óptima.

Iteración 1

$$y_1 = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 1000 \times 100}{2}} = 316.23 \text{ galones}$$

$$R_1 = 100 - \frac{316.23}{50} = 93.68 \text{ galones}$$

Iteración 2

$$S = \frac{R_1^2}{200} - R_1 + 50 = .19971\,\text{galones}$$

$$y_2 = \sqrt{100{,}000 + 10{,}000 \times .19971} = 319.37\,\text{galones}$$

Por consiguiente,

$$R_2 = 100 - \frac{319.39}{50} - = 93.612$$

Iteración 3

$$S = \frac{R_2^2}{200} - R_2 + 50 = .20399\,\text{galones}$$

$$y_3 = \sqrt{100{,}000 + 10{,}000 \times .20399} = 319.44\,\text{galones}$$

Por lo tanto,

$$R_3 = 100 - \frac{319.44}{50} = 93.611\,\text{galones}$$

Debido a que $y_3 \approx y_3$ y $R_3 \approx R_2$, la solución óptima es $R^* \approx 93.611$ galones, $y^* \approx 319.44$ galones. Se puede utilizar el archivo *excelContRev.xls* para determinar la solución a cualquier grado de precisión especificando la tolerancia $|R_{i-1} - R_i|$. La política de inventario óptima exige pedir aproximadamente 320 galones siempre que el nivel del inventario se reduzca a 94 galones.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.1B

1. Por los datos dados en el ejemplo 16.1-2, determine lo siguiente:
   (a) El número aproximado de pedidos por mes.
   (b) El costo de preparación mensual esperado.
   (c) El costo de retención esperado por mes.
   (d) El costo por faltantes esperado por mes.
   (e) La probabilidad de que las existencias se agoten durante el tiempo de espera.

***2.** Resuelva el problema 16.1-2, suponiendo que la demanda durante el tiempo de espera se mantiene uniforme entre 0 y 50 galones.

***3.** En el ejemplo 16.1-2 suponga que la demanda durante el tiempo de espera se mantiene uniforme entre 40 y 60 galones. Compare la solución con la obtenida en el ejemplo 16.1-2, e interprete los resultados. (*Sugerencia:* En ambos problemas, $E\{x\}$ es la misma, pero la varianza en este problemas es más pequeña.)

4. Determine la solución óptima para el ejemplo 16.1-2, suponiendo que la demanda durante el tiempo de espera sea $N(100, 2)$. Suponga que $D = 10{,}000$ galones por mes, $h = \$2$ por galón por mes, $p = \$4$ por galón, y $K = \$20$.

16.2 MODELOS DE UN SOLO PERIODO

Esta sección se ocupa de artículos de inventario que están en existencia durante un solo periodo de tiempo. Al final del periodo se desechan las unidades sobrantes, si las hay, como en el cado de artículos de moda. Se desarrollarán dos modelos. La diferencia entre ellos es si se incurre o no en un costo de preparación para colocar un pedido.

Los símbolos utilizados en el desarrollo de los modelos incluyen

K = Costo de preparación por pedido

h = Costo de retención por unidad retenida durante el periodo

p = Costo de penalización por unidad faltante durante el periodo

$f(D)$ = pdf de la demanda, D, durante el periodo

y = Cantidad de pedido

x = Inventario disponible antes de que se coloque un pedido

El modelo determina el valor óptimo de y que minimiza la suma de los costos de retención y por faltantes. Si $y(=y^*)$ es óptima, la política de inventario exige pedir y^*-x si $x < y$; de lo contrario, no se coloca pedido alguno.

16.2.1 Modelo sin preparación (Modelo *Newsvendor*)

Este modelo se conoce en la literatura como modelo *newsvendor* (el nombre original clásico es modelo *del periodiquero*). Tiene que ver con el almacenamiento y venta de periódicos.

Las suposiciones del modelo son

1. La demanda ocurre al instante en el inicio del periodo inmediatamente después de que se recibe el pedido.
2. No se incurre en ningún costo de preparación.

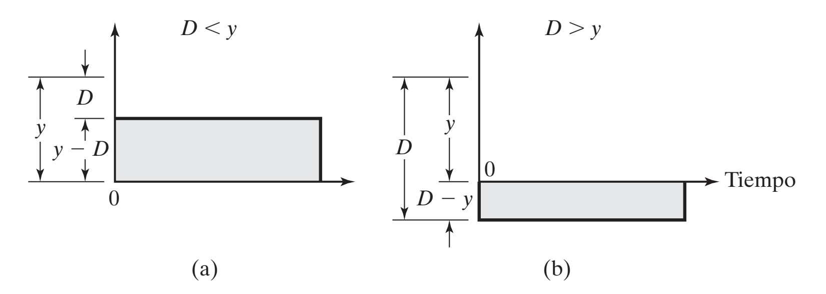


FIGURA 16.4
Inventario con retención y faltantes en un modelo de un solo periodo

La figura 16.4 muestra la posición del inventario después de que se satisface la demanda, D. Si $D < y$, la cantidad $y - D$ se mantiene durante el periodo. Si $D > y$, habrá una cantidad faltante si $D - y$.

El costo esperado durante el periodo, $E\{C(y)\}$, se expresa como

$$E\{C(y)\} = h\int_0^y (y - D)f(D)dD + p\int_y^\infty (D - y)f(D)dD$$

Se puede demostrar que la función $E\{C(y)\}$ es convexa en y, y por lo tanto tiene un mínimo único. Si tomamos la primera derivada $E\{C(y)\}$ con respecto a y y la igualamos a cero, obtenemos

$$h\int_0^y f(D)\,dD - p\int_0^\infty f(D)\,dD = 0$$

o

$$hP\{D \leq y\} - p(1 - P\{D \leq y\}) = 0$$

o

$$P\{D \leq y^*\} = \frac{p}{p + h}$$

Si la demanda, D, es discreta, entonces la función de costo asociada es

$$E\{C(y)\} = h\sum_{D=0}^{y}(y - D)f(D) + p\sum_{D=y+1}^{\infty}(D - y)f(D)$$

Las condiciones necesarias para optimalidad son

$$E\{C(y - 1)\} \geq E\{C(y)\} \text{ y } E\{C(y + 1)\} \geq E\{C(y)\}$$

Estas condiciones también son suficientes porque $E\{C(y)\}$ es una función convexa. Después de algunas manipulaciones algebraicas, la aplicación de estas condiciones da por resultado las siguientes desigualdades para determinar y^*:

$$P\{D \leq y^* - 1\} \leq \frac{p}{p + h} \leq P\{D \leq y^*\}$$

Ejemplo 16.2-1

El propietario de un puesto de periódicos desea determinar la cantidad de ejemplares de *USA Now* que debe tener en existencia al inicio de cada día. El propietario paga 30 centavos por un ejemplar y lo vende a 75 centavos. La venta del periódico suele ocurrir entre 7:00 y 8:00 A.M. (la demanda es prácticamente instantánea). Los periódicos que sobran al final del día se reciclan y se obtiene un ingreso de 5 centavos por ejemplar. ¿Cuántos ejemplares debe tener en existencia cada mañana?, suponiendo que la demanda del día puede describirse como

(a) Una distribución normal con media de 300 ejemplares y desviación estándar de 20.

(b) Una fdp discreta, $f(D)$, definida como

D	200	220	300	320	340
$f(D)$	.1	.2	.4	.2	.1

Los costos de retención y penalización no se definen de forma directa en esta situación. Los datos del problema indican que cada ejemplar no vendido le costará al dueño $30 - 5 = 25$ centavos, y que el costo de penalización por agotamiento de las existencias es de $75 - 30 = 45$ centavos por ejemplar. Por lo tanto, en función de los parámetros del problema de inventario, tenemos $h = 25$ centavos por ejemplar por día y $p = 45$ centavos por ejemplar por día.

Primero determinamos la relación crítica como

$$\frac{p}{p + h} = \frac{45}{45 + 25} = .643$$

Caso (a). La demanda D es $N(300, 20)$. Podemos utilizar la plantilla *excelStatTables.xls* para determinar la cantidad de pedido óptima ingresando 300 en F15, 20 en G15, y .643 en L15, y así se obtiene la respuesta deseada de 307.33 periódicos en R15. Además, podemos utilizar las tablas normales estándar del apéndice A. Defina

$$z = \frac{D - 300}{20}$$

Entonces a partir de las tablas normales

$$P\{z \leq .366\} \approx .643$$

o

$$\frac{y^* - 300}{20} = .366$$

Por lo tanto, $y^* = 307.3$. El pedido óptimo es aproximadamente de 308 ejemplares.

Caso (b). La demanda D sigue una fdp discreta, $f(D)$. Pero antes determinamos la FDA $P\{D \leq y\}$ como

y	200	220	300	320	340
$P\{D \leq y\}$	.1	.3	.7	.9	1.0

Para la relación crítica calculada de .643, tenemos

$$P(D \leq 220) \leq .643 \leq P(D \leq 300)$$

Por lo tanto, $y^* = 300$ ejemplares.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.2A

1. Para el modelo de un solo periodo, demuestre que para la demanda discreta la cantidad de pedido óptima se determina a partir de

$$P\{D \leq y^* - 1\} \leq \frac{p}{p + h} \leq P\{D \leq y^*\}$$

2. La demanda de un artículo durante un solo periodo ocurre de manera instantánea al inicio del periodo. La fdp asociada se mantiene uniforme entre 10 y 15 unidades. Debido a la dificultad de estimar los parámetros de costo, la cantidad de pedido se determina de modo que la probabilidad de un excedente o de un faltante no exceda de .1. ¿Es posible satisfacer ambas condiciones al mismo tiempo?

***3.** El costo de retención unitario en una situación de inventario de un solo periodo es de $1. Si la cantidad de pedido es de 4 unidades, encuentre el intervalo permisible del costo de penalización unitario implicado por las condiciones óptimas. Suponga que la demanda ocurre instantáneamente al inicio del periodo y la función de densidad de probabilidad de la demanda es como sigue:

D	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(D)$	.05	.1	.1	.2	.25	.15	.05	.05	.05

4. La librería de la U de A ofrece un programa de reproducción de apuntes de clase para profesores participantes. El profesor Yataha le da clases a un grupo de primer año de entre 200 y 250 estudiantes, distribuidos de manera uniforme. La reproducción de una copia cuesta $10 y se vende a $25. Los estudiantes compran sus libros al inicio del semestre. Las copias de los apuntes del profesor Yataha que no se venden se trituran para reciclarlas. Mientras tanto, una vez que la librería se queda sin copias, no se imprimen más. Si la librería desea maximizar sus ingresos, ¿cuántas copias debe imprimir?

5. QuickStop vende todos los días café y donas a sus clientes a las 6:00 A.M. La tienda compra las donas a 7 centavos cada una y las vende a 25 centavos hasta las 8:00 A.M. Después de esa hora las donas se venden a 5 centavos cada una. La cantidad de clientes que compran donas entre las 6:00 y las 8:00 está uniformemente distribuida entre 30 y 50. Cada cliente suele pedir 3 donas con café. ¿Cuántas donas debe tener aproximadamente en existencia QuickStop cada mañana para maximizar los ingresos?

***6.** Colony Shop se está surtiendo de abrigos para el siguiente invierno. Colony paga \$50 por un abrigo y lo vende a \$110. Al final de la temporada invernal, Colony ofrece los abrigos a \$55 cada uno. La demanda de abrigo durante la temporada invernal es de más de 20 pero menor que o igual a 30, todos con iguales probabilidades. Debido a que la temporada invernal es corta, el costo de retención es insignificante. Asimismo, el gerente de Colony no cree que la escasez de sacos provoque penalizaciones. Determine la cantidad de pedido óptima que maximizará el ingreso para Colony Shop. Puede utilizar una aproximación continua.

7. Para el modelo de un solo periodo, suponga que el artículo se consume de modo uniforme durante el periodo (y no de forma instantánea al inicio del periodo). Desarrolle el modelo de costo asociado, y determine la cantidad de pedido óptima.

8. Resuelva el ejemplo 16.2.-1 suponiendo que la demanda es continua y uniforme durante el periodo, y que la fdp de la demanda es uniforme entre 0 y 100. (*Sugerencia:* Aproveche los resultados del problema 7.)

16.2.2 Modelo con preparación (Política *s*-*S*)

El presente modelo difiere del de la sección 16.2.1 en que se incurre en un costo de preparación K. Utilizando la misma notación, el costo esperado total por periodo es

$$\begin{aligned} E\{\overline{C}(y)\} &= K + E\{C(y)\} \\ &= K + h\int_0^y (y - D)f(D)dD + p\int_y^\infty (D - y)f(D)dD \end{aligned}$$

Como se muestra en la sección 16.2.1, el valor óptimo y^* debe satisfacer

$$P\{y \leq y^*\} = \frac{p}{p + h}$$

Ya que K es constante, el valor mínimo de $E\{\overline{C}(y)\}$ también debe ocurrir en y^*.

En la figura 16.5, $S = y^*$, y el valor de $s(< S)$ se determina a partir de la ecuación

$$E\{C(s)\} = E\{\overline{C}(S)\} = K + E\{C(S)\}, s < S$$

La ecuación resulta en otro valor $s_1(>S)$, el cual se descarta.

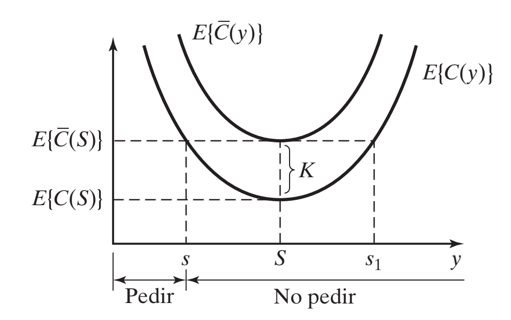


FIGURA 16.5
Política de pedir óptima (*s*-*S*) en un modelo de un solo periodo con costo de preparación

Suponga que x es la cantidad disponible antes de que se coloque un pedido. ¿Cuánto debe pedirse? Esta pregunta se responde con tres condiciones:

1. $x < s$.
2. $s \leq x \leq S$.
3. $x > S$.

Caso 1 ($x > s$). Debido a que x ya está disponible, su costo equivalente es $E\{C(x)\}$. Si se pide cualquier cantidad adicional $y - x$ ($y > x$), el costo correspondiente dada y es $E\{\overline{C}(y)\}$, el cual incluye el costo de preparación K. De acuerdo con la figura 16.5, tenemos

$$\min_{y>x} E\{\overline{C}(y)\} = E(\overline{C}(S)) < E\{C(x)\}$$

Por lo tanto, la política de inventario óptima en este caso es pedir $S - x$ unidades.

Caso 2 ($s \leq x \leq S$). De acuerdo con la figura 16.5, tenemos

$$E\{C(x)\} \leq \min_{y>x} E\{\overline{C}(y)\} = E(\overline{C}(S))$$

Por lo tanto, *no* es ventajoso pedir en este caso, y $y^* = x$.

Caso 3 ($x > S$). De acuerdo con la figura 16.5, tenemos $y > x$,

$$E\{C(x)\} < E\{\overline{C}(y)\}$$

Esta condición indica que, como en el caso (2), no es ventajoso colocar un pedido; es decir, $y^* = x$.

La política de inventario óptima, más conocida como **política *s*-*S***, se resume como

Si $x < s$, pedir $S - x$

Si $x \geq s$, no pedir

La optimalidad de la política *s*-*S* está garantizada porque la función de costo asociada es convexa.

Ejemplo 16.2-2

La demanda diaria de un artículo durante un solo periodo ocurre de forma instantánea al inicio del periodo. La fdp de la demanda es uniforme entre 0 y 10 unidades. El costo de retención unitario del artículo durante el periodo es de \$.50, y el costo de penalización unitario por agotamiento de las existencias es de \$4.50. Se incurre en un costo fijo de \$25 cada vez que se coloca un pedido. Determine la política de inventario óptima para el artículo.

Para determinar y^*, considere

$$\frac{p}{p+h} = \frac{4.5}{4.5 + .5} = .9$$

Inclusive,

$$P\{D \leq y^*\} = \int_0^{y^*} \frac{1}{10}\, dD = \frac{y^*}{10}$$

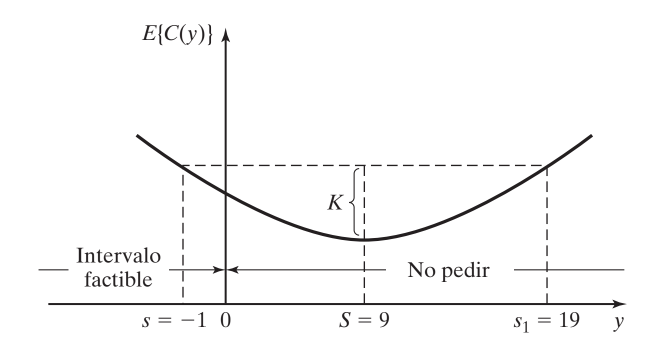


FIGURA 16.6
Política *s*-*S* aplicada al ejemplo 16.2-2

Por lo tanto, $S = y^* = 9$.

La función de costo esperada es

$$E\{C(y)\} = .5\int_0^y \frac{1}{10}(y - D)dD + 4.5\int_y^{10} \frac{1}{10}(D - y)dD$$

$$= .25y^2 - 4.5y + 22.5$$

El valor de s se determina resolviendo

$$E\{C(s)\} = K + E\{C(S)\}$$

O bien

$$.25s^2 - 4.5s + 22.5 = 25 + .25S^2 - 4.5S + 22.5$$

Si $S = 9$, la ecuación anterior se reduce a

$$s^2 - 18s - 19 = 0$$

La solución de esta ecuación es $s = -1$, o $s = 19$. Se descarta el valor de $s > S$. Debido a que el valor restante es negativo $(=-1)$, s no tiene un valor factible. Como se muestra en la figura 16.6, la política de inventario óptima en este caso exige que no se pida el artículo. Este resultado se suele presentar cuando la función de costo es "plana" o cuando el costo de preparación es alto con respecto a los demás costos del modelo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.2B

***1.** Determine la política de inventario óptima para la situación en el ejemplo 16.2-2, suponiendo que el costo de preparación es de $5.

2. En el modelo de un solo periodo de la sección 16.2.1, suponga que el modelo maximiza la utilidad y que se incurre en un costo de preparación K. Si r es el precio de venta unitario y utilizando la información de la sección 16.2-1, desarrolle una expresión para la utilidad esperada, y determine la cantidad de pedido óptima. Resuelva el problema numéricamente para $r = \$3$, $c = \$2$, $p = \$4$, $h = \$1$ y $K = \$10$. La fdp de la demanda es uniforme entre 0 y 10.

3. Resuelva el problema 5, conjunto 16.2a, suponiendo que hay un costo fijo de $10 asociado con la entrega de las donas.

16.3 MODELO DE VARIOS PERIODOS

Esta sección presenta un modelo de varios periodos en el supuesto de que no haya costo de preparación. Adicionalmente, el modelo permite un retraso en el cumplimiento de la demanda y supone un retraso cero en la entrega. Además, asume que una fdp estacionaria, $f(D)$, describe la demanda en cualquier periodo.

El modelo de varios periodos considera el valor descontado del dinero. Si $\alpha\ (< 1)$ es el factor de descuento por periodo, entonces una cantidad \$$A$ disponible durante n periodos a partir de ahora tiene un valor actual de \$$\alpha^n A$.

Suponga que la situación del inventario comprende n periodos y que la demanda no satisfecha se deja pendiente exactamente un periodo. Defina

$F_i(x_i)$ = Utilidad máxima esperada durante los periodos $i, i+1, \ldots,$ y n, dado que x_i es la cantidad disponible antes de que se coloque un pedido en el periodo i.

Aplicando la notación utilizada en la sección 16.2 y suponiendo que c y r son el costo y el ingreso por unidad, respectivamente, la situación del inventario puede formularse utilizando el siguiente modelo de programación dinámica probabilística (el capítulo 24, en el sitio web, detalla este punto):

$$F_{n+1}(y_n - D) = 0$$

$$\begin{aligned} F_i(x_i) = \max_{y_i \geq x_i} \bigg\{ &-c(y_i - x_i) + \int_0^{y_i} [rD - h(y_i - D)] f(D) dD \\ &+ \int_{y_i}^{\infty} [ry_i + \alpha r(D - y_i) - p(D - y_i)] f(D) dD \\ &+ \alpha \int_0^{\infty} F_{i+1}(y_i - D) f(D) dD \bigg\}, \ i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

El valor de x_i puede ser negativo porque la demanda no satisfecha se quedó pendiente. Se incluye la cantidad $\alpha r(D - y_i)$ en la segunda integral porque $(D - y_i)$ es la demanda no satisfecha en el periodo i que se debe satisfacer en el periodo $i + 1$.

El problema puede resolverse de manera recursiva. En el caso en que la cantidad de periodos es infinita, la ecuación recursiva se reduce a

$$\begin{aligned} F(x) = \max_{y \geq x} \bigg\{ &-c(y - x) + \int_0^{y} [rD - h(y - D)] f(D) dD \\ &+ \int_{y}^{\infty} [ry + \alpha r(D - y) - p(D - y)] f(D) dD \\ &+ \alpha \int_0^{\infty} F(y - D) f(D) dD \bigg\} \end{aligned}$$

donde x y y son los niveles del inventario durante cada periodo antes y después de recibir un pedido, respectivamente.

El valor óptimo de y se determina a partir de la siguiente condición necesaria, la cual también resulta ser suficiente porque la función del ingreso esperado $F(x)$ es cóncava.

$$\frac{\partial(.)}{\partial y} = -c - h\int_0^y f(D)\,dD + \int_y^\infty [(1-\alpha)r + p]f(D)dD$$
$$+ \alpha\int_0^\infty \frac{\partial F(y-D)}{\partial y} f(D)dD = 0$$

El valor de $\frac{\partial F(y-D)}{\partial y}$ se determina como sigue. Si hay más unidades β (> 0) disponibles al inicio del siguiente periodo, la utilidad durante el siguiente periodo se incrementará en $c\beta$, porque se tiene que pedir esta cantidad mucho menor. Esto significa que

$$\frac{\partial F(y-D)}{\partial y} = c$$

La condición necesaria es por lo tanto

$$-c - h\int_0^y f(D)\,dD + \left[(1-\alpha)r + p\right]\left(1 - \int_0^y f(D)dD\right) + \alpha c\int_0^\infty f(D)\,dD = 0$$

Por tanto, el nivel óptimo del inventario y^* se determina a partir de

$$\int_0^{y^*} f(D)\,dD = \frac{p + (1-\alpha)(r-c)}{p + h + (1-\alpha)r}$$

La política de inventario óptima durante cada periodo, si el nivel del inventario de entrada es x, se da por tanto como

Si $x < y^*$, pedir $y^* - x$

Si $x \geq y^*$, no pedir

CONJUNTO DE PROBLEMAS 16.3A

1. Considere un modelo de inventario probabilístico de dos periodos en el cual el cumplimiento de la demanda se queda pendiente, y los pedidos se reciben con retraso cero en entrega. La fdp de la demanda por periodo es uniforme entre 0 y 10, y los parámetros de costos se dan como

Precio de venta unitario = $2
Precio de compra unitario = $1
Costo de retención unitario por mes = $.10
Costo de penalización por mes = $3
Factor de descuento = .8

Encuentre la política de inventario óptima para los dos periodos, suponiendo que el inventario inicial en el periodo 1 es cero.

*2. La fdp de la demanda por periodo en un modelo de inventario de horizonte infinito se da como

$$f(D) = .08D, 0 \leq D \leq 5$$

Los parámetros de costos unitarios son

Precio de venta unitario = \$10
Precio de compra unitario = \$8
Costo de retención unitario = \$1
Costo de penalización unitario por mes = \$10
Factor de descuento = .9

Determine la política de inventario óptima suponiendo un retraso en la entrega cero y que el no cumplimiento de la demanda se queda pendiente.

3. Considere la situación de inventario de horizonte infinito con retraso cero en la entrega y cumplimiento de la demanda pendiente. Desarrolle la política de inventario óptima basado en la minimización del costo dado que

Costo de retención por z unidades = hz^2

Costo de penalización por z unidades = px^2

Demuestre que para el caso especial en que $h = p$, la solución óptima es independiente de la fdp de la demanda.

BIBLIOGRAFÍA

Cohen, R., y R. Dunford, "Forecasting for Inventory Control: An Example of When 'Simple' Means 'Better'", *Interfaces,* vol. 16, núm. 6, págs. 95-99, 1986.

Hadley, G., y T. Whitin, *Analysis of Inventory Systems,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1963.

Nahmias, S., *Production and Operations Analysis*, 5a. ed., Irwin, Homewood. IL, 2005.

Silver, E., D. Pyke, y R. Peterson, *Decision Systems for Inventory Management and Production Control*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 1998.

Zipken, P., *Foundations of Inventory Management,* McGraw-Hill, Boston, MA, 2000.

CAPÍTULO 17

Cadenas de Markov

17.1 DEFINICIÓN DE UNA CADENA DE MARKOV

Sea X_i una variable aleatoria que caracteriza el estado del sistema en puntos discretos en el tiempo $t = 1, 2\ldots$. La familia de variables aleatorias $\{X_i\}$ forma un **proceso estocástico** con una cantidad finita o infinita de estados.

Ejemplo 17.1-1 (Mantenimiento de una máquina)

La condición de una máquina en el momento del mantenimiento preventivo mensual es mala, regular o buena. Para el mes *t*, el proceso estocástico en esta situación se representa como sigue:

$$X_t = \left\{\begin{array}{l} 0,\ \text{si la condición es mala} \\ 1,\ \text{si la condición es regular} \\ 2,\ \text{si la condición es buena} \end{array}\right\},\ t = 1, 2, \ldots$$

La variable aleatoria X_t es *finita* porque representa tres estados: malo (0), regular (1) y bueno (2).

Ejemplo 17.1-2 (Taller)

Los trabajos llegan al azar a un taller a razón de 5 trabajos por hora. El proceso de llegada sigue una distribución de Poisson, la cual, en teoría, permite que llegue cualquier cantidad de trabajos durante el intervalo de tiempo $(0, t)$. El proceso de estado infinito que describe la cantidad de trabajos que llegan es $X_t = 0,1,2,\ldots, t > 0$.

Proceso de Markov. Un proceso estocástico es un proceso de Markov si un estado futuro depende sólo del estado inmediatamente anterior. Esto significa que dados los

tiempos cronológicos $t_0, t_1, \ldots, t_n$, la familia de variables aleatorias $\{X_{t_n}\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es un proceso de Markov si

$$P\{X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = x_0\} = P\{X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}$$

En un proceso Markoviano con n estados exhaustivos y mutuamente excluyentes, las probabilidades en un punto específico del tiempo $t = 0,1,2,\ldots$ se definen como

$$p_{ij} = P\{X_t = j | X_{t-1} = i\}, i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n, t = 0, 1, 2, \ldots, T$$

Esto se conoce como **probabilidad de transición en un paso** al ir del estado i en el instante $t - 1$ al estado j en el instante t. Por definición, tenemos

$$\sum_j p_{ij} = 1, i = 1, 2, \ldots, n$$

$$p_{ij} \geq 0, (i, j) = 1, 2, \ldots, n$$

La notación utilizada en la matriz es una forma conveniente de resumir las probabilidades de transición en un paso:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz **P** define una **cadena de Markov**. Tiene la propiedad de que todas sus probabilidades de transición p_{ij} son estacionarias e independientes a lo largo del tiempo. Aunque una cadena de Markov puede incluir un número infinito de estados, la presentación en este capítulo se limita a sólo cadenas finitas, ya que es el único que se necesita en el texto.

Ejemplo 17.1-3 (Problema del jardinero)

Cada año, durante la temporada de siembra de marzo a septiembre, un jardinero realiza una prueba química para verificar la condición de la tierra. Según el resultado de la prueba, la productividad en la nueva temporada puede ser uno de tres estados: (1) buena, (2) regular y (3) mala. A lo largo de los años, el jardinero ha observado que la condición de la tierra del año anterior afecta la productividad del año actual y que la situación se describe mediante la siguiente cadena de Markov:

Estado del sistema este año

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} \textit{Estado del} \\ \textit{sistema el} \\ \textit{siguiente año} \end{matrix} \begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases} & \!\!\begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Las probabilidades de transición muestran que la condición de la tierra puede o deteriorarse o permanecer como está pero nunca mejorar. Por ejemplo, si la condición de la tierra es buena en este año (estado 1) hay 20% de que no cambie el año siguiente, 50% de probabilidad de que

sea regular (estado 2), y 30% de probabilidad de que se deteriorará a una condición mala (estado 3). El jardinero modifica las probabilidades de transición **P** utilizando un fertilizante orgánico. En este caso, la matriz de transición se vuelve:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

El uso de fertilizante puede conducir a mejorar las condiciones del suelo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.1A

1. Un profesor de ingeniería adquiere una computadora nueva cada dos años. El profesor puede elegir de entre tres modelos: *M*l, *M*2 y *M*3. Si el modelo actual es M_1, la siguiente computadora puede ser *M*2 con probabilidad .2, o *M*3 con probabilidad .15. Si el modelo actual es *M*2, las probabilidades de cambiar a *M*l y *M*3 son .6 y .25, respectivamente. Pero si el modelo actual es *M*3, entonces las probabilidades de comprar los modelos *M*l y *M*2 son .5 y .1, respectivamente. Represente la situación como una cadena de Markov.

***2.** Una patrulla policiaca vigila un vecindario conocido por sus actividades pandilleriles. Durante un patrullaje hay 60% de probabilidades de llegar a tiempo al lugar donde se requiere la ayuda; si no sucede algo, continuará el patrullaje regular. Después de recibir una llamada, hay 10% de probabilidades de cancelación (en cuyo caso el patrullaje normal se reanuda), y 30% de probabilidad de que la unidad ya esté respondiendo a la llamada anterior. Cuando la patrulla llega a la escena del suceso, hay 10% de probabilidades de que los instigadores hayan desaparecido (en cuyo caso reanuda su patrullaje), y 40% de probabilidades de que se haga una aprehensión de inmediato. De otro modo, los oficiales rastrearán el área. Si ocurre una aprehensión, hay 60% de probabilidades de trasladar a los sospechosos a la estación de policía, de lo contrario son liberados y la unidad regresa a patrullar. Exprese las actividades probabilísticas de la patrulla en la forma de una matriz de transición.

3. *Cyert and Associates (1963).* Banco 1 ofrece préstamos los que o se liquidan cuando se vencen o se retrasan. Si el pago sobre un préstamo se retrasa más de cuatro trimestres (1 año), Banco 1 considera el préstamo como una deuda incobrable y la cancela. La siguiente tabla proporciona una muestra de la experiencia anterior de Banco 1 con préstamos.

Cantidad prestada	Trimestres de retraso	Historia de pagos
$10,000	0	$2000 pagados, $3000 retrasados un trimestre, $3000 retrasados 2 trimestres, y el resto retrasados 3 trimestres.
$25,000	1	$4000 pagados, $12,000 retrasados un trimestre, $6000 retrasados dos trimestres, y el resto retrasado 3 trimestres.
$50,000	2	$7500 pagados, $15,000 retrasados un trimestre, y el resto retrasado 2 trimestres.
$50,000	3	$42,000 pagados, y el resto retrasado un trimestre.
$100,000	4	$50,000 pagados.

Exprese la situación del préstamo de Banco 1 como una cadena de Markov.

4. *Pliskin and Tell (1981).* Los pacientes que sufren de falla de riñón pueden conseguir un trasplante o someterse a diálisis periódicas. Durante un año cualquiera, 30% se somete a trasplantes cadavéricos y 10% recibe riñones de donadores vivos. En el año después de un trasplante, 30% de los trasplantes cadavéricos y 15% de los recipiendarios de donado-

res vivos regresan a la diálisis. Los porcentajes de muertes entre los dos grupos son 20% y 10%, respectivamente. De aquellos que están en el grupo de diálisis, 10% mueren, y de los que sobreviven más de un año después de un trasplante, 5% mueren y 5% regresan a la diálisis. Represente la situación como una cadena de Markov.

17.2 PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN ABSOLUTAS Y DE *n* PASOS

Dada la matriz de transición **P** de una cadena de Markov y el vector de probabilidades iniciales $\mathbf{a}^{(0)} = \{a_j^{(0)}, j = 1, 2, \ldots, n\}$, las probabilidades absolutas $\mathbf{a}^{(n)} = \{a_j^{(n)}, j = 1, 2, \ldots, n\}$ después de $n(> 0)$ transiciones se calculan como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^{(1)} &= \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P} \\
\mathbf{a}^{(2)} &= \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^2 \\
\mathbf{a}^{(3)} &= \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^2\mathbf{P} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^3 \\
&\vdots \\
\mathbf{a}^{(n)} &= \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^n
\end{aligned}$$

La matriz $\mathbf{P}^n$ se conoce como la **matriz de transición de *n* pasos**. A partir de estos cálculos, podemos ver que

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{P}$$

y

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-m}\mathbf{P}^m, 0 < m < n$$

Éstas se conocen como ecuaciones de **Chapman-Kolomogorov**.

Ejemplo 17.2-1

La siguiente matriz de transición es aplicable al problema del jardinero con fertilizante (ejemplo 17.1-3):

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\overset{\begin{matrix}1 & \quad 2 & \quad 3\end{matrix}}{\begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}}$$

La condición inicial de la tierra es buena, es decir $\mathbf{a}^{(0)} = (1,0,0)$. Determine las probabilidades absolutas de los tres estados del sistema después de 1,8 y 16 temporadas de siembra.

$$\mathbf{P}^8 = \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} .101753 & .525514 & .372733 \\ .101702 & .525435 & .372863 \\ .101669 & .525384 & .372863 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{16} = \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}^{16} = \begin{pmatrix} .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, las probabilidades absolutas requeridas se calculan como

$$\mathbf{a}^{(1)} = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix} = (.30 \quad .60 \quad .1)$$

$$\mathbf{a}^{(8)} = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} .101753 & .525514 & .372733 \\ .101702 & .525435 & .372863 \\ .101669 & .525384 & .372863 \end{pmatrix} = (.101753 \quad .525514 \quad .372733)$$

$$\mathbf{a}^{(16)} = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \end{pmatrix} = (.101659 \quad .52454 \quad .372881)$$

Las filas de $\mathbf{P}^8$ y el vector de probabilidades absolutas $\mathbf{a}^{(8)}$ son casi idénticos. El resultado es más evidente para $\mathbf{P}^{16}$. Ello demuestra que, a medida que la cantidad de transiciones aumenta, las probabilidades absolutas se vuelven independientes del $\mathbf{a}^{(0)}$ inicial. Las probabilidades resultantes se conocen como **probabilidades de estado estable**.

Comentarios. Los cálculos asociados con las cadenas de Markov son tediosos. La plantilla *excelMarkovChains.xls* proporciona una hoja de cálculo general fácil de usar para realizar estos cálculos (vea el *Momento de Excel* después del ejemplo 17.4-1).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.2A

1. Considere el problema 1, conjunto 17.1a. Determine la probabilidad de que el profesor compre el modelo actual en 4 años.

***2.** Considere el problema 2, conjunto 17.1a. Si la patrulla se encuentra en este momento en la escena de una llamada, determine la probabilidad de que haga una aprehensión en dos patrullajes.

3. Considere el problema 3, conjunto 17.1a. Suponga que actualmente Banco 1 tiene préstamos pendientes que ascienden a $500,000. De éstos, $100,000 son nuevos, $50,000 están retrasados un trimestre, $150,000 están retrasados dos trimestres, $100,000 están retrasados tres trimestres, y el resto están retrasados más de tres trimestres. ¿Cuál sería la situación de estos préstamos después de dos ciclos de préstamos?

4. Considere el problema 4, conjunto 17.1a.

(a) Para un paciente al que se está tratando con diálisis, ¿cuál es la probabilidad de recibir un trasplante en dos años?

(b) Para un paciente que ha sobrevivido más de un año, ¿cuál es la probabilidad de que sobreviva cuatro años más?

5. Un juego de lanzamiento de dados utiliza una cuadrícula de cuatro casillas. Las casillas están designadas en sentido horario como A, B, C y D con retribuciones monetarias de $4, − $2, − $6 y $9, respectivamente. Comenzando en la casilla A, lanzamos el dado para determinar la siguiente casilla a la que nos moveremos en el sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, si el dado muestra 2, nos movemos a la casilla C. El juego se repite utilizando la última casilla como punto inicial.

(a) Exprese el problema como una cadena de Markov.

(b) Determine la ganancia o pérdida esperadas después de lanzar el dado 5 veces.

17.3 CLASIFICACIÓN DE LOS ESTADOS EN UNA CADENA DE MARKOV

Los estados de una cadena de Markov se clasifican con base en la probabilidad de transición p_{ij} de $\mathbf{P}$.

1. Un estado j es **absorbente** si está seguro de regresar a sí mismo en una transición; es decir, $p_{ij} = 1$.
2. Un estado j es **transitorio** si puede llegar a otro estado pero no puede regresar desde otro estado. Matemáticamente, esto sucederá si $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, para todas las i.
3. Un estado j es recurrente si la probabilidad de ser revisitado desde otros estados es 1. Esto puede suceder si, y sólo si, el estado no es transitorio.
4. Un estado j es **periódico** con periodo de $t > 1$ si es posible un retorno sólo en $t, 2t, 3t, \ldots$ pasos. Esto significa que $p_{jj}^{(n)} = 0$ cuando n no es divisible entre t.

Con base en las definiciones dadas, una cadena de Markov *finita* no puede constar de todos los estados transitorios porque, por definición, la propiedad transitoria requiere entrar a otro estado de "atrapamiento" y nunca volver a visitar el estado transitorio. El estado de "atrapamiento" no necesita ser un solo estado absorbente. Por ejemplo, considere la cadena

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & .3 & .7 \\ 0 & 0 & .4 & .6 \end{pmatrix}$$

Los estados 1 y 2 son transitorios porque no se puede volver a entrar a ellos una vez que el sistema se queda "atrapado" en los estados 3 y 4. Un **conjunto cerrado** lo constituyen los estados 3 y 4, que en cierta forma desempeñan el papel de un estado absorbente. Por definición, todos los estados de un *conjunto cerrado* deben **comunicarse**, lo cual significa que es posible ir de cualquier estado a cualquier otro estado del conjunto en una o más transiciones; es decir, $p_{ij}^{(n)} > 0$ para todas las $i \neq j$ y $n \geq 1$. Observe que cada uno de los estados 3 y 4 puede ser absorbente si $p_{33} = p_{44}$.

Se dice que una cadena de Markov es **ergódica** si todos los estados son *recurrentes* y **aperiódica** (no periódica). En este caso las probabilidades absolutas después de n transiciones, $\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a}^{(0)}\mathbf{P}^n$, siempre convergen de forma única a una distribución limitante (estado estable) que es independiente de las probabilidades iniciales $\mathbf{a}^{(0)}$, como se demostrará en la sección 17.4.

Ejemplo 17.3-1 (Estados absorbentes y transitorios)

Considere la cadena de Markov del jardinero sin fertilizante:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los estados 1 y 2 son transitorios porque llegan al estado 3 pero nunca se puede regresar a ellos. El estado 3 es absorbente porque $p_{33} = 1$. Estas clasificaciones también pueden verse cuando $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ es calculada. Por ejemplo, considere

$$\mathbf{P}^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado muestra que, a la larga, la probabilidad de volver a entrar al estado 1 o 2 es cero, y que la probabilidad de quedarse "atrapado" en el estado absorbente 3 es segura.

Ejemplo 17.3-2 (Estados periódicos)

Podemos probar la periodicidad de un estado calculando $\mathbf{P}^n$ y observando los valores de $p_{ii}^{(n)}$ para $n = 2,3,4,\ldots$. Estos valores serán positivos sólo en el periodo correspondiente del estado. Por ejemplo, consideremos

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & .6 & .4 \\ 0 & 1 & 0 \\ .6 & .4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} .24 & .76 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & .76 & .24 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & .904 & .0960 \\ 0 & 1 & 0 \\ .144 & .856 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} .0567 & .9424 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & .9424 & .0576 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0 & .97696 & .02304 \\ 0 & 1 & 0 \\ .03456 & .96544 & 0 \end{pmatrix}$$

Los resultados muestran que p_{11} y p_{33} son positivos para valores impares de n y cero en otro respecto (puede confirmar esta observación calculando $\mathbf{P}^n$ con $n > 5$). Esto significa que el periodo de cada uno de los estados 1 y 3 es $t = 2$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.3A

1. Clasifique los estados de las siguientes cadenas de Markov. Si un estado es periódico, determine su periodo:

*(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

*(b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .7 & .3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & .6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & 8 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} .1 & 0 & .9 \\ .7 & .3 & 0 \\ .2 & .7 & .1 \end{pmatrix}$

2. Un juego implica cuatro bolas y dos urnas. Una bola en cualquier urna tiene una probabilidad de 50-50 de ser transferida a la otra urna. Represente el juego como una cadena de Markov, y demuestre que sus estados son periódicos con periodo $t = 2$.
3. Un museo consta de seis salas de tamaños iguales dispuestas en forma de una cuadrícula con tres filas y dos columnas. Cada muro interior tiene una puerta que conecta con las salas adyacentes. Los guardias se desplazan por las salas a través de las puertas interiores. Represente los movimientos de cada guardia en el museo como una cadena de Markov, y demuestre que sus estados son periódicos con periodo $t = 2$.

17.4 PROBABILIDADES DE ESTADO ESTABLE Y TIEMPOS DE RETORNO MEDIOS DE CADENAS ERGÓDICAS

En una cadena ergódica, las probabilidades de estado estable se definen como

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} a_j^{(n)}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Estas probabilidades, las cuales son independientes de $\{a_j^{(0)}\}$, se pueden determinar de las ecuaciones

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

(Una de las ecuaciones en $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ es redundante). Lo que $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ dice es que las probabilidades $\boldsymbol{\pi}$ permanecen sin cambiar después de una transición adicional, y por esta razón representan la distribución de estado estable.

Un subproducto directo de las probabilidades de estado estable es la determinación del número esperado de transiciones antes de que el sistema regrese a un estado j por primera vez. Esto se conoce como **tiempo medio del primer retorno** o **tiempo medio de recurrencia**, y se calcula en una cadena de Markov de n estados como

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j}, j = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplo 17.4-1

Para determinar la distribución de probabilidad de estado estable del problema del jardinero con fertilizante (ejemplo 17.1-3), tenemos

$$(\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3) = (\pi_1 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3)\begin{pmatrix} .3 & .6 & .1 \\ .1 & .6 & .3 \\ .05 & .4 & .55 \end{pmatrix}$$

O bien,

$$\pi_1 = .3\pi_1 + .1\pi_2 + .05\pi_3$$

$$\pi_2 = .6\pi_1 + .6\pi_2 + .4\pi_3$$

$$\pi_3 = .1\pi_1 + .3\pi_2 + .55\pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

(Cualquiera de las primeras tres ecuaciones es redundante). La solución es $\pi_1 = 0.1017$, $\pi_2 = 0.5254$ y $\pi_3 = 0.3729$; es decir que a la larga la condición de la tierra será buena 10% del tiempo, regular 52% del tiempo, y mala 37% del tiempo.

Los tiempos medios del primer retorno se calculan como

$$\mu_{11} = \frac{1}{.1017} = 9.83,\ \mu_{22} = \frac{1}{.5254} = 1.9,\ \mu_{33} = \frac{1}{.3729} = 2.68$$

Esto quiere decir que, en promedio, se requerirán aproximadamente 10 temporadas de siembra para que la tierra regrese a un *buen* estado, 2 temporadas para que regrese al estado *regular*, y 3 temporadas para que regrese a un estado *malo*. Estos resultados apuntan hacia un panorama menos promisorio para la condición de la tierra con el uso propuesto de fertilizantes. Un programa más agresivo debe mejorar el panorama. Por ejemplo, considere la siguiente matriz de transición en la que las probabilidades de trasladarse a un buen estado son más altas que en la matriz previa:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .35 & .6 & .05 \\ .3 & .6 & .1 \\ .25 & .4 & .35 \end{pmatrix}$$

En este caso, $\pi_1 = 0.31$, $\pi_2 = 0.58$, y $\pi_3 = 0.11$, lo cual da $\mu_{11} = 3.2$, $\mu_{22} = 1.7$ y $\mu_{33} = 8.9$, un cambio reversible del sombrío panorama dado anteriormente.

Momento de Excel

La figura 17.1 aplica la plantilla general *excelMarkovChains.xls* al ejemplo del jardinero. La plantilla calcula las probabilidades absolutas y de estado constante de *n* pasos de cualquier cadena de Markov. Los pasos son autoexplicativos. En el paso 2a, puede invalidar los códigos de estado preestablecidos (1,2,3,…) por un código de su elección, y luego hacer clic en el botón ubicado en la celda L2. Los nuevos códigos se transferirán automáticamente a través de la hoja de cálculo cuando ejecute el paso 4.

FIGURA 17.1

Hoja de cálculo Excel para realizar los cálculos de cadena de Markov (archivo *excelMarkovChanins.xls*)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Markov Chains							
2	Step 1:	Number of states =		3	Step 2a:	Initial probabilities:		
3	Step 2:	Click to enter Markov chain			Codes:	1	2	3
4						1	0	0
5	Step 3:	Number of transitions		8	Step 2b:	Input Markov chain:		
6	Step 4:	Click to execute				1	2	3
7					1	0.3	0.6	0.1
8	Output Results				2	0.1	0.6	0.3
9		Absolute	Steady	Mean return	3	0.05	0.4	0.55
10	State	(8-step)	state	time		Output (8-step) transition matrix		
11	1	0.10175	0.101695	9.8333254		1	2	3
12	2	0.52551	0.525424	1.9032248	1	0.10175	0.525514	0.372733
13	3	0.37273	0.372882	2.6818168	2	0.1017	0.525435	0.372864
14					3	0.10167	0.525384	0.372947

Ejemplo 17.4-2 (Modelo de costos)

Considere el problema del jardinero con fertilizante (ejemplo 17.1-3). El jardín necesita dos sacos de fertilizante si la tierra es buena. La cantidad se incrementa en 25% si la tierra es regular, y 60% si la tierra es mala. El costo del fertilizante es de $50 por saco. El jardinero estima un rendimiento anual de $250 si no se utiliza fertilizante, y de $420 si se aplica el fertilizante. ¿Es redituable utilizar fertilizante?

Aplicando las probabilidades de estado constante del ejemplo 17.4-1, obtenemos

$$\begin{aligned}\text{Costo del fertilizante anual esperado} &= 2 \times \$50 \times \pi_1 + (1.25 \times 2) \times \$50 \times \pi_2 \\ &+ (1.60 \times 2) \times \$50 \times \pi_3 \\ &= 100 \times .1017 + 125 \times .5254 + 160 \times .3729 \\ &= \$135.51\end{aligned}$$

Incremento diferencial del valor anual del rendimiento = $420 — $250 = $170. Se recomienda el uso del fertilizante.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.4A

*1. En un día soleado, MiniGolf puede tener ingresos de $2000. Si el día está nublado, los ingresos se reducen 20%. Un día lluvioso reducirá los ingresos en 80%. Si hoy está soleado hay 80% de probabilidades de que mañana esté soleado sin amenaza de lluvia. Si está nublado, hay 20% de probabilidades de que mañana llueva, y 30% de probabilidades de que esté soleado. Seguirá lloviendo hasta el día siguiente con una probabilidad de .8, pero con 10% de probabilidades de que esté soleado.
   - **(a)** Determine los ingresos diarios esperados para MiniGolf.
   - **(b)** Determine el promedio de días que no estarán soleados.

2. A Joe le encanta salir a comer a los restaurantes del área. Sus comidas favoritas son la mexicana, la italiana, la china y la tailandesa. En promedio, Joe paga $10,00 por una comida mexicana, $15.00 por una comida italiana, $9.00 por una comida china, y $11.00 por una comida tailandesa. Los hábitos alimenticios de Joe son predecibles: Hay 70% de probabilidad de que la comida de hoy sea una repetición de la de ayer y probabilidades iguales de que cambie a una de las tres restantes.
   - **(a)** ¿Cuánto paga Joe en promedio por su comida diaria?
   - **(b)** ¿Con qué frecuencia consume Joe comida mexicana?

3. Algunos exconvictos pasan el resto de su vida libre en juicio, en la cárcel, o en libertad condicional. Al inicio de cada año, las estadísticas muestran que hay 50% de probabilidades de que un exconvicto libre cometa un nuevo delito y de que sea procesado. El juez puede enviar al exconvicto a la cárcel con una probabilidad de .6, u otorgarle la libertad condicional con probabilidad de .4. Un vez que están en la cárcel, 10% de los exconvictos serán puestos en libertad por buena conducta. De los que están en libertad condicional, 10% cometen nuevos delitos y son arraigados para ser procesados, 50% regresarán para cumplir su sentencia por violar las órdenes de libertad condicional, y 10% serán puestos en libertad por falta de pruebas. Los contribuyentes solventan el costo asociado con el castigo de los exconvictos. Se estima que un juicio costará aproximadamente $5000, una sentencia de cárcel promedio costará $20,000, y un periodo de libertad condicional promedio costará $2000.
   - **(a)** Determine el costo esperado por exconvicto.
   - **(b)** ¿Con qué frecuencia regresa un exconvicto a la cárcel?

4. Una tienda vende un artículo especial cuya demanda diaria puede ser descrita por la siguiente función de densidad de probabilidad:

Demanda diaria D	0	1	2	3
$P\{D\}$	.1	.3	.4	.2

La tienda está comparando dos políticas de colocar pedidos: (1) Pedir hasta 3 unidades cada 3 días si el nivel de las existencias es menor que 2; de lo contrario, no pedir. (2) Pedir 3 unidades cada 3 días si el nivel del inventario es cero; de lo contrario, no pedir. El costo fijo por ordenar por envío es de $300, y el costo de retener las unidades excedentes por unidad por día es de $3. Se espera una entrega inmediata.

(a) ¿Cuál política debe adoptar la tienda para minimizar el costo diario esperado total de pedir y retener?

(b) Para las dos políticas, compare el promedio de días entre agotamientos sucesivos del inventario.

***5.** Hay tres categorías de filtro del impuesto sobre la renta en los Estados Unidos: los que nunca evaden impuestos, lo que en ocasiones lo hacen, y los que siempre lo hacen. Un examen de las declaraciones de impuestos auditadas de un año al siguiente muestra que de los que no evadieron impuestos el año pasado, 95% continuará en la misma categoría este año; 4% se moverá a la categoría "a veces", y el resto se moverá a la categoría "siempre". Para los que a veces evaden impuestos, 6% se moverá a "nunca", 90% permanecerá igual, y 4% se moverá a "siempre". Por lo que se refiere a los evasores de "siempre", los porcentajes respectivos son 0, 10 y 90%.

(a) Exprese el problema como una cadena de Markov.

(b) A la larga, ¿cuáles serían los porcentajes de las categorías de evasión de impuestos de "nunca", "a veces" y "siempre"?

(c) Las estadísticas muestran que un contribuyente en la categoría "a veces" evade impuestos que suman aproximadamente $5000 por declaración y en la categoría "siempre" suman aproximadamente $12,000. Suponiendo que la población de contribuyentes es de 70 millones y la tasa del impuesto sobre la renta promedio es 12%, determine la reducción anual de los impuestos recolectados debido a la evasión.

6. Warehouzer posee un bosque renovable para plantar pinos. Los árboles caen dentro de una de cuatro categorías según su edad: bebés (0-5 años); jóvenes (5-10 años); maduros (11-15 años), y viejos (más de 15 años). Diez por ciento de los árboles bebés y jóvenes se muere antes de llegar al siguiente grupo de edad. Por lo que se refiere a los árboles maduros y viejos, 50% se talan y sólo 5% se mueren. Debido a la naturaleza de renovación de la operación, todos los árboles talados y muertos son reemplazados con árboles nuevos (bebés) al final del siguiente ciclo de cinco años.

(a) Exprese la dinámica del bosque como una cadena de Markov.

(b) Si el bosque puede contener un total de 500,000 árboles, determine la composición a largo plazo del bosque.

(c) Si un árbol nuevo se planta a un costo de $1 por árbol y uno talado tiene un valor de $20 en el mercado, determine el ingreso anual promedio derivado de la operación del bosque.

7. La dinámica de la población se ve afectada por el continuo movimiento de personas que busca una mejor calidad de vida o un mejor empleo. La ciudad de Mobile tiene una población citadina interna, una población suburbana y una población rural circundante. El censo levantado a intervalos de 10 años muestra que 10% de la población rural se traslada a los suburbios y 5% al interior de la ciudad. En cuanto a la población suburbana, 30% se traslada a las áreas rurales y 15% al interior de la ciudad. La población del interior de la ciudad no se cambiaría a los suburbios, pero 20% sí se cambiaría a la quieta vida rural.

(a) Exprese la dinámica de la población como una cadena de Markov.

(b) Si el área metropolitana de Mobile en la actualidad incluye 20,000 residentes rurales, 100,000 suburbanos, y 30,000 habitantes citadinos, ¿cuál será la distribución de la población en 10 años? ¿En 20 años?

(c) Determine el panorama de la población de Mobile a largo plazo.

8. Una agencia de renta de automóviles tiene oficinas en Phoenix, Denver, Chicago y Atlanta. La agencia permite rentas en una y en dos direcciones de modo que los automóviles rentados en un lugar pueden terminar en otro. Las estadísticas muestran que al final de cada semana 70% de todas las rentas son en dos direcciones. En cuanto a las rentas en una dirección: Desde Phoenix, 20% van a Denver, 60% a Chicago, y el resto va a Atlanta; desde Denver, 40% va a Atlanta y 60% a Chicago; de Chicago, 50% va a Atlanta y el resto a Denver; y desde Atlanta, 80% va a Chicago, 10% a Denver, y 10% a Phoenix.

(a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

(b) Si la agencia inicia la semana con 100 autos en cada lugar, ¿cómo será la distribución en dos semanas?

(c) Si cada lugar está diseñado para manejar un máximo de 110 autos, ¿habría a la larga un problema de disponibilidad de espacio en cualquiera de los lugares?

(d) Determine el promedio de semanas que transcurren antes de que un auto regrese a su lugar de origen.

9. Una librería repone las existencias de un libro popular a nivel de 100 ejemplares al inicio de cada día. Los datos de los últimos 30 días proporciona las siguientes posiciones de inventario al final del día: 1,2,0,3,1,0,0,3,0,1,1,3,2,3,3,2,1,0,2,0,1,3,0,0,3,2,1,2,2.

(a) Represente el inventario diario como una cadena de Markov.

(b) Determine la probabilidad de estado estable de que la librería se quede sin libros en cualquier día.

(c) Determine el inventario diario esperado.

(d) Determine el promedio de días entre inventarios cero sucesivos.

10. En el problema 9, suponga que la demanda diaria puede exceder la oferta, lo cual da lugar a faltantes (inventario negativo). El nivel del inventario al final del día durante los 30 días pasados se da como: 1,2,0, −2,2,2, −1, −1,3,0,0,1, −1, −2,3,3, −2, −1,0,2,0, −1,3,0,0,3, −1,1,2, −2.

(a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

(b) Determine la probabilidad a largo plazo de un excedente de inventario en un día.

(c) Determine la probabilidad a largo plazo de una escasez de inventario en un día.

(d) Determine la probabilidad a largo plazo de que la oferta diaria satisfaga la demanda diaria con exactitud.

(e) Si el costo de retención por libro excedente (al final del día) es de $15 por día y el costo de penalización por libro faltante es de $4.00 por día, determine el costo del inventario esperado por día.

11. Una tienda inicia una semana con al menos 3 PC. La demanda por semana se estima en 0 con probabilidad de .15, 1 con probabilidad de .2, 2 con probabilidad de .35, 3 con probabilidad de .25, y 4 con probabilidad de .05. La demanda insatisfecha se deja pendiente. La política de la tienda es colocar un pedido para entregarse al inicio de la siguiente semana siempre que el nivel del inventario se reduzca por debajo de 3 PC. El nuevo pedido siempre regresa las existencias a 5 PC.

(a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

(b) Suponga que la semana se inicia con 4 PC. Determine la probabilidad de que un pedido se coloque al final de dos semanas.

(c) Determine la probabilidad a largo plazo de que no se coloque ningún pedido en cualquier semana.

(d) Si el costo fijo de colocar un pedido es de $200, el costo de retención por PC por semana es de $5, y el costo de penalización por computadora faltante es de $20, determine el costo de inventario esperado por semana.

12. Resuelva el problema 11, suponiendo que el tamaño del pedido, cuando se coloca, sea exactamente de 5 piezas.

13. En el problema 12, suponga que la demanda de las PC es de 0,1,2,3,4 o 5 con iguales probabilidades. Suponga además que la demanda no satisfecha no se ha dejado pendiente, pero que aún se incurre en un costo de penalización por faltante.

(a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

(b) Determine la probabilidad a largo plazo de que ocurra un faltante.

(c) Si el costo fijo de colocación de un pedido es de $200, el costo de retención por computadora por semana es de $5, y el costo de penalización por faltante de PC por semana es de $20, determine los costos de colocación de pedido e inventario e sperados por semana.

14. El gobierno federal trata de promover las actividades de las pequeñas empresas otorgando concesiones anuales para proyectos. Todas las licitaciones son competitivas, pero la probabilidad de recibir una concesión es máxima si el propietario no ha recibido alguna durante los últimos tres años, y mínima si se dieron otorgamientos en cada uno de los últimos tres años. De manera específica, la probabilidad de obtener una concesión si no se ha recibido ninguna en los últimos tres años es de .9. Se reduce a .8 si se recibió una, a .7 si se recibieron dos, y de sólo .5 si se recibieron tres.

(a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

(b) Determine la cantidad esperada de otorgamientos por propietario por año.

15. Jim Bob ha recibido muchas multas por violaciones al reglamento de tránsito. Desafortunadamente para Jim Bob, la tecnología moderna puede seguir el rastro de sus multas anteriores. En cuanto acumula 4 infracciones, su licencia de manejo es revocada hasta que completa una nueva clase de educación vial en cuyo caso comienza con un historial limpio. Jim Bob es más imprudente inmediatamente después de completar la clase de educación vial, e invariablemente la policía lo detiene con 50% de probabilidades de ser multado. Después de cada nueva multa, trata de ser más cuidadoso, lo cual reduce la probabilidad de una multa en .1.

(a) Exprese el problema de Jim Bob como una cadena de Markov.

(b) ¿Cuál es el promedio de veces que Jim Bob es detenido por la policía antes de que su licencia sea revocada de nuevo?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que Jim Bob pierda su licencia?

(d) Si cada multa es de $100, ¿cuánto, en promedio, paga Jim Bob entre suspensiones sucesivas de su licencia?

16. El clima diario en Fayettville, Arkansas, puede ser nublado (C), soleado (S), lluvioso (R), o ventoso (W). Los registros a lo largo de los últimos 90 días son CCSWRRWSSCCCRCSSWRCRRRRR CWSSWRWWRCRRRRCWSSWRWCCS WRRWSSCCCRCSSWSSWRWWRCRRRRCWSSWRWCCSWRRWSSS. Basado en estos registros, use una cadena de Markov para determinar la probabilidad de que un día típico en Fayetteville pueda estar nublado, soleado, lluvioso o ventoso.

17.5 TIEMPO DEL PRIMER PASO

En la sección 17.4 utilizamos las probabilidades de estado estable para calcular μ_{jj}, el *tiempo medio del primer retorno* para el estado j. En esta sección nos interesa el **tiempo medio del primer paso** μ_{ij}, definido como el número esperado de transiciones para llegar por primera vez al estado j desde el estado i. Los cálculos tienen su origen en la determinación de la probabilidad de *al menos* un paso del estado i al estado j, definido como $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$, donde $f_{ij}^{(n)}$ es la probabilidad del primer paso del estado i al estado j en n transiciones. Se puede determinar una expresión para $f_{ij}^{(n)}$ recursivamente a partir de

$$p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{ij}^{(n-k)},\ n = 1, 2, \ldots$$

Se supone que la matriz de transiciones $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|$ tiene m estados.

1. Si $f_{ij} < 1$, no es seguro que el sistema pase alguna vez del estado i al estado j y $\mu_{ij} = \infty$.
2. Si $f_{ij} = 1$, la cadena de Markov es ergódica, y el *tiempo medio del primer paso* del estado i al estado j se calcula como

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

Una forma más simple de determinar el tiempo medio del primer paso de todos los estados en una matriz de n transiciones, $\mathbf{P}$, es utilizar la siguiente fórmula basada en una matriz:

$$\|\mu_{ij}\| = (\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1}\mathbf{1},\ j \neq i$$

donde

$\mathbf{I}$ = matriz de identidad $(m - 1)$

$\mathbf{N}_j$ = Matriz de transiciones $\mathbf{P}$ sin su fila j-ésima y columna j-ésima del estado destino j

$\mathbf{1}$ = vector columna $(m - 1)$ con todos los elementos iguales a 1

La operación matricial $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1}\mathbf{1}$ suma en esencia las columnas de $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1}$.

Ejemplo 17.5-1

Considere una vez más la cadena de Markov del jardinero con fertilizantes.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .30 & .60 & .10 \\ .10 & .60 & .30 \\ .05 & .40 & .55 \end{pmatrix}$$

Para demostrar el cálculo del tiempo del primer paso a un estado específico desde todos los demás, considere el paso de los estados 2 y 3, (regular y malo) al estado 1 (bueno). Por lo tanto, $j = 1$ y

$$\mathbf{N}_1 = \begin{pmatrix} .60 & .30 \\ .40 & .55 \end{pmatrix},\ (\mathbf{I} - \mathbf{N}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} .4 & -.3 \\ -.4 & .45 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7.50 & 5.00 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix}$$

De modo que,

$$\begin{pmatrix} \mu_{21} \\ \mu_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.50 & 5.00 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.50 \\ 13.34 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se requerirán 12.5 temporadas en promedio, para pasar la tierra regular a tierra buena, y 13.34 temporadas para ir de la tierra mala a la tierra buena.

Pueden realizarse cálculos similares para obtener μ_{12} y μ_{32} desde $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_2)$ y μ_{13} y μ_{23} desde $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_3)$, como se muestra a continuación.

Momento de Excel

Se puede usar la plantilla *excelFirstPassTime.xls* para realizar los cálculos de los tiempos medios del primer paso. La figura 17.2 muestra los cálculos asociados con el ejemplo 17.5-1. El paso 2 de la hoja pone automáticamente la matriz de transiciones $\mathbf{P}$ en cero según el tamaño dado en el

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	First Passage Times in Ergodic and Absorbing Markov Chains							
2	Step 1:	Number of states =		3	Step 2a:			
4	Step 2:	Click to enter Markov chain, P			Step 3:	Click to compute I- P		
5		Matrix P:						
6	Codes	1	2	3				
7	1	0.3	0.6	0.1				
8	2	0.1	0.6	0.3				
9	3	0.05	0.4	0.55				
10		Matrix I-P:						
11		1	2	3				
12	1	0.7	-0.6	-0.1				
13	2	-0.1	0.4	-0.3				
14	3	-0.05	-0.4	0.45				
15	Step 4: Perform first passage time calculations below:							
16		I-N			inv(I-N)			Mu
17	i=1	2	3		2	3		1
18	2	0.4	-0.3	2	7.5	5		12.5
19	3	-0.4	0.45	3	6.666667	6.6666667		13.33333
20								
21	i=2	1	3		1	3		2
22		0.7	-0.1	1	1.451613	0.3225806		1.774194
23		-0.05	0.45	3	0.16129	2.2580645		2.419355
24								
25	i=3	1	2		1	2		3
26	1	0.7	-0.6	1	1.818182	2.7272727		4.545455
27	2	-0.1	0.4	2	0.454545	3.1818182		3.636364

FIGURA 17.2

Cálculos del tiempo del primer paso del ejemplo 17.5-1 utilizando la hoja de cálculo de Excel (archivo *excelFirstPassTime.xls*)

paso 1. En el paso 2a, puede anular los códigos de estado preestablecidos en la fila 6 con un código de su elección. El código se transfiere entonces automáticamente por toda la hoja de cálculo. Después de que ingrese las probabilidades de transición, el paso 3 crea la matriz $\mathbf{I} - \mathbf{P}$. El paso 4 se realiza por completo utilizando $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ como el origen para crear $\mathbf{I} - \mathbf{N}_j (j = 1,2 \text{ y } 3)$. Puede hacerlo copiando toda la $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ y sus códigos de estado y pegándola en la ubicación destino y luego utilizando las operaciones apropiadas de Excel Cut and Paste para liberar $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ de la fila j y la columna j. Por ejemplo, para crear $\mathbf{I} - \mathbf{N}_2$, primero copie $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ y sus códigos de estado en la ubicación destino seleccionada. A continuación, resalte la columna 3 de la matriz copiada, córtela, y péguela en la columna 2, y así se elimina la columna 2. Asimismo, resalte ahora la fila 3 de la matriz resultante, córtela, y luego péguela en la fila 2, y así se elimina la fila 2. La $\mathbf{I} - \mathbf{N}_2$ creada automáticamente realiza su código de estado correcto.

Una vez que se crea $\mathbf{I} - \mathbf{N}_j$, se calcula la inversa $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_j)^{-1}$ en la ubicación destino. Las operaciones asociadas se demuestran invirtiendo $(\mathbf{I} - \mathbf{N}_1)$ en la figura 17.2:

1. Ingrese la fórmula = MINVERSE(B18:C19) en E18.
2. Resalte E18:F19, el área donde residirá la inversa.
3. Pulse F2.
4. Pulse CTRL + SHIFT + ENTER.

Los valores del primer paso de los estados 2 y 3 al estado 1 se calculan entonces sumando las filas de la inversa, es decir, ingresando = SUM(E18:F18) en H18 y luego copiando H18 en H19. Después de crear **I** − **N** para i = 2, e $i = 3$, los cálculos restantes se realizan de forma automática copiando E18:F19 en E22:F23 y E26:F27, y copiando H18:H19 en H22:H23 y H26:H27.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.5A

***1.** Un laberinto se compone de las rutas mostradas en la figura 17.3. La intersección 1 es la entrada al laberinto, y la intersección 5 es la salida. En cualquier intersección, el ratón tiene probabilidades iguales de seleccionar cualquiera de las rutas disponibles. Cuando el ratón llega a la intersección 5, el experimento se repite volviendo a entrar al laberinto por la intersección 1.

- **(a)** Exprese el laberinto como una cadena de Markov.
- **(b)** Determine la probabilidad de que, comenzando en la intersección 1, el ratón llegue a la salida después de tres intentos.
- **(c)** Determine la probabilidad a largo plazo de que el ratón localice la intersección de salida.
- **(d)** Determine el promedio de intentos necesario para llegar al punto de salida desde la intersección 1.

2. En el problema 1, por intuición, si se agregan más opciones (rutas) al laberinto, ¿se incrementará o reducirá el promedio de intentos necesarios para llegar al punto de salida? Demuestre la respuesta agregando una ruta entre las intersecciones 3 y 4.

3. Jim y Joe comienzan un juego con cinco fichas, tres para Jim y dos para Joe. Se lanza una moneda, y si el resultado es cara, Jim le da a Joe una ficha, de lo contrario Jim obtiene una ficha de Joe. El juego termina cuando Jim o Joe tiene todas las fichas. En este punto, hay 30% de probabilidades de que Jim y Joe continúen con el juego, comenzando de nuevo con tres fichas para Jim y dos para Joe.

- **(a)** Represente el juego como una cadena de Markov.
- **(b)** Determine la probabilidad de que Joe gane con tres lanzamientos de la moneda. De que Jim gane haciendo lo mismo.
- **(c)** Determine la probabilidad de que un juego termine a favor de Jim. A favor de Joe.
- **(d)** Determine el promedio de lanzamientos de moneda necesario antes de que Jim gane. Joe gana.

4. Un jardinero aficionado con capacitación en botánica está buscando la forma de fecundar por polinización cruzada flores de lis rosas con flores de lis rojas, naranjas y blancas. Experimentos anuales muestran que las rosas pueden producir 60% rosas y 40% blancas; las rojas pueden producir 40% rojas, 50% rosas y 10% naranjas, las naranjas pueden producir 25% naranjas, 50% rosas y 25% blancas, y las blancas pueden producir 50% rosas y 50% blancas.

- **(a)** Exprese la situación del jardinero como una cadena de Markov.
- **(b)** Si el jardinero inició la fecundación por polinización cruzada con números iguales de cada tipo de flores de lis, ¿cómo sería la distribución después de 5 años? ¿A largo plazo?
- **(c)** ¿Cuántos años en promedio les llevaría a las flores de lis rojas producir flores de lis blancas?

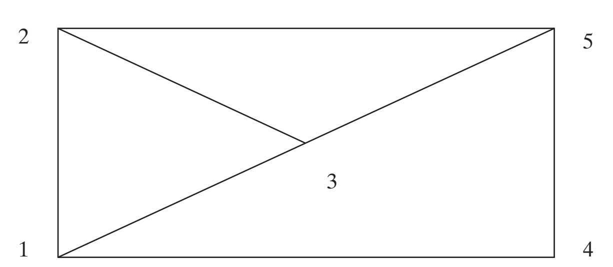


FIGURA 17.3
Laberinto del ratón del problema 1, conjunto 17.5a

*5. Los clientes pueden ser leales a marcas de productos pero pueden ser persuadidos mediante publicidad y mercadotecnia inteligentes para que cambien de marcas. Considere el caso de tres marcas: *A*, *B* y *C*. Los clientes que se "mantienen" leales a una marca dada se estiman en 75%, con un margen de sólo 25% para que sus competidores hagan un cambio. Los competidores lanzan sus campañas publicitarias una vez al año. Para los clientes de la marca *A*, las probabilidades de que cambien a las marcas *B* y *C* son de .1 y .15, respectivamente. Los clientes de la marca *B* son propensos a cambiar a las marcas *A* y *C*, con las siguientes probabilidades: .2 y .05 respectivamente. Los clientes de la marca *C* pueden cambiar a la marcas *A* y *B* con probabilidades iguales.

(a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

(b) A largo plazo, ¿qué tanto segmento del mercado dominará cada marca?

(c) ¿Cuánto tiempo en promedio le llevará a un cliente de la marca *A* cambiar a la marca *B*?

17.6 ANÁLISIS DE LOS ESTADOS ABSORBENTES

En el problema del jardinero, sin fertilizante la matriz de transición se da como

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .2 & .5 & .3 \\ 0 & .5 & .5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 1 y 2 (condiciones de tierra buena y regular) son *transitorios*, y el estado 3 (condición de tierra mala) es *absorbente*, porque una vez que llega a ese estado el sistema permanecerá allí por tiempo indefinido. Una cadena de Markov puede tener más de un estado absorbente. Por ejemplo, un empleado puede permanecer con la misma compañía hasta su retiro o renunciar antes (dos estados absorbentes). En estos tipos de cadenas, nos interesa determinar la probabilidad de llegar a la absorción y el número esperado de transiciones para llegar a ella, dado que el sistema se inicia en un estado transitorio específico. Por ejemplo, en la cadena de Markov antes dada, si actualmente la tierra es buena, nos interesará determinar el promedio de temporadas de siembra hasta que la tierra se vuelva mala, e igualmente la probabilidad asociada con esta transición.

El análisis de las cadenas de Markov con estados absorbentes puede realizarse de forma conveniente con matrices. En primer lugar, la cadena de Markov se particiona como sigue:

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{N} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

La disposición requiere que todos los estados absorbentes ocupen la esquina sureste de la nueva matriz. Por ejemplo, considere la siguiente matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & \;\;2 & \;\;3 & \;\;4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} .2 & .3 & .4 & .1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ .5 & .3 & 0 & .2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

La matriz **P** puede reacomodarse y particionarse como

$$\mathbf{P}^* = \begin{matrix} \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} .2 & .4 & .3 & .1 \\ .5 & 0 & .3 & .2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{matrix}$$

En este caso, tenemos

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} .2 & .4 \\ .5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} .3 & .1 \\ .3 & .2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dada la definición de **A** y **N** y el vector columna unitario **1** (de todos los elementos 1), se puede demostrar que:

Tiempo esperado en el estado j iniciado en el estado i = elemento (i,j) de $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$
Tiempo esperado para la absorción = $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\,\mathbf{1}$
Probabilidad de la absorción = $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\mathbf{A}$

Ejemplo 17.6-1[1]

Se procesa un producto en secuencia en dos máquinas, I y II. La inspección se realiza después de que una unidad del producto se completa en cualquiera de las máquinas. Hay 5% de probabilidades de que una unidad sea desechada antes de inspeccionarla. Después de la inspección, hay 3% de probabilidades de que la unidad sea desechada, y 7% de probabilidades de ser devuelta a la misma máquina para trabajarla de nuevo. De lo contrario, una unidad que pasa la inspección en ambas máquinas es buena.

(a) Para una pieza que se inicia en la máquina 1, determine el promedio de visitas a cada estado.

(b) Si un lote de 1000 unidades se inicia en la máquina I, determine el promedio de unidades buenas completadas.

Para la cadena de Markov, el proceso tiene 6 estados: iniciar en 1($s1$), inspeccionar después de I ($i1$), iniciar en II ($s2$), inspección después de II ($i2$), desechar después de la inspección I o II (J), y buena después de II (G). Los estados J y G son estados absorbentes. La matriz de transiciones se da como

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} \\ s1 \\ i1 \\ s2 \\ i2 \\ J \\ G \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} s1 & i1 & s2 & i2 & J & G \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & .95 & 0 & 0 & .05 & 0 \\ .07 & 0 & .9 & 0 & .03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .95 & .05 & 0 \\ 0 & 0 & .07 & 0 & .03 & .9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{matrix}$$

[1]Adaptado de J. Shamblin y G. Stevens, *Operations Research: A Fundamental Approach*, McGraw-Hill, Nueva York, capítulo 4, 1974.

Por lo tanto,

$$\mathbf{N} = \begin{matrix} & s1 & i1 & s2 & i2 \\ s1 & 0 & .95 & 0 & 0 \\ i1 & .07 & 0 & .9 & 0 \\ s2 & 0 & 0 & 0 & .95 \\ i2 & 0 & 0 & .07 & 0 \end{matrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{matrix} J & G \\ .05 & 0 \\ .03 & 0 \\ .05 & 0 \\ .03 & .9 \end{matrix}$$

Utilizando los cálculos realizados con la plantilla *excelExl7.6-1.xls* (vea *Momento de Excel* después del ejemplo 17.5-1), obtenemos

$$(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -.95 & 0 & 0 \\ -.07 & 1 & -.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.95 \\ 0 & 0 & -.07 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.07 & 1.02 & .98 & 0.93 \\ 0.07 & 1.07 & 1.03 & 0.98 \\ 0 & 0 & 1.07 & 1.02 \\ 0 & 0 & 0.07 & 1.07 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.07 & 1.02 & .98 & 0.93 \\ 0.07 & 1.07 & 1.03 & 0.98 \\ 0 & 0 & 1.07 & 1.02 \\ 0 & 0 & 0.07 & 1.07 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} .05 & 0 \\ .03 & 0 \\ .05 & 0 \\ .03 & .9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .16 & .84 \\ .12 & .88 \\ .08 & .92 \\ .04 & .96 \end{pmatrix}$$

La fila superior de $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$ muestra que, en promedio, la máquina I es visitada 1.07 veces, la inspección I es visitada 1.02 veces, la máquina II es visitada .98 veces, y la inspección II es visitada .93 veces. La razón por la que el número de visitas en la máquina I y la inspección I sea mayor que 1 son el retrabajo y la reinspección. Por otra parte, los valores correspondientes para la máquina II son menores que 1 porque algunas piezas se desechan antes de que lleguen a la máquina II. En realidad, en condiciones perfectas (ningunas piezas se desechan o retrabajan), la matriz $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$ demostrará que cada estación es visitada exactamente una vez (compruébelo asignando una probabilidad de transición de 1 a todos los estados). Por supuesto, la permanencia en cada estado podría diferir. Por ejemplo, si los tiempos de procesamiento en las máquinas I y II son de 20 y 30 minutos y si los tiempos de inspección en I y II son de 5 y 7 minutos, entonces una pieza que inicia en la máquina 1 será procesada (es decir, desechada o terminada) en $(1.07 \times 20) + (1.02 \times 5) + (.98 \times 30) + (.93 \times 7) = 62.41$ minutos.

Para determinar la cantidad de piezas terminadas en un lote inicial de 1000 piezas, podemos ver en la fila superior de $(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}\mathbf{A}$ que

Probabilidad de que una pieza sea desechada = .16
Probabilidad de que una pieza sea terminada = .84

Esto significa que $1000 \times .84 = 840$ piezas serán terminadas en cada lote inicial de 1000.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 17.6A

1. En el ejemplo 17.6-1, suponga que el costo de la mano de obra para las máquinas I y II es de $20 por hora y que para la inspección es de sólo $18 por hora. Suponga además que se requieren 30 minutos y 20 minutos para procesar una pieza en las máquinas I y II, respectivamente. El tiempo de inspección en cada una de las dos estaciones es de 10 minutos. Determine el costo de la mano de obra asociado con una pieza terminada (buena).

*2. Cuando pido prestado un libro de la biblioteca de la ciudad, trato de devolverlos después de una semana. Dependiendo del tamaño del libro y de mi tiempo libre, hay 30% de probabilidades de que lo conserve otra semana. Si me lo quedara dos semanas, hay 10% de probabilidades que me lo quede una semana más. En ninguna condición me lo quedo más de tres semanas.
   (a) Exprese la situación como una cadena de Markov.
   (b) Determine el promedio de semanas antes de devolver el libro a la biblioteca.

3. En el Casino del Río, un apostador puede apostar en dólares enteros. Cada apuesta gana $1 con probabilidad de .4 o pierde $1 con probabilidad de .6. Comenzando con tres dólares, el apostador se retirará si pierde todo el dinero o bien lo duplica.
   (a) Exprese el problema como una cadena de Markov.
   (b) Determine el promedio de apuestas hasta que el juego termina.
   (c) Determine la probabilidad de terminar el juego con $6. De perder los $3.

4. Jim debe avanzar cinco años para completar su doctorado en la Universidad ABC. Sin embargo le agrada la vida de estudiante y no tiene prisa para obtener su grado. En cualquier año académico, hay 50% de probabilidades de que pueda tomarse un año sabático y 50% de probabilidad de dedicarle tiempo completo a su doctorado. Después de completar tres años académicos, hay 30% de probabilidades de que Jim pueda dar "marcha atrás" y simplemente obtenga una maestría, 20% de probabilidades de que se tome libre el siguiente año pero continuando con el programa de doctorado, y 50% de probabilidades de que asista a la escuela a tiempo completo en busca de su doctorado.
   (a) Exprese la situación de Jim como una cadena de Markov.
   (b) Determine el número esperado de años académicos antes de que la vida de estudiante de Jim termine.
   (c) Determine la probabilidad de que Jim termine su ciclo académico con sólo una maestría.
   (d) Si la beca de Jim desembolsa $15,000 anuales (pero sólo cuando asiste a la escuela), ¿cuánto deberá pagar antes de que obtenga un grado?

5. Un empleado que ahora tiene 55 años de edad planea retirarse a la edad de 62 pero no ha descartado la posibilidad de hacerlo antes. Al final de cada año pondera sus opciones (y actitud con respecto al trabajo). La probabilidad de renunciar después de un año es de sólo .1, pero parece incrementarse en aproximadamente .01 con cada año más que pasa.
   (a) Exprese el problema como una cadena de Markov.
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el empleado permanezca con la compañía hasta que planee su retiro a los 62 años?
   (c) A los 57 años, ¿cuál es la probabilidad de que el empleado renuncie?
   (d) A los 58 años, ¿cuál es el número esperado de años antes de que el empleado quede fuera de la nomina?

6. En el problema 3, conjunto 17.1a,
   (a) Determine el número esperado de trimestres hasta que una deuda se liquide o se pierda como una deuda incobrable.
   (b) Determine la probabilidad de que un nuevo préstamo se cancele como deuda incobrable. De que se liquide en su totalidad.
   (c) Si un préstamo tiene seis meses de antigüedad, determine el número de trimestres hasta que su estado se resuelva.

7. En un torneo de tenis de individuales, Andre y John están jugando un partido por el campeonato. El partido se gana cuando uno de los jugadores gana tres de cinco "sets". Las estadísticas muestran que hay 60% de probabilidades de que Andre gane cualquier set.
   (a) Exprese el partido como una cadena de Markov.
   (b) En promedio, ¿cuánto durará el partido, y cuál el la probabilidad de que Andre gane el campeonato?

(c) Si el marcador es 1 set a 2 a favor de John, ¿cuál es la probabilidad de que Andre gane?

(d) En el inciso (c), determine el número promedio de sets hasta que el partido termine e interprete el resultado.

***8.** Los estudiantes en U de A han expresado su disgusto por el rápido paso al cual el departamento de matemáticas está impartiendo el Cal I de un semestre. Para afrontar este problema, el departamento de matemáticas ahora está ofreciendo Cal I en 4 módulos. Los estudiantes establecerán su paso individual para cada módulo y, cuando estén listos, harán un examen que los llevará al siguiente módulo. Los exámenes se aplican una vez cada 4 semanas, de modo que un estudiante diligente puede completar los 4 módulos en un semestre. Después de un par de años con este programa, 20% de los estudiantes completa el primer módulo a tiempo. Los porcentajes para los módulos del 2 al 4 fueron de 22, 25 y 30%, respectivamente.

(a) Exprese el problema como una cadena de Markov.

(b) En promedio, un estudiante que inició el módulo I al principio del semestre actual ¿será capaz de llevar el módulo II el siguiente semestre? (El Cal I es un prerrequisito para el Cal II).

(c) Un estudiante que haya completado sólo un módulo el semestre anterior ¿será capaz de terminar el Cal I al final del semestre actual?

(d) ¿Recomienda aplicar la idea del módulo a otras materias básicas? Explique.

9. En la U de A, la promoción de profesor asistente a profesor asociado requiere el equivalente de cinco puntos (años) de desempeño aceptable. Se realizan revisiones de desempeño una vez al año, y el candidato recibe una calificación promedio, una buena calificación o una calificación excelente. Una calificación promedio equivale a estar a prueba, el candidato no gana puntos hacia la promoción. Una buena calificación equivale a ganar un punto, y una calificación excelente suma dos puntos. Las estadísticas muestran que en cualquier año 10% de los candidatos obtienen una calificación promedio y 70% una buena calificación; el resto obtiene una calificación excelente.

(a) Exprese el problema como una cadena de Markov.

(b) Determine el promedio de años hasta que un nuevo profesor asistente sea promovido.

10. *Pfifer and Carraway (2000).* Una compañía busca sus clientes por medio de publicidad enviada por correo. Durante el primer año, la probabilidad de que un cliente realice una compra es de .5, la cual se reduce a .4 en el año 2, de .3 en el año 3, y de .2 en el año 4. Si no realiza ninguna compra en cuatro años consecutivos, el cliente es borrado de la lista de correo. Si hace una compra la cuenta regresa a cero.

(a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

(b) Determine el número esperado de años que un cliente nuevo permanecerá en la lista de correo.

(c) Si un cliente no ha realizado una compra en dos años, determine el número esperado de años que estará en la lista de correo.

11. Una máquina NC está diseñada para que funcione adecuadamente con voltajes de 108 a 112 volts. Si el voltaje se sale de este intervalo, la máquina se detiene. El regulador de voltaje de la máquina puede detectar variaciones en incrementos de un volt. La experiencia muestra que el voltaje cambia cada 15 minutos. Dentro del intervalo permisible (118 a 112 volts) el voltaje puede subir 1 volt, permanecer igual, o bajar un volt, todos con iguales probabilidades.

(a) Exprese la situación como una cadena de Markov.

(b) Determine la probabilidad de que la máquina se detenga a causa de un voltaje bajo. De un voltaje alto.

(c) ¿Cuál sería el voltaje ideal que haría que la máquina trabaje durante más tiempo?

12. Considere el problema 4, conjunto 17.1a, que tiene que ver con los pacientes que sufren de falla de riñón. Determine las siguientes medidas:

(a) Cuántos años puede un paciente permanecer sometido a diálisis.

(b) La longevidad de un paciente que inicia un tratamiento de diálisis.

(c) La esperanza de vida de un paciente que sobrevive al menos un año o más después de un trasplante.

(d) El número esperado de años antes de que un trasplantado que sobrevivió al menos 1 año regrese a la diálisis o muera.

(e) La calidad de vida para los que sobreviven un año o más después de un trasplante (presumiblemente, pasar pocos años con diálisis significa una mejor calidad de vida).

BIBLIOGRAFÍA

Bini, D., E. Harold, y J. Palacios, *Numerical Methods for Structured Markov Chains,* Oxford University Press, Nueva York, 2005.

Cyert, R., H. Davidson, y G. Thompson, "Estimation of the Allowance for Doubtful Accounts by Markov Chains", *Management Science,* vol. 8, núm. 4, págs. 287-303, 1963.

Pfifer, P., y R. Cassaway, "Modeling Customer Relations with Markov Chains", *Journal of Interactive Marketing*, vol. 14, núm. 2, págs. 43-55, 2000.

Grimmet, G., y D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, 2a. ed., Oxford University Press, Oxford, Inglaterra, 1992.

Pliskin, J., y E. Tell, "Using Dialysis Need-Projection Model for Health Planning in Massachusetts", *Interfaces*, vol. 11, núm. 6, págs. 84-99, 1981.

Stewart, W., *Introduction to the Numerical Solution of Markov Chains*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

Tijms, H., *A First Course in Stochastic Models*, Wiley, Nueva York, 2003.

CAPÍTULO 18

Sistemas de colas

Aplicación de la vida real. Estudio de un sistema de transporte interno en una planta de manufactura

En una planta de manufactura se utilizan tres camiones para transportar materiales. Los camiones esperan en un lote central de estacionamiento hasta que se les solicita. Un camión que responde a una solicitud viajará a las instalaciones del cliente, transportará una carga a su destino, y luego regresará al lote central. Los departamentos principales que utilizan el servicio son el de producción, taller de reparaciones, y el departamento de mantenimiento. Los usuarios se han quejado por el largo tiempo que esperan a que se desocupe un camión, en especial el departamento de producción, para solicitar que se agregue un cuarto camión a la flotilla. Ésta es una aplicación inusual, porque la teoría de colas se utiliza para demostrar que la causa de los largos retrasos es principalmente logística, y que con un simple cambio del procedimiento de operación de la flotilla de camiones no se requiere un cuarto camión. El caso 14 del capítulo 26, en el sitio web, detalla el estudio.

18.1 ¿POR QUÉ ESTUDIAR LAS COLAS?

Esperar que nos atiendan es parte de la vida diaria. Esperamos en los restaurantes, hacemos fila para abordar un avión, y nos formamos en la cola para que nos atiendan en dependencias oficiales. El fenómeno de esperar no se limita a los seres humanos: los trabajos esperan para ser procesados, los aviones vuelan en círculos a diferentes alturas hasta que se les permite aterrizar, y los autos se detienen en los semáforos. Eliminar la espera por completo no es una opción factible debido a que el costo de instalación y operación del centro de operación puede ser prohibitivo. Nuestro único recurso es buscar el equilibrio entre el costo de ofrecer un servicio y el de esperar a que lo atiendan. El análisis de las colas es el vehículo para alcanzar esta meta.

El estudio de las colas tiene que ver con la cuantificación del fenómeno de esperar por medio de medidas de desempeño representativas, tales como longitud promedio de la cola, tiempo de espera promedio en la cola, y el uso promedio de la instalación. El siguiente ejemplo demuestra cómo pueden usarse estas medidas para diseñar una instalación de servicio.

Ejemplo 18.1-1

McBurger es un restaurante de comida rápida con tres mostradores de servicio. El gerente desea agilizar el servicio. Un estudio revela la siguiente relación entre la cantidad de mostradores y el tiempo de espera para el servicio:

Cantidad de cajeros	1	2	3	4	5	6	7
Tiempo de espera promedio (min)	16.2	10.3	6.9	4.8	2.9	1.9	1.3

Un examen de estos datos revela un tiempo de espera promedio de 7 minutos en la situación actual de tres mostradores. Cinco mostradores reducirían la espera a 3 minutos aproximadamente.

Modelo basado en costos. Los resultados del análisis de colas puede incorporarse a un modelo de optimización de costos que busca minimizar la suma del costo de ofrecer el servicio y la espera por parte de los clientes. La figura 18.1 ilustra un modelo de costos típico (en dólares por unidad de tiempo) donde el costo del servicio se incrementa con el aumento del nivel de servicio (por ejemplo la cantidad de mostradores de servicio). Al mismo tiempo, el costo de esperar se reduce con el incremento del nivel de servicio.

El obstáculo principal al implementar modelos de costos es la dificultad de determinar el costo de la espera, sobre todo la que experimentan las personas. Este punto se analiza en la sección 18.9.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.1A

*1. Suponga que un análisis más a fondo del restaurante McBurger revela los siguientes resultados:

Cantidad de cajeros	1	2	3	4	5	6	7
Inactividad (%)	0	8	12	18	29	36	42

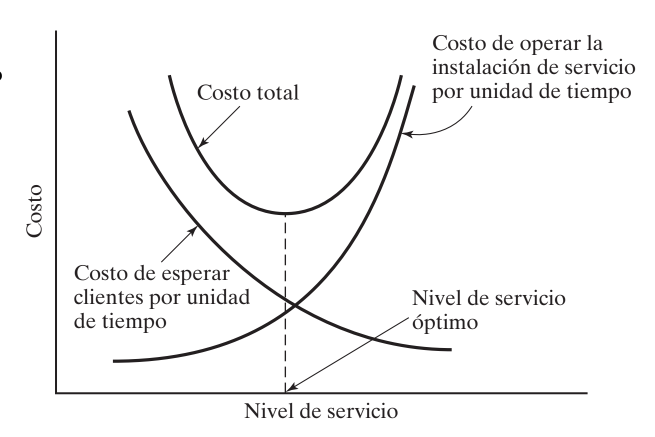


FIGURA 18.1
Modelo de decisión de colas basado en costos

(a) ¿Cuál es la productividad de la operación (expresada como el porcentaje del tiempo que los empleados están ocupados) cuando el número de cajeros es cinco?

(b) El gerente desea mantener el tiempo de espera promedio en alrededor de 3 minutos y, al mismo tiempo, mantener la eficiencia de la instalación aproximadamente a 90%. ¿Pueden alcanzarse las dos metas? Explique.

2. Acme Metal Jobshop se encuentra en el proceso de comprar un taladro vertical de usos múltiples. Dos modelos, A y B, están disponibles con costo de operación por hora de $18 y $25, respectivamente. El modelo A es más lento que el modelo B. El análisis de colas de máquinas similares muestra que cuando se utiliza A, el número promedio de trabajos en la cola es 4, el cual es 30% mayor que el tamaño de la cola en B. Un trabajo retrasado representa un ingreso perdido, el que Acme estima en $10 por trabajo en espera por hora. ¿Cuál modelo debe comprar Acme?

18.2 ELEMENTOS DE UN MODELO DE COLAS

Los actores principales en una situación de colas son el **cliente** y el **servidor**. Los clientes llegan a una **instalación** (servicio) desde de una **fuente**. Al llegar, un cliente puede ser atendido de inmediato o esperar en una **cola** si la instalación está ocupada. Cuando una instalación completa un servicio, "jala" de forma automática a un cliente que está esperando en la cola, si lo hay. Si la cola está vacía, la instalación se vuelve ociosa hasta que llega un nuevo cliente.

Desde el punto de vista del análisis de colas, la llegada de los clientes está representada por el **tiempo entre llegadas** (tiempo entre llegadas sucesivas), y el servicio se mide por el **tiempo de servicio** por cliente. Por lo general, los tiempos entre llegadas y de servicio son probabilísticos (por ejemplo, la operación de una dependencia oficial) o determinísticos (digamos la llegada de solicitantes para una entrevista de trabajo o para una cita con un médico).

El **tamaño de la cola** desempeña un papel en el análisis de colas. Puede ser finito (como en el área intermedia entre dos máquinas sucesivas), o, para todos los propósitos prácticos, infinita (como en las instalaciones de pedidos por correo).

La **disciplina en colas**, la cual representa el orden en que se seleccionan los clientes en una cola, es un factor importante en el análisis de modelos de colas. La disciplina más común es la de **primero en llegar, primero en ser atendido** (FCFS, por sus siglas en inglés). Entre otras disciplinas esta **último en llegar primero en ser atendido** (LCFS, por sus siglas en inglés) y la de **servicio en orden aleatorio** (SIRO, por sus siglas en inglés). Los clientes también pueden ser seleccionados de entre la cola, con base en algún orden de **prioridad**. Por ejemplo, los trabajos urgentes en un taller se procesan antes que los trabajos regulares.

El comportamiento en colas desempeña un papel en el análisis de líneas de espera. Los clientes pueden **cambiarse** de una cola más larga a una más corta para reducir el tiempo de espera, pueden **desistir** del todo de hacer cola debido a la larga tardanza anticipada, o **salirse** de una cola porque han estado esperando demasiado.

El diseño de la instalación de servicio puede incluir servidores paralelos (por ejemplo la operación de una dependencia oficial o un banco). Los servidores también pueden estar dispuestos en serie (a saber, los trabajos procesados en máquinas sucesivas) o estar dispuestos en red (como los ruteadores en una red de computadoras).

La fuente de la cual se generan los clientes puede ser finita o infinita. Una **fuente finita** limita la cantidad de clientes que llegan (por ejemplo las máquinas que solicitan el servicio de un técnico en mantenimiento). Una **fuente infinita** es, para todo propósito práctico, por siempre abundante (como las llamadas que entran a un conmutador telefónico).

Las variaciones en los elementos de una situación de colas originan varios modelos de colas matemáticos. Este capítulo proporciona ejemplos de dichos modelos. Las situaciones de colas complejas que no pueden representarse matemáticamente se suelen analizar por medio de simulación (vea el capítulo 19).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.2A

1. En cada una de las siguientes situaciones, identifique al cliente y al servidor:
*__(a)__ Aviones que llegan a un aeropuerto.
*__(b)__ Sitio de taxis que atiende a pasajeros que esperan.
(c) Herramientas verificadas en un taller de maquinado.
(d) Cartas procesadas en una oficina postal.
(e) Inscripción para clases en una universidad.
(f) Casos en cortes legales.
(g) Operación de pagar en un supermercado.
*__(h)__ Operación de un estacionamiento.

2. Para cada una de las situaciones en el problema 1, identifique lo siguiente: (a) la naturaleza de la fuente solicitante (finita o infinita); (b) la naturaleza de los clientes que llegan (individualmente o en masa); (c) el tipo del tiempo entre llegadas (probabilístico o determinístico); (d) la definición y el tipo del tiempo de servicio; (f) la capacidad de la cola (finita o infinita), y (g) disciplina en las colas.

3. Estudie el siguiente sistema e identifique las situaciones de colas asociadas. En cada situación, defina los clientes, el(los) servidor(es), la disciplina en colas, el tiempo de servicio, la longitud máxima de la cola y la fuente solicitante.

En un taller se reciben órdenes de trabajo para ser procesadas. Cuando las recibe, el supervisor decide si es un trabajo urgente o regular. Algunas órdenes requieren el uso de una o de varias máquinas idénticas. Las órdenes restantes se procesan en una línea de producción de dos etapas, de la cual dos están disponibles. En cada grupo, se asigna una instalación para manejar los trabajos urgentes.

Los trabajos que llegan a cualquier instalación se procesan en el orden en que llegan. Las órdenes terminadas se envían en cuanto llegan de una zona de envío de capacidad limitada.

Las herramientas afiladas para las diferentes máquinas se abastecen desde un depósito central de herramientas. Cuando una máquina se avería, se solicita una técnico en mantenimiento del centro de servicio para que la repare. Las máquinas que procesan órdenes urgentes reciben prioridades tanto en la adquisición de herramientas nuevas del depósito como en el servicio de reparación.

4. ¿Cierto o falso?
(a) Un cliente impaciente que espera puede salirse de la cola.
(b) Si se anticipa un largo tiempo de espera, un cliente que llega puede desistir de hacer cola.
(c) Cambiarse de una cola a otra tiene por objeto reducir el tiempo de espera.

5. En cada una de las situaciones descritas en el problema 1, analice la posibilidad de que los clientes se cambien de cola, desistan de hacer cola o se salgan de una.

18.3 PAPEL DE LA DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

En la mayoría de las situaciones de colas, las llegadas ocurren *al azar*. Aleatoriedad significa que la ocurrencia de un evento (por ejemplo la llegada de un cliente o la terminación de un servicio) es independiente del tiempo transcurrido desde la ocurrencia del último evento.

Los tiempos aleatorios entre llegadas y de servicio se describen cuantitativamente por medio de una **distribución exponencial**, la cual se define como

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \; t > 0$$

La sección 12.4.3 demuestra que para la distribución exponencial

$$E\{t\} = \frac{1}{\lambda}$$

$$P\{t \leq T\} = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda T}$$

La definición de $E(t)$ muestra que λ es la tasa por unidad de tiempo a la cual se generan los eventos (llegadas o salidas).

La distribución exponencial describe un fenómeno *totalmente aleatorio*. Por ejemplo, si en este momento la hora es 8:20 A.M. y la última llegada fue a las 8:02 A.M., la probabilidad de que la siguiente llegada ocurra a las 8:29 es una función sólo del intervalo de las 8:20 a las 8:29, y es totalmente independiente del tiempo que ha transcurrido desde la ocurrencia del último evento (8:02 a 8:20).

La propiedad totalmente aleatoria de la exponencial se conoce como **olvido** o **falta de memoria**. Dado que $f(t)$ es la distribución exponencial del tiempo t, entre eventos sucesivos (llegadas), si S es el intervalo desde la ocurrencia del último evento, entonces la *propiedad de olvido* implica que

$$P\{t > T + S | t > S\} = P\{t > T\}$$

Para comprobar este resultado, observamos que para la exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$,

$$P\{t > Y\} = 1 - P\{t < Y\} = e^{-\lambda Y}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P\{t > T + S | t > S\} &= \frac{P\{t > T + S, t > S\}}{P\{t > S\}} = \frac{P\{t > T + S\}}{P\{t > S\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(T+S)}}{e^{-\lambda S}} = e^{-\lambda T} \\ &= P\{t > T\} \end{aligned}$$

Ejemplo 18.3-1

Una máquina de servicio cuenta con una unidad de respaldo para su reemplazo inmediato si ocurre una falla. El tiempo para que falle la máquina (o su unidad de respaldo) es exponencial y ocurre cada 5 horas en promedio. El operador de máquina afirma que ésta "tiene el hábito" de fallar cada noche alrededor de las 8:30 P.M. Analice la afirmación del operador.

La tasa de fallas promedio de la máquina es $\lambda = \frac{1}{5} = .2$ fallas por hora. Por lo tanto, la distribución exponencial del tiempo para una falla es

$$f(t) = .2e^{-.2t}, \; t > 0$$

Con respecto a la afirmación del operador, sabemos sin pensarlo que no puede ser cierta porque entra en conflicto con el hecho de que el tiempo entre averías es exponencial y por, consiguiente, totalmente aleatorio. La probabilidad de que ocurra una falla a las 8:30 P.M. no puede usarse para sustentar o refutar la afirmación del operador, porque el valor de tal probabilidad depende de la hora (con respecto a las 8:30 P.M.) a la cual se calcule. Por ejemplo, si en este momento son las 8:30 P.M., entonces hay una baja probabilidad de que la afirmación del operador sea correcta, es decir,

$$p\left\{t < \tfrac{10}{60}\right\} = 1 - e^{-.2\left(\frac{10}{60}\right)} = .03278$$

Si la hora en este momento es la 1:00 P.M., entonces la probabilidad de que ocurra una falla a las 8:30 P.M. se incrementa a aproximadamente .777 (¡compruébelo!). Estos dos valores extremos muestran que la afirmación del operador no es cierta.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.3A

1. **(a)** Explique su conocimiento de la relación entre la tasa de llegadas λ y el tiempo entre llegadas promedio. ¿Cuáles son las unidades que describen cada variable?
   (b) En cada uno de los siguientes casos, determine la tasa de llegadas promedio por hora, λ, y el tiempo entre llegadas promedio en horas.
      *(i)** Cada 10 minutos ocurre una llegada.
      (ii) Cada 6 minutos ocurren dos llegadas.
      (iii) La cantidad de llegadas en un periodo de 30 minutos es de 10.
      (iv) El intervalo promedio entre llegadas sucesivas es de .5 horas.
   (c) En cada uno de los siguientes casos, determine la tasa de servicio promedio por hora, μ, y el tiempo de servicio promedio en horas.
      *(i)** Se completa un servicio cada 12 minutos.
      (ii) Cada 15 minutos ocurren dos salidas.
      (iii) La cantidad de clientes atendidos en un periodo de 30 minutos es de 5.
      (iv) El tiempo promedio de servicio es de .3 horas.
2. En el ejemplo 18.3-1, determine lo siguiente:
   (a) El promedio de fallas en una semana, suponiendo que el servicio se ofrece las 24 horas del día, 7 días a la semana.
   (b) La probabilidad de al menos una falla en un periodo de 24 horas.
   (c) La probabilidad de que la siguiente falla *no* ocurra dentro de 3 horas.
   (d) Si no ha ocurrido ninguna falla 3 horas después de la última falla, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo entre fallas sea al menos de 4 horas?
3. El tiempo entre llegadas a la Oficina Estatal de Hacienda es exponencial, con valor medio de .05 horas. La oficina abre a las 8:00 A.M.
   *(a)** Escriba la distribución exponencial que describe el tiempo entre llegadas.
   *(b)** Encuentre la probabilidad de que no lleguen clientes a la oficina alrededor de las 8:15 A.M.
   (c) En este momento son las 8:35 A.M. El último cliente llegó a la oficina a la 8:26. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente cliente llegue antes de las 8:38 A.M.?, ¿de que no llegue alrededor de las 8:40 A.M.?
   (d) ¿Cuál es el promedio de clientes que llegan entre las 8:10 y las 8:45 A.M.?

4. Suponga que el tiempo promedio entre fallas de una máquina es exponencial con una media de 6 horas. Si la máquina ha funcionado sin fallar durante las últimas 3 horas, ¿cuál es la probabilidad de que siga funcionando sin fallar durante la siguiente hora?, ¿de que se averíe durante la siguiente .5 hora?

5. El tiempo entre llegadas al salón de juegos en la unión estudiantil es exponencial con una media de 10 minutos.

(a) ¿Cuál es la tasa de llegadas por hora?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de no que lleguen estudiantes al salón de juegos durante los siguientes 15 minutos?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un estudiante visite el salón de juegos durante los siguientes 20 minutos?

6. El gerente de un nuevo restaurante de comida rápida desea cuantificar el proceso de llegadas de clientes estimando la fracción de los intervalos de tiempo entre llegadas que serán (a) de menos de 2 minutos; (b) entre 2 y 3 minutos, y (c) de más de tres minutos. Las llegadas en restaurantes similares ocurren a razón de 35 clientes por hora. El tiempo entre llegadas está distribuido exponencialmente.

***7.** Ann y Jim, dos empleados en un restaurante de comida rápida, efectúan el siguiente juego mientras esperan que lleguen clientes: Jim le paga a Ann 2 centavos si el siguiente cliente no llega dentro de 1 minuto; de lo contrario, Ann le paga a Jim 2 centavos. Determine la ganancia promedio de Jim en un periodo de 8 horas. El tiempo entre llegadas es exponencial con media de 1.5 minutos.

8. Suponga que en el problema 7 las reglas del juego son tales que Jim le paga a Ann 2 centavos si el siguiente cliente llega después de 1.5 minutos, y Ann le paga a Jim una cantidad igual si la siguiente llegada ocurre dentro de 1 minuto. Para llegadas dentro del intervalo de 1 a 1.5 minutos, el juego es un empate. Determine la ganancia esperada de Jim en un periodo de 8 horas.

9. En el problema 7, suponga que Ann le paga a Jim 2 centavos si la siguiente llegada ocurre dentro de 1 minuto, y 3 centavos si el tiempo entre llegadas es entre 1 y 1.5 minutos. Ann recibe de Jim 5 centavos si el tiempo entre llegadas es entre 1.5 y 2 minutos, y 6 centavos si es de más de 2 minutos. Determine la ganancia esperada de Ann en un periodo de 8 horas.

***10.** Un cliente que llega a un restaurante de comida rápida McBurger dentro de 4 minutos del cliente inmediatamente anterior recibirá 10% de descuento. Si el tiempo entre llegadas es de entre 4 y 5 minutos, el descuento es de 6%. Si el tiempo entre llegadas es de más de 5 minutos, el cliente obtiene 2% de descuento. El tiempo entre llegadas es exponencial con una media de 6 minutos.

(a) Determine la probabilidad de que un cliente que llega reciba 10% de descuento.

(b) Determine el descuento promedio por cliente que llega.

11. Se sabe que el tiempo entre fallas de un refrigerador Kencore es exponencial con valor medio de 9000 horas (aproximadamente 1 año de operación), y la compañía emite una garantía de 1 año sobre el refrigerador. ¿Cuáles son las probabilidades de que la reparación de una falla sea cubierta por la garantía?

12. La U de A opera dos líneas de autobuses en el campus: roja y verde. La línea roja presta servicio al norte del campus, y la verde al sur del campus, con una estación de transferencia que une las dos rutas. Los autobuses verdes llegan al azar (tiempo entre llegadas exponencial) a la estación de transferencia cada 10 minutos. Los autobuses rojos también lo hacen al azar cada 7 minutos.

(a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad del tiempo de espera de un estudiante que llega en la línea roja para abordar la línea verde?

(b) ¿Cuál es la distribución de probabilidades del tiempo de espera de un estudiante que llega en la línea verde para abordar la línea roja?

13. Demuestre que la media y la desviación estándar de la distribución exponencial son iguales.

18.4 MODELOS DE NACIMIENTO Y MUERTE PUROS (RELACIÓN ENTRE LAS DISTRIBUCIONES EXPONENCIAL Y DE POISSON)

Esta sección presenta dos situaciones de colas, el modelo de **nacimiento puro** en el cual sólo ocurren llegadas, y el modelo de **muerte pura** en el cual sólo ocurren salidas. Un ejemplo del modelo de nacimiento puro es la creación de actas de nacimiento de bebés recién nacidos. El modelo de muerte pura puede demostrarse por medio del retiro aleatorio de un artículo en existencia en una tienda.

La distribución exponencial se utiliza para describir el tiempo entre llegadas en el modelo de nacimiento puro y el tiempo entre salidas en el modelo de muerte pura. Un subproducto del desarrollo de los dos modelos es demostrar la estrecha relación entre las distribuciones exponencial y la de Poisson, en el sentido de que una distribución define automáticamente a la otra.

18.4.1 Modelo de nacimiento puro

Defina

$p_0(t)$ = Probabilidad de que no ocurran llegadas durante un periodo de tiempo t

Dado que el tiempo entre llegadas es exponencial y que la tasa de llegadas es de λ clientes por unidad de tiempo, entonces

$$\begin{aligned} p_0(t) &= P\{\text{tiempo entre llegadas} \geq t\} \\ &= 1 - P\{\text{tiempo entre llegadas} \leq t\} \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda t}) \\ &= e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Para un intervalo de tiempo suficientemente pequeño $h > 0$, tenemos

$$p_0(h) = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \cdots = 1 - \lambda h + 0(h^2)$$

La distribución exponencial se basa en la suposición de que durante $h > 0$, cuando mucho puede ocurrir un evento (llegada). Por lo tanto, a medida que $h \rightarrow 0$,

$$p_1(h) = 1 - p_0(h) \approx \lambda h$$

Este resultado muestra que la probabilidad de una llegada durante h es directamente proporcional a h, con la tasa de llegadas, λ, como constante de proporcionalidad.

Para derivar la distribución de la *cantidad* de llegadas durante un periodo t cuando el tiempo entre llegadas es exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$, defina

$p_n(t)$ = Probabilidad de n llegadas durante t

Para un $h > 0$ suficientemente pequeño,

$$\begin{aligned} p_n(t + h) &\approx p_n(t)(1 - \lambda h) + p_{n-1}(t)\lambda h, \quad n > 0 \\ p_0(t + h) &\approx p_0(t)(1 - \lambda h), \qquad\qquad\qquad n = 0 \end{aligned}$$

En la primera ecuación habrá n llegadas durante $t + h$ si hay n llegadas durante t y ninguna llegada durante h, o $n - 1$ llegadas durante t y una llegada durante h. No se permiten todas las demás combinaciones porque, de acuerdo con la distribución exponencial, a lo sumo puede haber una llegada durante un periodo h muy pequeño. La ley del producto de las probabilidades es aplicable al lado derecho de la ecuación porque las llegadas son independientes. En cuando a la segunda ecuación, durante $t + h$ puede haber cero llegadas sólo si no hay llegadas durante t y h.

Reacomodando los términos y tomando los límites a medida que $h \to 0$ para obtener la primera derivada de $p_n(t)$ con respecto a t, tenemos

$$p'_n(t) = \lim_{h\to 0} \frac{p_n(t + h) - p_n(t)}{h} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t),\ n > 0$$

$$p'_0(t) = \lim_{h\to 0} \frac{p_0(t - h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t), \qquad n = 0$$

La solución de las ecuaciones diferenciales anteriores da

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!},\ n = 0,1,2, \ldots$$

Ésta es una **distribución de Poisson** con media $E\{n|t\} = \lambda t$ de llegadas durante t.

El resultado anterior muestra que si el tiempo entre llegadas es exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$, entonces la cantidad de llegadas durante un periodo específico t es Poisson con media λt. Lo contrario también funciona.

La siguiente tabla resume las relaciones entre las distribuciones exponencial y de Poisson, dada la tasa de llegadas λ:

	Exponencial	Poisson
Variable aleatoria	*Tiempo* entre llegadas sucesivas, t	*Cantidad* de llegadas n, durante un periodo de tiempo específico T
Intervalo	$t \geq 0$	$n = 0,1,2, \ldots$
Función de densidad	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t \geq 0$	$p_n(T) = \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!},\ n = 0, 1, 2, \ldots$
Valor medio	$\frac{1}{\lambda}$ unidades de tiempo	λT llegadas durante T
Probabilidad acumulada	$P\{t \leq A\} = 1-e^{-\lambda A}$	$p_{n\leq N}(T) = p_0(T) + p_1(T) + \cdots + p_N(T)$
P\{No llegadas durante el periodo A\}	$P\{t > A\} = e^{-\lambda A}$	$p_0(A) = e^{-\lambda A}$

Ejemplo 18.4-1

En una ciudad grande nacen bebés a razón de uno cada 12 minutos. El tiempo entre nacimientos sigue una distribución exponencial. Determine lo siguiente:

(a) La cantidad promedio de nacimientos por año.

(b) La probabilidad de que no ocurran nacimientos durante 1 día.

(c) La probabilidad de emitir 50 actas de nacimiento en 3 horas dado que se emitieron 40 actas durante las primeras 2 horas del periodo de 3 horas.

La tasa de natalidad por día se calcula como

$$\lambda = \frac{24 \times 60}{12} = 120 \text{ nacimientos/año}$$

Por lo tanto, la cantidad de nacimientos por año en el estado es

$$\lambda t = 120 \times 365 = 43{,}800 \text{ nacimientos/año}$$

La probabilidad de que no haya nacimientos durante 1 día es

$$p_0(1) = \frac{(120 \times 1)^0 e^{-120\times 1}}{0!} = e^{-120} = 0$$

Otra forma de calcular la misma probabilidad es observar que si no hay ningún nacimiento en cualquier día equivale a decir que el *tiempo entre nacimientos sucesivos* es de más de un día. Por lo tanto podemos utilizar la distribución exponencial para calcular la probabilidad deseada como

$$P\{t > 1\} = e^{-120} = 0$$

Debido a que la distribución de la cantidad de nacimientos es Poisson, la probabilidad de emitir 50 actas de nacimiento en 3 horas, dado que se emitieron 40 actas durante las primeras 2 horas, equivale a tener 10(= 50 − 40) nacimientos en una hora (= 3 − 2), es decir,

$$p_{10}(1) = \frac{\left(\frac{60}{12} \times 1\right)^{10} e^{-5\times 1}}{10!} = .01813$$

Momento de Excel

Los cálculos asociados con la distribución de Poisson y, de hecho, todas las fórmulas de colas son tediosas y requieren habilidades de programación para asegurar una precisión razonable. Podemos utilizar las funciones POISSON, POISSONDIST y EXPONDIST de Excel para calcular las probabilidades individuales y acumuladas de Poisson y exponencial. Estas funciones también se automatizan en *excelTables.xls*. Por ejemplo, para un nacimiento de 5 bebés por hora, la probabilidad de exactamente 10 nacimientos en .5 horas se calcula ingresando 2.5 en F16 y 10 en J16 para obtener la respuesta .000216 en M16. La probabilidad acumulada de *cuando mucho* 10 nacimientos se da en O16 (= .999938). Para determinar la probabilidad de que el tiempo entre nacimientos sea menor que o igual a 18 minutos, use la distribución exponencial ingresando 2.5 en F9 y .3 en J9. La respuesta .527633 aparece en O9.

Momento de TORA/Excel

También podemos utilizar TORA (archivo *toraEx18-4.1.txt*) o la plantilla *excelPoissonQ.xls* para determinar de forma automática todas las probabilidades de Poisson significativas ($> 10^{-5}$ en TORA y $> 10^{-7}$ en Excel). En ambos casos, los datos de entrada son los mismos. Para el modelo de nacimiento puro del ejemplo 18.4-1, los datos son los siguientes

Lambda	Mu	*c*	Límite del sistema	Límite de la fuente
5	0	0	infinito	infinito

Observe la entrada bajo Lambda $\lambda t = 5 \times 1 = 5$ nacimientos por día. Observe también que Mu = 0 identifica el modelo como nacimiento puro.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.4A

***1.** En el ejemplo 18.4-1, suponga que el oficinista que captura la información de las actas de nacimiento en la computadora normalmente espera hasta que se juntan al menos 5 actas. Determine la probabilidad de que el oficinista capture un nuevo lote cada hora.

2. Un coleccionista de arte viaja a subastas de arte una vez al mes en promedio. Cada viaje es seguro que produzca una compra. El tiempo entre viajes está exponencialmente distribuido. Determine lo siguiente:

- **(a)** La probabilidad de que se realice una compra en un periodo de 3 meses.
- **(b)** La probabilidad de que se realicen no más de 8 compras por año.
- **(c)** La probabilidad de que el tiempo entre viajes sucesivos exceda de 1 mes.

3. En un banco, la tasa de llegadas es de 2 clientes por minuto. Determine lo siguiente:

- **(a)** El promedio de llegadas durante 5 minutos.
- **(b)** La probabilidad de que no haya llegadas durante los siguientes .5 minutos.
- **(c)** La probabilidad de que haya al menos una llegada durante los siguientes .5 minutos.
- **(d)** La probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas sucesivas sea al menos de 3 minutos.

4. El tiempo entre llegadas en el restaurante L&J es exponencial con media de 5 minutos. El restaurante abre a las 11:00 A.M. Determine lo siguiente:

- ***(a)** La probabilidad de tener 10 llegadas en el restaurante alrededor de las 11:12 A.M., dado que 8 clientes llegaron a las 11:05 A.M.
- **(b)** Las probabilidad de que un nuevo cliente llegue entre las 11:28 y las 11:33 A.M., si el último cliente llegó a las 11:25 A.M.

5. La biblioteca pública de Springdale recibe nuevos libros de acuerdo con una distribución de Poisson con media de 25 libros por día. Cada anaquel en la estantería contiene 100 libros. Determine lo siguiente:

- **(a)** El promedio de anaqueles que se llenarán de nuevos libros cada mes (30 días).
- **(b)** La probabilidad de que se requieran más de 10 libreros cada mes, si un librero se compone de 5 anaqueles.

6. La U de A opera dos líneas de autobuses en el campus: roja y verde. La línea roja presta servicio al norte del campus y la línea verde presta servicio al sur del campus con una estación de transferencia que conecta las dos líneas. Los autobuses verdes llegan al azar (de acuerdo con una distribución de Poisson) a la estación de transferencia cada 10 minutos. Los autobuses rojos también llegan al azar cada 7 minutos.

- ***(a)** ¿Cuál es la probabilidad de que los dos autobuses (rojo y verde) se detengan en la estación durante un intervalo de 5 minutos?
- **(b)** Un estudiante cuyo dormitorio está cerca de la estación tiene clase en 10 minutos. Cualquiera de los autobuses lo lleva al edificio del salón de clases. El viaje requiere 5 minutos, después de lo cual el estudiante camina durante aproximadamente 3 minutos para llegar al salón de clase. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante llegue a tiempo a clase?

7. Pruebe que la media y la varianza de la distribución de Poisson durante un intervalo t es igual a λt, donde λ es la tasa de llegadas.

8. Derive la distribución de Poisson a partir de las ecuaciones diferenciales del modelo de nacimiento puro. *Sugerencia:* La solución de la ecuación diferencial general

$$y' + a(t)y = b(t)$$

es

$$y = e^{-\int a(t)\,dt}\left\{\int b(t)e^{\int a(t)}\,dt + \text{constante}\right.$$

18.4.2 Modelo de muerte pura

En el modelo de muerte pura, el sistema se inicia con N clientes en el instante 0, sin llegadas nuevas permitidas. Las salidas ocurren a razón de *m* clientes por unidad de tiempo. Para desarrollar las ecuaciones diferenciales de la probabilidad $p_n(t)$ de que n clientes *permanezcan* después de t unidades de tiempo, seguimos los argumentos utilizados con el modelo de nacimiento puro (sección 18.4-1). Por lo tanto,

$$p_N(t + h) = p_N(t)(1 - \mu h)$$

$$p_n(t + h) = p_n(t)(1 - \mu h) + p_{n+1}(t)\mu h, 0 < n < N$$

$$p_0(t + h) = p_0(t)(1) + p_1(t)\mu h$$

A medida que $h \rightarrow 0$, obtenemos

$$p'_N(t) = -\mu p_N(t)$$

$$p'_n(t) = -\mu p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), 0 < n < N$$

$$p'_0(t) = \mu p_1(t)$$

La solución de estas ecuaciones da la siguiente distribución de **Poisson truncada**:

$$p_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n}e^{-\mu t}}{(N - n)!}, n = 1, 2, \ldots, N$$

$$p_0(t) = 1 - \sum_{n-1}^{N} p_n(t)$$

Ejemplo 18.4-2

Una florería inicia cada semana con 18 docenas de rosas. En promedio, la florería vende 3 docenas al día (una docena a la vez), pero la demanda real sigue una distribución de Poisson. Siempre que el nivel de las existencias se reduce a 5 docenas, se coloca un nuevo pedido de 18 nuevas docenas para entrega al principio de la siguiente semana. Debido a la naturaleza de la mercancía, las rosas sobrantes al final de la semana se desechan. Determine lo siguiente:

(a) La probabilidad de colocar un pedido cualquier día de la semana.
(b) El promedio de rosas desechadas al final de la semana.

Debido a que las compras ocurren a razón de $\mu = 3$ docenas por día, la probabilidad de colocar un pedido al final del día t es

$$p_{n\leq 5}(t) = p_0(t) + p_1(t) + \cdots + p_5(t)$$

$$= p_0(t) + \sum_{n=1}^{5} \frac{(3t)^{18-n}e^{-3t}}{(18 - n)!}, t = 1, 2, \ldots, 7$$

Los cálculos de $p_{n\leq 5}(t)$ se realizan mejor si se utiliza *excelPoissonQ.xls* o TORA. Los múltiples escenarios de TORA pueden ser más convenientes en este caso. Los datos de entrada asociados en el caso del modelo de muerte pura correspondientes a t = 1,2,…, y 7 son Lambda = 0, Mu = $3t$, $c = 1$, Límite del sistema = 18, y Límite de la fuente = 18. Observe que t debe ser sustituido numéricamente como se muestra en el archivo *toraEx18.4-2.txt.*

Los resultados se resumen como sigue:

t(días)	1	2	3	4	5	6	7
μt	3	6	9	12	15	18	21
$p_{n\leq 5}(t)$	.0000	.0088	.1242	.4240	.7324	.9083	.9755

El promedio de rosas desechadas al final de la semana ($t = 7$) es $E\{n|t = 7\}$. Para calcular este valor necesitamos $p_n(7)$, $n = 0, 1,2,\ldots, 18$, el cual puede determinarse con el software proporcionado. El resultado es

$$E\{n|t = 7\} = \sum_{n=0}^{18} np_n(7) = .664 \approx \text{ una docena}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.4B

1. En el ejemplo 18.4-2, use la plantilla *excelPoissonQ.xls* o TORA para calcular $p_n(7)$, $n = 1,2,\ldots, 18$, y luego verifique manualmente que estas probabilidades den $E\{n|t = 7\} = .664$ docenas.

2. Considere el ejemplo 18.4-2. En cada uno de los siguientes casos, primero escriba la respuesta algebraicamente, y luego utilice *excelPoissonQ.xls* o TORA para dar las respuestas numéricas.

*__(a)__ La probabilidad de que las existencias se agoten después de 3 días.

(b) El promedio de docenas de rosas sobrantes al final del segundo día.

*__(c)__ La probabilidad de que se compre al menos una docena al final del cuarto día, si la última docena se compró al final del tercer día.

(d) La probabilidad de que el tiempo que falta para la siguiente compra es cuando mucho de un medio día, dado que la última compra se realizó el día anterior.

(e) La probabilidad de que no se realicen compras durante el primer día.

(f) La probabilidad de que no se coloque ningún pedido al final de la semana.

3. La banda de la preparatoria de Springdale va a ofrecer un concierto de beneficio en su nuevo auditorio de 400 asientos. Las empresas locales compran los boletos en bloques de 10 y los donan a organizaciones juveniles. Los boletos se ponen a la venta para empresas durante 4 horas sólo un día antes del concierto. El proceso de colocar pedidos de boletos es Poisson con una media de 10 llamadas por hora. Los (bloques de) boletos que sobran después de que se cierra la oficina se venden con descuento como "boletos baratos de última hora", una hora antes de que se inicie el concierto. Determine lo siguiente:

(a) La probabilidad de que será posible comprar boletos baratos de última hora.

(b) El promedio de boletos baratos de última hora disponibles.

4. Cada mañana, el refrigerador en un pequeño taller se encuentra abastecido con dos cajas (24 latas por caja) de refrescos para los 10 empleados del taller. Los empleados pueden apagar su sed a cualquier hora durante el día de trabajo de 8 horas (8:00 A.M. a 4:00 P.M.) y se sabe que cada empleado consume aproximadamente 4 latas al día, pero el proceso es totalmente aleatorio (distribución de Poisson). ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado no encuentre un refresco al mediodía (el inicio del periodo del almuerzo)?, ¿justo antes de que cierre el taller?

***5.** Un estudiante recibe un depósito bancario de $100 al mes desde su casa para que cubra gastos imprevistos. Los retiros de $20 cada uno ocurren al azar durante el mes y están espaciados de acuerdo con una distribución exponencial con un valor medio de una semana. Determine la probabilidad de que el estudiante se quede sin dinero para gastos imprevistos antes del final de la cuarta semana.

6. Se sacan 80 artículos del inventario de acuerdo con la distribución de Poisson a razón de 5 artículos por día. Determine lo siguiente:
  (a) La probabilidad de que se saquen 10 artículos durante los 2 primeros días.
  (b) La probabilidad de que ya no haya artículos al final de los 4 días.
  (c) El promedio de artículos sacados a lo largo de un periodo de 4 días.

7. Un taller mecánico se acaba de surtir de 10 partes de repuesto para la reparación de una máquina. La reposición de la existencia que regresa el nivel a 10 piezas ocurre cada 7 días. El tiempo entre fallas es exponencial con media de 1 día. Determine la probabilidad de que la máquina permanezca descompuesta durante 2 días porque no hay partes de repuesto disponibles.

8. La demanda de un artículo ocurre de acuerdo con una distribución de Poissson con media de 3 por día. El nivel de existencia máximo es de 25 artículos, lo cual ocurre cada lunes inmediatamente después de que se recibe un pedido. El tamaño del pedido depende de la cantidad de unidades sobrantes al final de la semana, el sábado (el negocio está cerrado los domingos). Determine lo siguiente:
  (a) *El tamaño semanal promedio del pedido.
  (b) *La probabilidad de escasez al inicio del negocio el viernes.
  (c) La probabilidad de que el tamaño del pedido semanal exceda de 10 unidades.

9. Demuestre que la distribución del tiempo entre salidas correspondiente a la Poisson truncada en el modelo de muerte pura es una distribución exponencial con media de $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.

10. Derive la distribución de Poisson truncada a partir de las ecuaciones diferenciales del modelo de muerte pura mediante inducción. [*Nota:* Vea la sugerencia en el problema 8, conjunto 18.4a.]

18.5 MODELO DE COLAS GENERAL DE POISSON

Esta sección desarrolla un modelo de colas general que combina tanto llegadas como salidas con base en la suposición de Poisson, es decir, los tiempos entre llegadas y los tiempos de servicio siguen la distribución exponencial. El modelo es la base para la derivación de los modelos de Poisson especializados en la sección 18.6.

El desarrollo del modelo generalizado se basa en el comportamiento a largo plazo o de **estado estable** de la situación de colas, alcanzado después de que el sistema ha estado en operación durante un tiempo suficientemente largo. Este tipo de análisis contrasta con el comportamiento **transitorio** (o de calentamiento) que prevalece durante el inicio de la operación del sistema. (Una razón de por qué no se analiza el comportamiento transitorio en este capítulo es su complejidad analítica. Otra es que el estudio de la mayoría de las situaciones de colas ocurre en condiciones de estado estable.)

El modelo general asume que tanto las tasas de entrada como de salida **dependen del estado**; lo que significa que dependen de la cantidad de clientes en la instalación de servicio. Por ejemplo, en una caseta de cobro en una carretera, los encargados tienden a acelerar el cobro de las cuotas durante las horas pico. Otro ejemplo ocurre en un taller donde la tasa de descomposturas de las máquinas disminuye a medida que aumenta el número de máquinas descompuestas (porque sólo las máquinas que están funcionando son capaces de generar nuevas descomposturas).

Defina

n = Cantidad de clientes en el sistema (haciendo cola, además de los que están siendo atendidos)
λ_n = Tasa de llegadas, si n clientes están en el sistema
μ_n = Tasa de salidas, si n clientes están en el sistema
p_n = Probabilidad de estado estable de que n clientes estén en el sistema

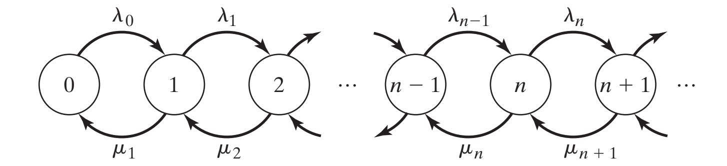


FIGURA 18.2
Diagrama de transición en colas de Poisson

El modelo general deriva a p_n como una función de λ_n y μ_n. Estas probabilidades se utilizan entonces para determinar las medidas de desempeño del sistema, como la longitud promedio de las colas, el tiempo de espera promedio, y la utilización promedio de la instalación.

Las probabilidades p_n se determinan por medio del **diagrama de tasa de transición** en la figura 18.2. El sistema de colas está en el estado n cuando el número de clientes en el sistema es n. Como se explica en la sección 18.3, la probabilidad de que ocurra más de un evento durante un pequeño intervalo h tiende a cero a medida que $h \rightarrow 0$. Esto significa que para $n > 0$, el estado n puede cambiar sólo a dos estados posibles: $n - 1$ cuando ocurre una salida a razón de μ_n, y $n + 1$ cuando ocurre una llegada a razón de λ_n. El estado 0 sólo puede cambiar al estado 1 cuando una llegada ocurre a razón de λ_0. Observe que μ_0 es indefinida porque no pueden ocurrir salidas si el sistema está vacío.

En condiciones de estado estable, para $n > 0$, las tasas de flujo *esperadas* de entrada y salida del estado n deben ser iguales. Con base en el hecho de que el estado n puede cambiar sólo a los estados $n - 1$ y $n + 1$, tenemos

$$\begin{pmatrix}\text{Tasa de flujo de entrada} \\ \text{esperada al estado } n\end{pmatrix} = \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1}$$

Asimismo,

$$\begin{pmatrix}\text{Tasa de flujo de salida} \\ \text{esperada del estado } n\end{pmatrix} = (\lambda_n + \mu_n)p_n$$

Igualando las dos tasas, obtenemos la siguiente **ecuación de balanceo**

$$\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)p_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Según la figura 18.2, la ecuación de balanceo asociada con $n = 0$ es

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

Las ecuaciones de balanceo se resuelven recursivamente en función de p_0. Para $n = 0$, tenemos

$$p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right)p_0$$

Luego, para $n = 1$, tenemos

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1)p_1$$

Sustituyendo $p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)p_0$ y simplificando, obtenemos (¡compruébelo!)

$$p_2 = \left(\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\right)p_0$$

Podemos demostrar por medio de inducción que

$$p_n = \left(\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1}\right)p_0, n = 1, 2, \ldots$$

El valor de p_0 se determina con la ecuación $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

Ejemplo 18.5-1

B&K Groceries opera con tres cajas. El gerente utiliza el siguiente programa para determinar la cantidad de cajas en operación, según la cantidad de clientes que haya en la línea:

Cantidad de clientes en la tienda	Cantidad de cajas en operación
1 a 3	1
4 a 6	2
Más de 6	3

Los clientes llegan al área de cajas de acuerdo con una distribución de Poisson con tasa media de 10 clientes por hora. El tiempo promedio en la caja es exponencial con media de 12 minutos. Determine la probabilidad de estado estable p_n de que haya n clientes en el área de cajas.

Con la información del problema, tenemos

$$\lambda_n = \lambda = 10 \text{ clientes por hora}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$\mu_n = \begin{cases} \frac{60}{12} = 5 \text{ clientes por hora}, & n = 0, 1, 2, 3 \\ 2 \times 5 = 10 \text{ clientes por hora}, & n = 4, 5, 6 \\ 3 \times 5 = 15 \text{ clientes por hora}, & n = 7, 8, \ldots \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$p_1 = \left(\tfrac{10}{5}\right)p_0 = 2p_0$$

$$p_2 = \left(\tfrac{10}{5}\right)^2 p_0 = 4p_0$$

$$p_3 = \left(\tfrac{10}{5}\right)^3 p_0 = 8p_0$$

$$p_4 = \left(\tfrac{10}{5}\right)^3\left(\tfrac{10}{10}\right)p_0 = 8p_0$$

$$p_5 = \left(\tfrac{10}{5}\right)^3\left(\tfrac{10}{10}\right)^2 p_0 = 8p_0$$

$$p_6 = \left(\tfrac{10}{5}\right)^3\left(\tfrac{10}{10}\right)^3 p_0 = 8p_0$$

$$p_{n\geq 7} = \left(\tfrac{10}{5}\right)^3\left(\tfrac{10}{10}\right)^3\left(\tfrac{10}{15}\right)^{n-6} p_0 = 8\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-6} p_0$$

El valor de p_0 se determina a partir de la ecuación

$$p_0 + p_0\left\{2 + 4 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8\left(\tfrac{2}{3}\right) + 8\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + 8\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \cdots\right\} = 1$$

o, de forma equivalente

$$p_0\left\{31 + 8\left(1 + \left(\tfrac{2}{3}\right) + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right)\right\} = 1$$

Utilizando la serie de suma geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$$

obtenemos

$$p_0\left\{31 + 8\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)\right\} = 1$$

Por lo tanto, $p_0 = \frac{1}{55}$.

Dado p_0, ahora podemos determinar p_n con $n > 0$. Por ejemplo, la probabilidad de que sólo una caja abra se calcula como la probabilidad de que haya cuando mucho tres clientes en el sistema:

$$p_1 + p_2 + p_3 = (2 + 4 + 8)\left(\tfrac{1}{55}\right) \approx .255$$

Podemos utilizar p_n para determinar medidas de desempeño para la situación de B&K. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\text{Cantidad esperada}\\ \text{de cajas ociosas}\end{pmatrix} &= 3p_0 + 2(p_1 + p_2 + p_3) + 1(p_4 + p_5 + p_6)\\ &\quad + 0(p_7 + p_8 + \cdots)\\ &= 1 \text{ caja}\end{aligned}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.5A

1. En el ejemplo 18.5-1, determine lo siguiente:
- **(a)** La distribución de probabilidades de la cantidad de cajas abiertas.
- **(b)** El promedio de cajas ocupadas.

2. En el modelo de B&K del ejemplo 18.5-1, suponga que el tiempo entre llegadas en el área de cajas es exponencial con media de 5 minutos y que el tiempo en la caja por cliente también es exponencial con media de 10 minutos. Suponga además que B&K agrega una cuarta caja y que las cajas abren con base en incrementos de dos clientes. Determine lo siguiente:
- **(a)** Las probabilidades de estado estable, p_n para todas las n.
- **(b)** La probabilidad de que se requiera una cuarta caja.
- **(c)** El promedio de cajas ociosas.

***3.** En el modelo de B&K del ejemplo 18.5-1, suponga que las tres cajas están siempre abiertas y que la operación está configurada de tal manera que el cliente vaya primero a la caja vacía. Determinar lo siguiente:
- **(a)** La probabilidad de que tres cajas estén en uso.
- **(b)** La probabilidad de que cliente que llega no tenga que esperar.

4. First Bank de Springdale opera cajeros automáticos de un solo carril. Los autos llegan de acuerdo con una distribución de Poissson a razón de 12 autos por hora. El tiempo por

caja necesario para completar la transacción en el cajero es exponencial con media de 6 minutos. El carril tiene espacio para un total de 10 autos. Una vez que el carril está lleno, los demás autos que llegan buscan el servicio en otra sucursal. Determine lo siguiente:

(a) La probabilidad de que un auto que llegue no pueda utilizar el cajero porque el carril está lleno.

(b) La probabilidad de que un auto no pueda utilizar el cajero en cuanto llegue.

(c) El promedio de autos en el carril.

5. ¿Alguna vez ha escuchado a alguien repetir el contradictorio comentario: "El lugar está tan abarrotado que ya nadie va allí"? Este comentario equivale a decir que la oportunidad de desistir se incrementa con el aumento en la cantidad de clientes que buscan un servicio. Una posible plataforma para modelar esta situación es decir que la tasa de llegadas al sistema se reduce a medida que la cantidad de clientes se incrementa. De manera más específica, consideramos el caso simplificado del Club de Pool M&M, donde los clientes suelen llegar en parejas para "jugar pool". La tasa de llegadas normal es de 6 parejas (de personas) por hora. Sin embargo, una vez que la cantidad de parejas en el salón de pool excede de 8, la tasa de llegadas se reduce a 5 parejas por hora. Se supone que el proceso de llegadas sigue la distribución de Poisson. Cada pareja juega pool durante un tiempo exponencial con media de 30 minutos. El salón de pool cuenta con un total de 5 mesas y puede acomodar a más de 12 parejas a la vez. Determine lo siguiente:

(a) La probabilidad de que los clientes comiencen a desistir.

(b) La probabilidad de que todas las mesas estén ocupadas.

(c) El número promedio de tablas en uso.

(d) El promedio de parejas que esperan a que se desocupe un mesa de pool.

***6.** Una peluquería atiende a un cliente a la vez y cuenta con tres sillas para los clientes que esperan. Si el lugar está lleno, los clientes se van a otra parte. Las llegadas ocurren de acuerdo a una distribución de Poisson con media de 4 por hora. El tiempo para recibir un corte de pelo es exponencial con media de 15 minutos. Determine lo siguiente:

(a) Las probabilidades de estado estable.

(b) La cantidad esperada de clientes en la peluquería.

(c) La probabilidad de que los clientes se vayan a otra parte porque la peluquería está llena.

7. Considere una situación de colas en un servidor donde las tasas de llegadas y servicio son

$$\lambda_n = 10 - n, n = 0, 1, 2, 3$$

$$\mu_n = \frac{n}{2} + 5, n = 1, 2, 3, 4$$

Esta situación equivale a reducir la tasa de llegadas e incrementar la tasa de servicio a medida que se incrementa el número n en el sistema.

(a) Prepare el diagrama de transición, y determine la ecuación de balanceo del sistema.

(b) Determine las probabilidades de estado estable.

8. Considere el modelo de una sola cola, donde se permite sólo un cliente en el sistema. Los clientes que llegan y encuentran la instalación ocupada nunca regresan. Suponga que la distribución de las llegadas es Poisson con media λ por unidad de tiempo, y que el tiempo de servicio es exponencial con media de $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.

(a) Prepare el diagrama de transición, y determine las ecuaciones de balanceo.

(b) Determine las probabilidades de estado estable.

(c) Determine el promedio en el sistema.

9. La comprobación por medio de inducción para derivar la solución general del modelo generalizado se aplica como sigue. Considere

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right)p_{0,}\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Sustituimos p_{n-1} y p_{n-2} en la ecuación diferencial general que implica p_n, p_{n-1}, y p_{n-2} para derivar la expresión deseada para p_n. Verifique este procedimiento.

18.6 COLAS DE POISSON ESPECIALIZADAS

La figura 18.3 ilustra la situación de colas de Poisson especializadas con c servidores paralelos. Se selecciona un cliente de la cola para iniciar el servicio con el primer servidor disponible. La tasa de llegadas al sistema es de λ clientes por unidad de tiempo. Todos los servidores paralelos son idénticos, es decir que la tasa de servicio de cualquier servidor es de μ clientes por unidad de tiempo. La cantidad de clientes en el sistema se define para incluir los que están *en el servicio* y los que están *en la cola*.

Una notación conveniente para resumir las características de la situación de colas de la figura 18.3 se da mediante el siguiente formato:

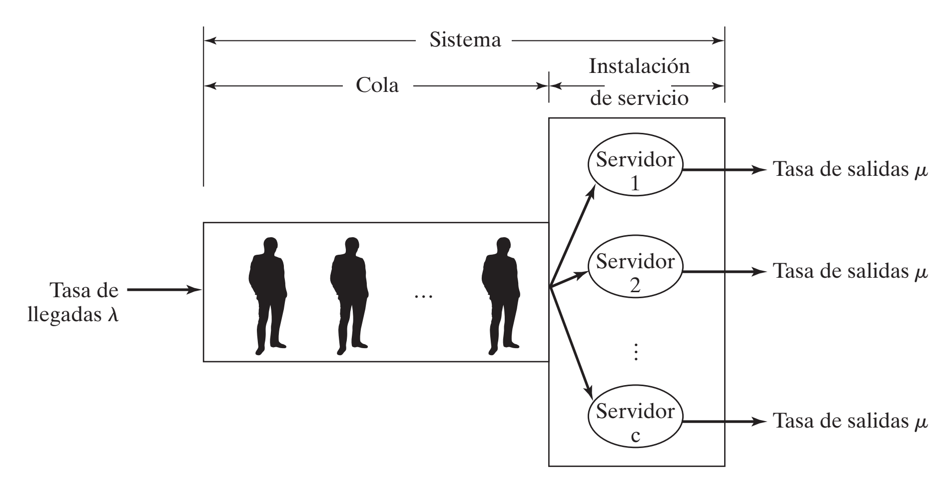
$$(a/b/c):(d/e/f)$$

donde

a = Distribución de las llegadas
b = Distribución de las salidas (tiempo de servicio)
c = Cantidad de servidores paralelos (= 1,2,…, ∞)
d = Disciplina en las colas
e = Número máximo (finito o infinito) permitido en el sistema (haciendo cola o en servicio)
f = Tamaño de la fuente solicitante (finita o infinita)

FIGURA 18.3

Representación esquemática de un sistema de colas con c servidores paralelos



La notación estándar para representar las distribuciones de las llegadas y salidas (símbolos *a* y *b*) es

M = Distribución markoviana (o de Poisson) de llegadas y salidas (o de forma equivalente distribución exponencial del tiempo entre llegadas y de servicio)
D = Tiempo constante (determinístico)
E_k = Distribución Erlang o gama del tiempo (o de forma equivalente, la suma de distribuciones exponenciales independientes)
GI = Distribución general (genérica) del tiempo entre llegadas
G = Distribución general (genérica) del tiempo de servicio

La notación para la disciplina en colas (símbolo *d)* incluye

$FCFS$ = Primero en llegar, primero en ser servido
$LCFS$ = Último en llegar, primero en ser servido
$SIRO$ = Servicio en orden aleatorio
GD = Disciplina general (es decir, cualquier tipo de disciplina)

Para ilustrar el uso de la notación, el modelo $(M/D/10)$: $(GD/20/\infty)$ utiliza llegadas Poisson (o tiempo entre llegadas exponencial), tiempo de servicio constante, y 10 servidores paralelos. La disciplina en colas es GD, y hay un límite de 20 clientes en todo el sistema. El tamaño de la fuente de donde llegan los clientes es infinito.

Como nota histórica, los primeros tres elementos de la notación $(a/b/c)$ los ideó D.G. Kendall en 1953, y se conocen en la literatura como la **notación de Kendall**. En 1966, A.M. Lee agregó los símbolos *d* y *e* a la notación. Este autor agregó el último elemento, el símbolo *f*, en 1968.

Antes de presentar los detalles de las colas de Poisson especializadas, demostramos cómo se pueden derivar las medidas de desempeño de estado estable de la situación de colas generalizada a partir de las probabilidades de estado estable p_n dadas en la sección 18.5.

18.6.1 Medidas de desempeño de estado estable

Las medidas de desempeño más comúnmente utilizadas en una situación de colas son

L_s = Cantidad esperada de clientes en un *sistema*
L_q = Cantidad esperada de clientes en una *cola*
W_s = Tiempo de espera en el *sistema*
W_q = Tiempo de espera anticipado en la *cola*
$\bar{c}$ = Cantidad esperada de servidores ocupados

Recuerde que el *sistema* incluye tanto la *cola* como las *instalaciones de servicio.*

Demostramos ahora cómo se derivan estas medidas (directa o indirectamente) a partir de la probabilidad de estado estable de n en el sistema p_n como

$$L_s = \sum_{n=1}^{\infty} np_n$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)p_n$$

La relación entre L_s y W_s (también entre L_q y W_q) se conoce como **fórmula de Little** y se da como

$$L_s = \lambda_{\text{efec}} W_s$$

$$L_q = \lambda_{\text{efec}} W_q$$

Estas relaciones son válidas en condiciones más bien generales. El parámetro λ_{efec} es la tasa de llegadas *efectiva* al sistema. Es igual a la tasa de llegadas λ (nominal) cuando todos los clientes que llegan pueden unirse al sistema. De lo contrario, si algunos clientes no pueden unirse porque el sistema está lleno (por ejemplo un estacionamiento), entonces $\lambda_{\text{efec}} < \lambda$. Más adelante demostraremos cómo se determina λ_{efec}.

También existe una relación directa entre W_s y W_q. Por definición

$$\begin{pmatrix}\text{Tiempo de espera}\\ \text{anticipado en el sistema}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Tiempo de espera}\\ \text{anticipado en la cola}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Tiempo de servicio}\\ \text{esperado}\end{pmatrix}$$

Esto se traduce como

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Luego podemos relacionar L_s con L_q multiplicando ambos lados de la última fórmula por λ_{efec}, la que junto con la fórmula de Little da

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{\text{efec}}}{\mu}$$

La diferencia entre la cantidad promedio en el sistema, L_s, y la cantidad promedio en la cola, L_q debe ser igual al promedio de servidores ocupados. Por lo tanto,

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{\text{efec}}}{\mu}$$

Se deduce que

$$\begin{pmatrix}\text{Uso de la}\\ \text{instalación}\end{pmatrix} = \frac{\bar{c}}{c}$$

Ejemplo 18.6-1

El estacionamiento para visitantes en el Colegio Ozark se limita a sólo 5 espacios. Los autos que utilizan estos espacios llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 6 por hora. El tiempo de estacionamiento está distribuido exponencialmente con una media de 30 minutos. Los visitantes que no pueden encontrar un espacio vacío pueden esperar temporalmente en el estacionamiento hasta que un auto estacionado salga. El espacio temporal tiene cabida sólo para 3 autos. Otros que no pueden estacionarse o encontrar un espacio de espera temporal deben irse a otra parte. Determine lo siguiente:

(a) La probabilidad, p_n, de que haya n autos en el sistema.
(b) La tasa de llegadas efectiva de los autos que por lo general utilizan el estacionamiento.
(c) El promedio de autos en el estacionamiento.
(d) El tiempo promedio que un auto espera un espacio de estacionamiento.
(e) El promedio de espacios de estacionamiento *ocupados*.
(f) La utilización promedio del estacionamiento.

Observamos primero que un espacio de estacionamiento actúa como un servidor, de modo que el sistema cuenta con un total de $c = 5$ servidores paralelos. Asimismo, la capacidad máxima del sistema es $5 + 3 = 8$ autos.

La probabilidad p_n puede determinarse como un caso especial del modelo generalizado en la sección 18.5 por medio de

$$\lambda_n = 6 \text{ autos/hora}, \ n = 0, 1, 2, \ldots, 8$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\left(\frac{60}{30}\right) = 2n \text{ autos/hora}, & n = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 5\left(\frac{60}{30}\right) = 10 \text{ autos/hora}, & n = 6, 7, 8 \end{cases}$$

De acuerdo con la sección 18.5, obtenemos

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{3^n}{n!} p_0, & n = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \dfrac{3^n}{5!\,5^{n-5}} p_0, & n = 6, 7, 8 \end{cases}$$

El valor de p_0 se calcula sustituyendo $p_n, n = 1,2,\ldots, 8$, en la siguiente ecuación

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_8 = 1$$

o

$$p_0 + p_0\left(\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{5!5} + \frac{3^7}{5!5^2} + \frac{3^8}{5!5^3}\right) = 1$$

Esto da $p_0 = .04812$ (¡compruébelo!). Con p_0, ahora podemos calcular p_1 a p_8 como

n	1	2	3	4	5	6	7	8
p_n	.14436	.21654	.21654	.16240	.09744	.05847	.03508	.02105

La tasa de llegadas efectiva λ_{efec} se calcula observando el diagrama esquemático en la figura 18.4, donde los clientes llegan de la fuente a razón de λ autos por hora. Un auto que llega puede entrar al estacionamiento a la razón λ_{efec} o puede irse a otra parte a la razón $\lambda_{perdida}$. Esto quiere decir que $\lambda = \lambda_{efec} + \lambda_{perdida}$.

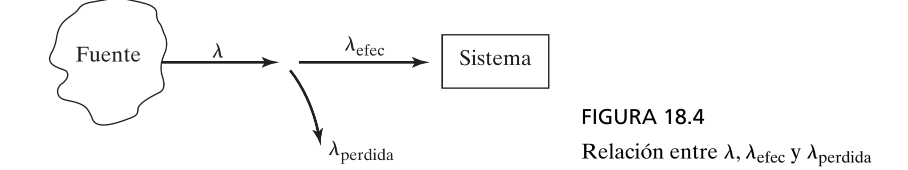


FIGURA 18.4
Relación entre λ, λ_{efec} y λ_{perdida}

Un auto no podrá entrar al estacionamiento si ya entraron 8. Esto significa que la proporción de autos que *no* podrán entrar al estacionamiento es p_8. Por lo tanto,

$$\lambda_{\text{perdida}} = \lambda p_8 = 6 \times .02105 = .1263 \text{ autos/hora}$$

$$\lambda_{\text{efec}} = \lambda - \lambda_{\text{perdida}} = 6 - .1263 = 5.8737 \text{ autos/hora}$$

El promedio de autos en el estacionamiento (los que esperan que se desocupe un espacio) es igual a L_s, el promedio en el sistema. Podemos calcular L_s con p_n como

$$L_s = 0p_0 + 1p_1 + \cdots + 8p_8 = 3.1286 \text{ autos}$$

Un auto que espera en el espacio temporal es en realidad un auto que está haciendo cola. Por lo tanto, su tiempo de espera hasta que encuentra un espacio es W_q. Para determinar W_q usamos

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

Por tanto,

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{\text{efec}}} = \frac{3.1286}{5.8737} = .53265 \text{ horas}$$

$$W_q = .53265 - \frac{1}{2} = .03265 \text{ horas}$$

El promedio de espacios de estacionamiento ocupados es igual al promedio de servidores ocupados,

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{\text{efec}}}{\mu} = \frac{5.8737}{2} = 2.9368 \text{ espacios}$$

A partir de $\bar{c}$, obtenemos

$$\text{Uso del lote de estacionamiento} = \frac{\bar{c}}{c} = \frac{2.9368}{5} = .58736$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6A

1. En el ejemplo 18.6-1, haga lo siguiente:

*__(a)__ Calcule L_q directamente con la fórmula $\sum_{n=c+1}^{\infty}(n - c)p_n$.

(b) Calcule W_s a partir de L_q.

*__(c)__ Calcule el promedio de autos que no podrán entrar al estacionamiento durante un periodo de 8 horas.

*__(d)__ Demuestre que $c - (L_s - L_q)$, el promedio de espacios vacíos es igual a $\sum_{n=0}^{c-1}(c - n)p_n$.

2. Resuelva el problema 18.6-1 con los siguientes datos: cantidad de espacios de estacionamiento = 6, cantidad de espacios temporales = 4, $\lambda = 10$ autos por hora y tiempo promedio de estacionamiento = 45 minutos.

18.6.2 Modelos de un solo servidor

Esta sección presenta dos modelos para el caso de un solo servidor ($c = 1$). El primer modelo no limita el número máximo en el sistema, y el segundo supone un límite finito del sistema. Ambos modelos suponen una capacidad infinita de la fuente. Las llegadas ocurren a razón de λ clientes por unidad de tiempo y la tasa de servicio es μ clientes por unidad de tiempo.

Los resultados de los dos modelos (y de hecho de todos los modelos restantes en la sección 18.6) se derivan como casos especiales de los resultados del modelo generalizado de la sección 18.5.

Se utilizará la notación ampliada de Kendall para caracterizar cada situación. Debido a que las derivaciones de p_n en la sección 18.5 y de todas las medidas de desempeño en la sección 18.6.1 son totalmente independientes de una disciplina de colas específica, se utilizará el símbolo GD (disciplina general) con la notación.

$(M/M/1)$:$(GD/\infty/\infty)$. Utilizando la notación del modelo general, tenemos

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu\end{array}\right\}, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Incluso, $\lambda_{\text{efec}} = \lambda$ y $\lambda_{\text{perdida}} = 0$, porque todos los clientes pueden unirse al sistema.

Si $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, la expresión para p_n en el modelo generalizado se reduce a

$$p_n = \rho^n p_0,\ n = 0,1,2, \ldots$$

Para determinar el valor de p_0 usamos la identidad

$$p_0(1 + \rho + \rho^2 + \cdots) = 1$$

La suma de la serie geométrica es $\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$, siempre que $\rho < 1$. Por lo tanto

$$p_0 = 1-\rho,\ \rho < 1$$

En consecuencia, la siguiente distribución geométrica da la fórmula general para p_n

$$p_n = (1-\rho)\rho^n,\ n = 1,2, \ldots\ (\rho < 1)$$

La derivación matemática de p_n impone la condición $\rho < 1$, o $\lambda < \mu$. Si $\lambda \geq \lambda$, la serie geométrica diverge, y las probabilidades de estado estable p_n no existen. Este resultado tiene un sentido intuitivo, porque a menos que la tasa de servicio sea mayor que la tasa de llegadas, la longitud de la cola continuará creciendo y no puede alcanzarse ningún estado estable.

La medida de desempeño L_q se deriva como sigue:

$$\begin{aligned} L_s &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n \\ &= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\ &= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{\rho}{1-\rho} \end{aligned}$$

Debido a que $\lambda_{\text{efec}} = \lambda$ en la presente condición, las medidas de desempeño restantes se calculan utilizando las relaciones dadas en la sección 18.6.1. Por lo tanto,

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$\bar{c} = L_s - L_q = \rho$$

Ejemplo 18.6-2

Automata es una instalación de lavado de autos de una sola bahía. Los autos llegan según una distribución de Poisson con una media de 4 autos por hora y pueden esperar en el estacionamiento de la instalación en la calle si la bahía está ocupada. El tiempo para lavar y limpiar un auto es exponencial, con una media de 10 minutos. Esto significa que, para todo propósito práctico, no hay ningún límite en el tamaño del sistema. El gerente de la instalación desea determinar el tamaño del estacionamiento.

Para esta situación tenemos $\lambda = 4$ autos por hora, y $\mu = \frac{60}{10} = 6$ autos por hora. Como $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, el sistema puede operar en condiciones de estado estable. Los datos de TORA o *excelPoissonQ.xls* para este modelo son

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
4	6	1	infinito	infinito

Los resultados del modelo se muestran en la figura 18.5. El promedio de autos que esperan en la cola, L_q es 1.33 autos.

Por lo general, no es aconsejable utilizar L_q como la única base para determinar la cantidad de espacios de estacionamiento, porque el diseño debe, en cierto sentido, tener en cuenta la longitud máxima posible de la cola. Por ejemplo, puede ser más razonable diseñar el estacionamiento de modo que un auto que llega encuentre un espacio de estacionamiento al menos 90% de las veces. Para hacer esto, sea S la cantidad de espacios de estacionamiento. Tener S espacios de estacionamiento equivale a tener $S + 1$ espacios en el *sistema* (cola más bahía). Un auto que llega encontrará un espacio 90% de las veces si hay *cuando mucho* S autos en el sistema. Esta condición es equivalente al siguiente enunciado de probabilidad:

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_S \geq .9$$

De acuerdo con la figura 18.5, la probabilidad *acumulada* p_n con $n = 5$ es .91221. Esto significa que la condición se satisface con $S \geq 5$ espacios de estacionamiento.

La cantidad de espacios S se determina también por medio de la definición matemática de p_n, es decir,

$$(1 - \rho)(1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^S) \geq .9$$

La suma de la serie geométrica truncada es $\frac{1-\rho^{S+1}}{1-\rho}$, la cual reduce la condición a

$$(1 - \rho^{S+1}) \geq .9$$

```
Scenario 1: (M/M/1):(GD/infinity/infinity)
```

Lambda = 4.00000	Mu = 6.00000
Lambda eff = 4.00000	Rho/c = 0.66667
Ls = 2.00000	Lq = 1.33333
Ws = 0.50000	Wq = 0.33333

n	Probability pn	Cumulative Pn	n	Probability pn	Cumulative Pn
0	0.33333	0.33333	13	0.00171	0.99657
1	0.22222	0.55556	14	0.00114	0.99772
2	0.14815	0.70370	15	0.00076	0.99848
3	0.09877	0.80247	16	0.00051	0.99899
4	0.06584	0.86831	17	0.00034	0.99932
5	0.04390	0.91221	18	0.00023	0.99955
6	0.02926	0.94147	19	0.00015	0.99970
7	0.01951	0.96098	20	0.00010	0.99980
8	0.01301	0.97399	21	0.00007	0.99987
9	0.00867	0.98266	22	0.00004	0.99991
10	0.00578	0.98844	23	0.00003	0.99994
11	0.00385	0.99229	24	0.00002	0.99996
12	0.00257	0.99486	25	0.00001	0.99997

FIGURA 18.5

Resultados del ejemplo 18.6-2 obtenidos con TORA (archivo *toraEx18.6-2.txt*)

La simplificación de la desigualdad produce

$$\rho^{S+1} \leq .1$$

Sacando los logaritmos en ambos lados (y observando que log $(x) < 0$ para $0 < x < 1$, lo cual invierte la dirección de la desigualdad), tenemos.

$$S \geq \frac{\ln(.1)}{\ln\left(\frac{4}{6}\right)} - 1 = 4.679 \approx 5$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6B

1. En el ejemplo 18.6-2, haga lo siguiente.

(a) Determine la utilización en porcentaje de la bahía de lavado.

(b) Determine la probabilidad de que un auto que llega tenga que esperar en el estacionamiento antes de entrar a la bahía de lavado.

(c) Si hay 7 espacios de estacionamiento, determine la probabilidad de que un auto que llega encuentre un estacionamiento vacío.

(d) ¿Cuántos espacios de estacionamiento deben proporcionarse de modo que un auto que llega pueda encontrar un espacio de estacionamiento 99% del tiempo?

*2. John Macko estudia en la U de Ozark. Realiza trabajos peculiares para complementar sus ingresos. Las solicitudes para que realice un trabajo llegan cada 5 días, pero el tiempo entre solicitudes es exponencial. El tiempo para terminar un trabajo también es exponencial con media de 4 días.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que John se quede sin trabajos?
   (b) Si John gana aproximadamente $50 por trabajo, ¿cuál es su ingreso mensual promedio?
   (c) Si al final del semestre John decide subcontratar los trabajos pendientes a $40 cada uno, ¿cuánto, en promedio, debe esperar que le paguen?

3. Durante años, el detective Columbo, del Departamento de Policía de Fayetteville, ha tenido un éxito fenomenal al resolver todos los casos criminales. Es sólo cuestión de tiempo antes de que cualquier caso se resuelva. Columbo admite que el tiempo por caso es "totalmente aleatorio", pero, en promedio, cada investigación le lleva aproximadamente una semana y media. Los crímenes en el tranquilo Fayetteville no son muy comunes. Ocurren al azar a razón de un crimen por mes (4 semanas). El detective Columbo está solicitando que un asistente comparta la pesada carga de trabajo. Analice la petición de Columbo, en particular desde la perspectiva de los siguientes puntos:
   (a) El promedio de casos en espera de ser investigados.
   (b) El porcentaje del tiempo que el detective permanece ocupado.
   (c) El tiempo promedio necesario para resolver un caso.

4. Los autos que llegan a la caseta de cobro del túnel Lincoln lo hacen según una distribución de probabilidades de Poisson, con una media de 90 autos por hora. El tiempo para cruzar la caseta es exponencial con media de 38 segundos. Los conductores se quejan del largo tiempo de espera, y las autoridades desean reducir el tiempo de cruce promedio a 30 segundos con la instalación de dispositivos de cobro de cuota automáticos, siempre que se satisfagan dos condiciones: (1) que el promedio de autos que esperan en este sistema exceda de 5, y (2) que el porcentaje del tiempo ocioso de la caseta con el nuevo dispositivo instalado no exceda de 10%. ¿Se puede justificar el nuevo dispositivo?

*5. Un restaurante de comida rápida tiene una ventanilla para servicio en su auto. Los autos llegan según una distribución de Poisson a razón de dos cada 5 minutos. El espacio en frente de la ventanilla puede acomodar a lo sumo 10 autos, incluso el que se está atendiendo. Los demás autos pueden esperar afuera de este espacio si es necesario. El tiempo de servicio por cliente es exponencial, con una media de 1.5 minutos. Determine lo siguiente:
   (a) La probabilidad de que la ventanilla esté ociosa.
   (b) La cantidad estimada de clientes que esperan ser atendidos.
   (c) El tiempo de espera hasta que un cliente llega a la ventanilla para hacer su pedido.
   (d) La probabilidad de que la línea de espera exceda la capacidad de 10 espacios.

6. Los clientes llegan a la ventanilla de servicio en su auto de un banco según una distribución de Poisson, con una media de 10 por hora. El tiempo de servicio por cliente es exponencial con una media de 5 minutos. Hay tres espacios en frente de la ventanilla, incluido el auto que están atendiendo. Otros autos que llegan se forman afuera de este espacio para 3 autos.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un auto que llega pueda entrar a un de los 3 espacios?
   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que un auto que llega espere afuera del espacio designado para tres 3 autos?
   (c) ¿Cuánto tiempo se anticipa que espere un cliente que llega antes de iniciar el servicio?
   *(d) ¿Cuántos espacios para autos deben proporcionarse en frente de la ventanilla (incluido el que se está atendiendo) de modo que un auto que llega pueda encontrar un espacio allí al menos 90% del tiempo?

7. En el escenario $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, dé un argumento convincente de por qué en general L_s no es igual a $L_q + 1$. ¿En qué condición se mantendrá la igualdad?

8. Para el escenario $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, derive la expresión L_q utilizando la definición básica $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)p_n$.

9. Para el escenario $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, demuestre que

(a) El número esperado en la cola, si la cola no esta vacía es igual a, $= \frac{1}{(1-\rho)}$.

(b) El tiempo de espera anticipado en la cola para los que deben esperar es igual a $=\left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right)$.

(*M*/*M*/1):(*GD*/*N*/∞). Este modelo difiere de $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ en que hay un límite N en el número en el sistema (longitud máxima de la cola $= N - 1$). Algunos ejemplos incluyen situaciones de manufactura en las que una máquina puede tener un espacio intermedio limitado y una ventanilla de servicio en su coche en un restaurante de comida rápida. No se permiten nuevas llegadas cuando la cantidad de clientes en el sistema llega a N. Por lo tanto,

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0, 1, \ldots, N-1 \\ 0, & n = N, N+1 \end{cases}$$
$$\mu_n = \mu, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Utilizando $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, el modelo generalizado de la sección 18.5 da

$$p_n = \begin{cases} \rho^n p_0 & n \leq N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

El valor de p_0 se determina a partir de la ecuación $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, la cual da

$$p_0(1 + \rho + p^2 + \cdots + \rho^N) = 1$$

o

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}, & \rho = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$p_n = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{N+1}}, & \rho = 1 \end{array} \right\}, n = 0, 1, \ldots, N$$

El valor de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ *no* tiene que ser menor que 1 en este modelo, porque el límite N controla las llegadas al sistema. Esto significa que λ_{efec} es la tasa que importa en este caso. Debido a que los clientes se pierden cuando hay N en el sistema, entonces, como se muestra en la figura 18.4,

$$\lambda_{\text{perdida}} = \lambda p_N$$
$$\lambda_{\text{efec}} = \lambda - \lambda_{\text{perdida}} = \lambda(1-p_N)$$

En este caso, $\lambda_{\text{efec}} < \mu$.

La cantidad esperada de clientes en el sistema se calcula como

$$L_s = \sum_{n=1}^{N} np_n$$

$$= \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \sum_{n=0}^{N} n\rho^n$$

$$= \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{N} \rho^n$$

$$= \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{N+1}} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\right)$$

$$= \frac{\rho[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}]}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}, \rho \neq 1$$

Cuando $\rho = 1$, $L_s = \frac{N}{2}$ (¡compruébelo!). Podemos derivar W_s, W_q y L_q a partir de L_s utilizando λ_{efec} como se muestra en la sección 18.6.1.

El uso de una calculadora de mano para procesar las fórmulas de colas es, en el mejor de los casos, incómodo (¡las fórmulas se vuelven más complejas en los últimos modelos!) Se recomienda utilizar TORA o la plantilla *excelPoissonQ.xls* para manejar estos cálculos.

Ejemplo 18.6-4

Considere la instalación de lavado de autos del ejemplo 18.6-2. Suponga que la instalación cuenta con un total de 4 espacios de estacionamiento. Si el estacionamiento está lleno, los autos que llegan pueden irse a otras instalaciones. El propietario desea determinar el efecto del limitado espacio de estacionamiento en la pérdida de clientes frente a la competencia.

En términos de la notación del modelo, el límite en el sistema es $N = 4 + 1 = 5$. Los siguientes datos permiten obtener los resultados que aparecen en la figura 18.6.

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
4	6	1	5	infinito

Debido a que el límite en el sistema es $N = 5$, la proporción de clientes perdidos es $p_5 = .04812$, la cual, basada en un día de 24 horas, equivale a perder el negocio de $(\lambda p_5) \times 24 = 4 \times 0.4812 \times 24 = 4.62$ autos al día. La decisión en cuanto a incrementar el tamaño del lote de estacionamiento debe basarse en el valor del negocio perdido.

Mirando el problema desde un ángulo diferente, el tiempo total esperado en el sistema, W_s es de .3736 horas, o aproximadamente 22 minutos, por debajo de los 30 minutos del ejemplo 18.6-3, cuando se permite que todos los autos que lleguen se unan a la instalación. Esta reducción de aproximadamente 25% se asegura a expensas de perder alrededor de 4.8% de todos los clientes potenciales a causa del limitado espacio de estacionamiento

```
Scenario 1:(M/M/1):(GD/5/infinity)
```

Lambda = 4.00000			Mu = 6.00000		
Lambda eff = 3.80752			Rho/c = 0.66667		
Ls = 1.42256			Lq = 0.78797		
Ws = 0.37362			Wq = 0.20695		

n	Probability pn	Cumulative Pn	n	Probability pn	Cumulative Pn
0	0.36541	0.36541	3	0.10827	0.87970
1	0.24361	0.60902	4	0.07218	0.95188
2	0.16241	0.77143	5	0.04812	1.00000

FIGURA 18.6

Resultados del ejemplo 18.6-4 obtenidos con TORA (archivo *toraEx18.6-4.txt*)

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6C

*1. En el ejemplo 18.6-4, determine lo siguiente:
   - **(a)** La probabilidad de que un auto que llegue entre de inmediato a la bahía de lavado.
   - **(b)** El tiempo de espera hasta que se inicie el servicio.
   - **(c)** La cantidad esperada de espacios de estacionamientos vacíos.
   - **(d)** La probabilidad de que todos los espacios de estacionamiento estén ocupados.
   - **(e)** La reducción en porcentaje del tiempo de servicio promedio que limitará el tiempo promedio en el sistema a aproximadamente 10 minutos. (*Sugerencia:* Utilice el método de prueba y error con *excelPoissonQ.xls* o TORA.)

2. Considere la instalación de lavado de autos del ejemplo 18.6-4. Determine la cantidad de espacios de estacionamiento de modo que el porcentaje de los autos que no puedan encontrar un espacio no exceda de 1%.

3. El tiempo que el peluquero Joe Cakes emplea para realizar un corte de pelo es exponencial con una media de 12 minutos. Debido a su popularidad, los clientes suelen llegar (de acuerdo con una distribución de Poisson) a una razón mayor que la que Joe puede manejar: 6 clientes por hora. Joe en realidad se siente cómodo si la tasa de llegadas se reduce efectivamente a alrededor de 4 clientes por hora. Para alcanzar esta meta se le ocurrió proporcionar asientos limitados en el área de espera, de modo que los clientes que acaban de llegar se vayan a otra parte cuando se dan cuenta de que todos los asientos están ocupados. ¿Cuántos asientos debe proporcionar Joe para alcanzar su meta?

*4. El ensamble final de los generadores eléctricos en Electro se realiza a la razón de Poisson de 10 generadores por hora. Luego los generadores son transportados por una banda al departamento de inspección para su revisión final. La banda puede transportar un máximo de 7 generadores. Un sensor automático detiene al instante la banda una vez que se llena, lo que evita que el departamento de ensamble final arme más unidades hasta que haya espacio disponible. El tiempo para inspeccionar los generadores es exponencial, con una media de 15 minutos.
   - **(a)** ¿Cuál es la probabilidad de que el departamento de ensamble final detenga la producción?
   - **(b)** ¿Cuál es el promedio de generadores sobre la banda transportadora?
   - **(c)** El ingeniero de producción afirma que las interrupciones en el departamento de ensamble pueden reducirse si se incrementa la capacidad de la banda. De hecho, el ingeniero afirma que la capacidad puede incrementarse al punto en que el departamento de ensamble opere 95% del tiempo sin interrupciones. ¿Es justificable esta reclamación?

5. Una cafetería puede acomodar un máximo de 50 personas. Los clientes llegan en una corriente Poisson a razón de 10 por hora y son atendidos (uno a la vez) a razón de 12 por hora.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llegue no coma en la cafetería porque está llena?

(b) Suponga que a tres clientes (con tiempos de llegada aleatorios) les gustaría sentarse juntos. ¿Cuál es la probabilidad de que se cumpla su deseo? (Suponga que pueden hacerse arreglos para que se sienten juntos en cuanto haya tres sillas disponibles.)

6. Los pacientes llegan a la clínica de un médico de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 20 pacientes por hora. La sala de espera no puede acomodar más de 14 pacientes. El tiempo de consulta por paciente es exponencial, con una media de 8 minutos.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que llegue no espere?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente que llegue encuentre un asiento en la sala?

(c) ¿Cuál es el tiempo total esperado que un paciente pasa en la clínica?

7. La probabilidad p_n de que haya n clientes en el sistema en un escenario $(M/M/1)$:$(GD/5/\infty)$se dan en la siguiente tabla:

n	0	1	2	3	4	5
p_n	.399	.249	.156	.097	.061	.038

La tasa de llegadas λ es de 5 clientes por hora. La tasa de servicio μ es de 8 clientes por hora. Calcule lo siguiente:

*__(a)__ La probabilidad que un cliente que llega no pueda entrar al sistema.

*__(b)__ La tasa a la cual los clientes que llegan no podrán entrar al sistema.

(c) Número esperado en el sistema.

(d) Tiempo de espera promedio en la cola.

8. Demuestre que cuando $\rho = 1$ para $(M/M/1)$:$(GD/N/\infty)$, el número esperado en el sistema, L_s, es igual a $\frac{N}{2}$. ($Sugerencia$: $1 + 2 + \cdots + i = \frac{i(i+1)}{2}$.)

9. Demuestre que λ_{efec} para $(M/M/1)$:$(GD/N/\infty)$ puede calcularse aplicando la fórmula.

$$\lambda_{\text{efec}} = \mu(L_s - L_q)$$

18.6.3 Modelos de varios servidores

Esta sección considera tres modelos de colas con varios servidores paralelos. Los primeros dos modelos son las versiones de varios servidores de los modelos de la sección 18.6-2. El tercer modelo trata el caso del autoservicio, el cual equivale a tener una cantidad infinita de servidores paralelos.

Aplicación de la vida real. Personal de ventas por teléfono de Qantas Airways

Para reducir los costos de operación, Qantas Airways buscar dotar de personal a su oficina principal de reservaciones y ventas por teléfono de forma eficiente, al mismo tiempo que proporciona un servicio de calidad a sus clientes. Tradicionalmente, las necesidades de personal se estiman pronosticando las llamadas telefónicas futuras con base en el incremento histórico del negocio. El aumento de la cantidad de empleados se calcula luego con base en el incremento promedio proyectado de las llamadas telefónicas, dividido entre el promedio de llamadas que un operador puede manejar.

Debido a que los cálculos están basados en promedios, la cantidad adicional de empleados contratados no toma en cuenta las fluctuaciones de la demanda durante el día. En particular, el largo tiempo de espera para el servicio durante horas laborales pico ha ocasionado quejas de los clientes y en consecuencia pérdida de negocios. El problema tiene que ver con la determinación de un plan que balancee el número de empleados contratados y las necesidades de los clientes. La solución utiliza el análisis de colas ($M/M/c$) insertado en un modelo de programación entera. Los ahorros a partir del modelo en la oficina de Sydney fueron alrededor de $173 000 en el año fiscal 1975-1976. Busque los detalles del estudio en el caso 15, capítulo 26, en el sitio web.

($M/M/c$):($GD/\infty/\infty$). Este modelo se ocupa de c servidores paralelos idénticos. La tasa de llegadas es λ y la tasa de servicio por servidor es μ. En esta situación $\lambda_{\text{efec}} = \lambda$ porque no hay límite en el número presente en el sistema.

El efecto de utilizar c servidores idénticos paralelos es un incremento proporcional de tasa de servicio de la instalación. En términos del modelo generalizado (sección 18.5), λ_n y μ_n se definen por lo tanto como

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n < c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}$$

Así que,

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\dots(n\mu)}p_0 = \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}p_0 = \dfrac{\rho^n}{n!}p_0, & n < c \\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{\left(\prod_{i=1}^{c} i\mu\right)(c\mu)^{n-c}}p_0 = \dfrac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}p_0 = \dfrac{\rho^n}{c!\,c^{n-c}}\,p_0, & n \geq c \end{cases}$$

Si $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, y suponiendo que $\frac{\rho}{c} < 1$, el valor de p_0 se determina a partir de $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, la cual da,

$$\begin{aligned} p_0 &= \left\{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}\right\}^{-1} \\ &= \left\{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}\left(\frac{1}{1-\frac{\rho}{c}}\right)\right\}^{-1}, \ \frac{\rho}{c} < 1 \end{aligned}$$

La expresión para L_q se determina como sigue:

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)p_n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}k p_{k+c} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}k\,\frac{\rho^{k+c}}{c^k c!}\,p_0 \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho^{c+1}}{c!c} p_0 \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{\rho^{c+1}}{c!c} p_0 \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k}$$

$$= \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} p_0$$

porque $\lambda_{\text{efec}} = \lambda$, $L_s = L_q + \rho$. Las medidas W_s y W_q se determinan dividiendo L_s y L_q entre λ.

Ejemplo 18.6-5

Dos compañías de taxis prestan servicio a una comunidad. Cada compañía posee dos taxis, y ambas comparten el mercado por igual; las llamadas llegan a la oficina de despachos de cada compañía a una tasa promedio de 8 por hora. El tiempo promedio por viaje es de 12 minutos. Las llamadas llegan de acuerdo con una distribución de Poisson y el tiempo de viaje es exponencial. Las dos compañías fueron adquiridas por un inversionista y se consolidarán en una sola oficina de despachos. Analice la propuesta del nuevo propietario.

Desde el punto de vista de las colas, los taxis son los servidores, y el viaje del taxi es el servicio. Cada compañía puede representarse con el modelo $(M/M/2):(GD/\infty/\infty)$ con l = 8 llamadas por hora y $\mu = \frac{60}{10} = 5$ viajes por taxi por hora. El modelo consolidado es $(M/M/4):(GD/\infty/\infty)$, con l = $2 \times 8 = 16$ llamadas por hora y $\mu = 5$ viajes por taxi por hora.

Una medida adecuada para comparar los dos modelos es el tiempo de espera promedio para un viaje, W_q. La siguiente tabla da los datos de entrada de análisis comparativos.

Escenario	Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
1	8	5	2	infinito	infinito
2	16	5	4	infinito	infinito

La figura 18.7 proporciona los resultados con los dos escenarios. Los resultados muestran que el tiempo de espera para un viaje es de .356 horas (≈ 21 minutos) en la situación de dos taxis y de .149 (≈9 minutos) en la situación consolidada, una notable reducción de más de 50% y una clara evidencia de que la consolidación de las dos compañías está garantizada.

Comentarios. La conclusión del análisis anterior es que los **grupos de servicio** *siempre* proporcionan un modo de operación más eficiente. El resultado es cierto incluso si las instalaciones distintas resultan estar "muy ocupadas" (vea los problemas 2 y 10, conjunto 18.6d).

FIGURA 18.7

Resultados del ejemplo 18.6-5 obtenidos con TORA (archivo *toraEx.18.6-5.txt*)

Comparative analysis

c	Lambda	Mu	L'da eff	p0	Ls	Ws	Lq	Wq
2	8.000	5.000	8.00	0.110	4.444	0.556	2.844	0.356
4	16.000	5.000	16.00	0.027	5.586	0.349	2.386	0.149

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6D

1. Considere el ejemplo 18.6-5.
(a) Demuestre que la notable reducción del tiempo de espera de más de 50% en el caso consolidado está asociada con un incremento del porcentaje del tiempo que los servidores permanecen ocupados.
(b) Determine la cantidad de taxis que la compañía consolidada debe tener para limitar el tiempo de espera promedio de un viaje a 5 minutos o menos.

*__2.__ En el ejemplo de la compañía de taxis, suponga que el tiempo promedio por viaje es en realidad de aproximadamente 14.5 minutos, de modo que la utilización $\left(=\frac{\lambda}{\mu c}\right)$ para los 2 y 4 taxis se incrementa a más de 90%. ¿Sigue valiendo la pena consolidar las dos compañías en una? Use el tiempo de espera promedio de un viaje como medida de comparación.

3. Determine el mínimo de servidores paralelos necesarios en cada una de las siguientes situaciones (llegadas/salidas Poisson) que garantice que la operación de la situación de colas será estable (es decir, que la longitud de la cola no crezca de forma indefinida):
(a) Los clientes llegan cada 5 minutos y son atendidos a razón de 10 clientes por hora.
(b) El tiempo entre llegadas promedio es de 2 minutos, y el tiempo de servicio promedio es de 6 minutos.
(c) La tasa de llegadas es de 30 clientes por hora, y la tasa de servicios por servidor es de 40 clientes por hora.

4. Los clientes llegan al Thrift Bank según una distribución de Poisson, con una media de 45 clientes por hora. Las transacciones por cliente tardan alrededor de 5 minutos y están distribuidas exponencialmente. El banco desea utilizar una sola línea y varias cajas, similar a las que se utilizan en aeropuertos y algunas dependencias. El gerente es consciente de que los clientes pueden irse a otros bancos si perciben que su espera en la línea es "excesiva". Por esta razón, el gerente desea limitar el tiempo de espera en la cola a no más de 30 segundos. ¿Cuántas cajas debe poner en servicio el banco?

*__5.__ El restaurante de comida rápida McBurger opera con 3 cajas. Los clientes llegan, de acuerdo con una distribución de Poisson, cada 3 minutos y forman una línea para ser atendidos por la primera caja disponible. El tiempo para completar un pedido está distribuido exponencialmente con una media de 5 minutos. La sala de espera en el interior del restaurante está limitada. Sin embargo, la comida es buena, y los clientes están dispuestos a esperar afuera del restaurante, si es necesario. Determine el tamaño de la sala de espera dentro del restaurante (excluidos los de las cajas) de modo que la probabilidad de que un cliente que llega no espere afuera del restaurante sea al menos de .999.

6. Una pequeña oficina de correos tiene dos ventanillas abiertas. Los clientes de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 1 cada 3 minutos. Sin embargo, sólo 80% de ellos busca servicio en las ventanillas. El tiempo de servicio por cliente es exponencial, con una media de 5 minutos. Todos los clientes que llegan forman una línea y acceden a las ventanillas con base en la disciplina de primero en llegar, primero en ser atendido (FCFS).
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que llega espere en la línea?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas ventanillas estén ociosas?
(c) ¿Cuál es la longitud promedio de la línea de espera?
(d) ¿Sería posible ofrecer un servicio razonable con sólo una ventanilla? Explique.

7. El centro de cómputo de la U de A está equipado con cuatro maxicomputadoras idénticas. La cantidad de usuarios en cualquier momento es de 25. Cada usuario es capaz de enviar un trabajo desde una terminal cada 15 minutos en promedio, pero el tiempo real entre envíos es exponencial. Los trabajos que llegan automáticamente se van a la primera computadora disponible. El tiempo de ejecución por envío es exponencial con una media de 2 minutos. Calcule lo siguiente:
*__(a)__ La probabilidad de que un trabajo no se ejecute de inmediato inmediatamente después de enviarlo.
(b) El tiempo promedio hasta que los resultados de un trabajo se le devuelvan al usuario.

(c) El promedio de trabajos en espera de ser ejecutados.

(d) El porcentaje de tiempo que todo el centro de cómputo está ocioso.

***(e)** El promedio de computadoras ociosas.

8. El aeropuerto Drake presta servicios a pasajeros, rurales, suburbanos y en tránsito. La distribución de las llegadas de cada uno de los tres grupos es Poisson con tasas medias de 15, 10 y 20 pasajeros por hora, respectivamente. El tiempo para documentar un pasajero es exponencial con media de 6 minutos. Determine la cantidad de mostradores que debe haber en Drake en cada una de las siguientes condiciones:

(a) El tiempo promedio total para documentar un cliente es de al menos 15 minutos.

(b) El porcentaje de ociosidad de los mostradores no excede de 10%.

(c) La probabilidad de que todos los mostradores estén ociosos no excede de .01.

9. En los Estados Unidos, el uso de una sola fila y varios servidores es común en las oficinas de correos, en mostradores de documentación de pasajeros en aeropuertos. Sin embargo, tanto en supermercados como en bancos (especialmente en comunidades pequeñas) tiende a favorecer la configuración de una línea y un servidor, a pesar del hecho de que configuración de una línea y varios servidores ofrece una operación más eficiente. Comente esta observación.

10. Para el modelo $(M/M/c)$:$(GD/\infty/\infty)$, Morse (1958, pág. 103) muestra que $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$,

$$L_q = \frac{\rho}{c - \rho}$$

Con la observación de que $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$ ndica que los servidores están extremadamente ocupados, use esta información para demostrar que la relación del tiempo de espera promedio en la cola en el modelo $(M/M/c)$:$(GD/\infty/\infty)$ al del modelo $(M/M/1)$:$(GD/\infty/\infty)$ tiende a $\frac{1}{c}$ a medida que $\frac{\rho}{c} \rightarrow 1$. Por lo tanto, con $c = 2$, el tiempo de espera promedio puede reducirse en un 50%. La conclusión de este ejercicio es que siempre es aconsejable agrupar los servicios, independientemente de qué tan "sobrecargados" puedan estar los servidores.

11. En la derivación de p_n para el modelo $(M/M/c)$:$(GD/\infty/\infty)$, indique cuál parte de la derivación requiere la condición $\frac{\rho}{c} < 1$. Exponga oralmente el significado de la condición. ¿Qué sucederá si no se satisface la condición?

12. Compruebe que $L_s = L_q + \bar{c}$ comenzando con la definición $L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty}(n - c)p_n$, donde $\bar{c}$ es el número promedio de servidores ocupados. Por consiguiente, demuestre que $\bar{c} = \frac{\lambda_{\text{efec}}}{\mu}$.

13. Demuestre que p_n para el modelo $(M/M/1)$:$(GD/\infty/\infty)$ se puede obtener a partir de la del modelo $(M/M/c)$:$(GD/\infty/\infty)$ con $c = 1$.

14. Demuestre que para el modelo $(M/M/c)$:$(GD/\infty/\infty)$

$$L_q = \frac{c\rho}{(c-\rho)^2}\, p_c$$

15. Para el modelo $(M/M/c)$:$(GD/\infty/\infty)$, demuestre que

(a) La probabilidad de que un cliente esté esperando es $\frac{\rho}{(c - \rho)}\, p_c$.

(b) El número promedio en la cola si no está vacía es $\frac{c}{(c - \rho)}$.

(c) El tiempo de espera anticipado en la cola para los clientes que deben esperar es $\frac{1}{\mu(c - \rho)}$.

$(M/M/c)$:$(GD/N/\infty)$, $c \leq N$. El modelo difiere de $(M/M/c)$:$(GD/\infty/\infty)$ en que el límite del sistema es finito e igual a N. Esto significa que el tamaño de la cola es $N - c$. Las tasas de llegadas y servicio son λ y μ. La tasa de llegadas efectiva λ_{efec} es menor que λ debido al límite del sistema N.

En términos del modelo generalizado (sección 18.5), λ_n y μ_n para el modelo actual se definen como

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \le n \le N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n \le c \\ c\mu, & c \le n \le N \end{cases}$$

Sustituyendo λ_n y μ_n en la expresión general de la sección 18.5 y observando que $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, obtenemos

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} p_0, & 0 \le n < c \\ \dfrac{\rho^n}{c!c^{n-c}} p_0, & c \le n \le N \end{cases}$$

donde

$$p_0 = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c\left(1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1}\right)}{c!\left(1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)\right)} \right)^{-1}, & \dfrac{\rho}{c} \ne 1 \\ \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}(N - c + 1) \right)^{-1}, & \dfrac{\rho}{c} = 1 \end{cases}$$

Luego calculamos L_q en el caso en que $\frac{\rho}{c} \ne 1$ como

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=c}^{N} (n-c)p_n \\ &= \sum_{j=0}^{N-c} j p_{j+c} \\ &= \frac{\rho^c \rho}{c!c} p_0 \sum_{j=0}^{N-c} j\left(\frac{\rho}{c}\right)^{j-1} \\ &= \frac{\rho^{c+1}}{cc!} p_0 \frac{d}{d\left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{j=0}^{N-c} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j \\ &= \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \left\{ 1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c+1} - (N-c+1)\left(1 - \frac{\rho}{c}\right)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} \right\} p_0 \end{aligned}$$

Se puede demostrar que con $\frac{\rho}{c} = 1$, L_q se reduce a

$$L_q = \frac{\rho^c (N - c)(N - c + 1)}{2c!} p_0, \ \frac{\rho}{c} = 1$$

Para determinar W_q y por consiguiente W_s y L_s, calculamos el valor de λ_{efec} como

$$\lambda_{\text{perdida}} = \lambda p_N$$

$$\lambda_{\text{efec}} = \lambda - \lambda_{\text{perdida}} = (1 - p_N)\lambda$$

Ejemplo 18.6-6

En el problema de la compañía de taxis consolidada del ejemplo 18.6-5, suponga que no pueden asegurarse nuevos fondos para la compra de más taxis. Se le aconsejó al propietario que una forma de reducir el tiempo de espera es que la oficina de despachos informe a los nuevos clientes sobre una demora potencial excesiva una vez que la lista de espera llega a ser de 6 clientes. La expectativa es que estos clientes busquen el servicio en otra parte, lo que a su ver reducirá el tiempo de espera de los que ya están en la lista de espera. Evalúe la situación.

Limitar la lista de espera a 6 clientes equivale a hacer $N = 6 + 4 = 10$ clientes, lo que conduce al modelo $(M/M/4)$:$(GD/10/\infty)$ con $\lambda = 16$ clientes por hora y $\mu = 5$ viajes por hora. Los siguientes datos de entrada proporcionan los resultados que aparecen en la figura 18.8.

Lambda	Mu	*c*	Límite del sistema	Límite de la fuente
16	5	4	10	Infinito

El tiempo promedio de espera, W_q, antes de limitar la capacidad del sistema es de .149 horas (≈9 minutos)(vea la figura 18.7), lo cual es aproximadamente el doble del nuevo promedio .075 horas (≈4.5 minutos). Esta notable reducción se logra a expensas de perder alrededor de 3.6% de los clientes potenciales ($p_{10} = .03574$). Sin embargo, este resultado no refleja la pérdida intangible de la buena disposición de los clientes en relación con la operación de la compañía.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6E

1. En el ejemplo 18.6-6, determine lo siguiente:
  - **(a)** El número esperado de taxis ociosos.
  - **(b)** La probabilidad de que un cliente que llama sea el último de la lista.
  - **(c)** El límite en la lista de espera si se desea mantener el tiempo de espera en la cola por debajo de 3 minutos.

FIGURA 18.8

Resultados del ejemplo 18.6-6 obtenidos con TORA (archivo *toraEx18.6-6.txt*)

```
Scenario1: (M/M/4):(GD/10/infinity)

Lambda =      16.00000          Mu =        5.00000
Lambda eff =  15.42815          Rho/c =     0.80000

Ls =          4.23984           Lq =        1.15421
Ws =          0.27481           Wq =        0.07481
```

n	Probability pn	Cumulative Pn	n	Probability pn	Cumulative Pn
0	0.03121	0.03121	6	0.08726	0.79393
1	0.09986	0.13106	7	0.06981	0.86374
2	0.15977	0.29084	8	0.05584	0.91958
3	0.17043	0.46126	9	0.04468	0.96426
4	0.13634	0.59760	10	0.03574	1.00000

2. En la tienda de Eat & Gas funciona una estación de gasolina de dos bombas. El carril que conduce a las bombas puede alojar cuando mucho 3 autos (automóviles), excluyendo a los que se les está dando atención. Los autos que llegan se van a otra parte si el carril está lleno. La distribución de los autos que llegan es de Poisson con media de 20 por hora. El tiempo para llenar el tanque y pagar es exponencial con media de 6 minutos. Determine lo siguiente:
   (a) El porcentaje de autos que buscarán servicio en otra parte.
   (b) El porcentaje de tiempo que una bomba está en uso.
   ***(c)** La utilización en porcentaje de las dos bombas.
   ***(d)** La probabilidad de que un auto que llega no inicie el servicio de inmediato pero que encuentre un espacio vacío en el carril.
   (e) La capacidad del carril que garantice que, en promedio, no más de 10% de los autos que llegan se vaya.
   (f) La capacidad del carril que garantice que la probabilidad de que ambas bombas estén ociosas es de .05 o menos.
3. Tres mecánicos atienden un pequeño taller de reparación de motores. A principios de marzo de cada año, las personas traen sus cañas de timón y podadoras de césped para servicio y reparación. El taller está dispuesto a aceptar todas las cañas de timón y podadoras que traigan los clientes. Sin embargo, cuando los clientes nuevos ven el piso del taller tapizado de trabajos en espera, se van a otra parte para un servicio más rápido. El piso del taller puede alojar un máximo de 15 podadoras o cañas de timón, excluyendo las que están en reparación. Los clientes llegan al taller cada 10 minutos en promedio, y a cada mecánico le lleva un promedio de 30 minutos completar cada trabajo. Tanto los tiempos entre llegadas como los de servicio son exponenciales. Determine lo siguiente:
   (a) El promedio de mecánicos ociosos.
   (b) La cantidad de negocios perdidos ante la competencia por día de 10 horas a causa de la limitada capacidad del taller.
   (c) La probabilidad de que el siguiente cliente que llegue será atendido por el taller.
   (d) La probabilidad de que al menos un mecánico esté ocioso.
   (e) El promedio de cañas de timón o podadoras en espera de servicio.
   (f) Un medida de la productividad total del taller.
4. En la U de A, los estudiantes de primer año recién matriculados son muy notorios porque llegan a la universidad en sus autos (aun cuando se requiere que la mayoría de ellos vivan en el campus y puedan utilizar el sistema de tránsito libre de la universidad). Durante el primer par de semanas del semestre, prevalece el caos vial en el campus porque los estudiantes de primer año tratan desesperadamente de encontrar espacios de estacionamiento. Con una rara dedicación, los estudiantes esperan pacientemente en los carriles del estacionamiento a que alguien salga de modo que puedan estacionar sus autos. Consideremos un escenario específico. El estacionamiento cuenta con 30 espacios pero también puede acomodar 10 autos más en los carriles. Estos 10 autos adicionales no pueden estacionarse en los carriles de forma permanente y deben esperar la disponibilidad de uno de los 30 espacios de estacionamiento. Los estudiantes de primer año llegan al estacionamiento de acuerdo con una distribución de Poisson, con una media de 20 autos por hora. El tiempo de estacionamiento por autos promedia 60 minutos, pero en realidad sigue una distribución exponencial.
   ***(a)** ¿Cuál es el porcentaje de los estudiantes de primer año que se van porque no pueden entrar al estacionamiento?
   ***(b)** ¿Cuál es la probabilidad que un auto que llega espere en los carriles?
   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un auto que llega ocupe el único espacio de estacionamiento que quede en el lote?
   ***(d)** Determine el promedio de espacios de estacionamiento ocupados.

*(e) Determine el promedio de espacios que está ocupado en los carriles.

(f) Determine cuántos estudiantes de primer año no llegarán a tiempo a clase durante un periodo de 8 horas porque el estacionamiento está lleno.

5. Verifique la expresión para p_0 para el modelo $(M/M/c)$:$(GD/N/\infty)$ dado que $\frac{\rho}{c} \neq 1$

6. Compruebe la siguiente igualdad para $(M/M/c)$:$(GD/N/\infty)$:

$$\lambda_{\text{efec}} = \mu\bar{c},$$

donde $\bar{c}$ es el número de servidores ocupado.

7. Verifique la expresión para p_0 y L_q para $(M/M/c)$:$(GD/N/\infty)$ cuando $\frac{\rho}{c} = 1$.

8. Para $(M/M/c)$:$(GD/N/\infty)$con el cual $N = c$, defina λ_n y μ_n en función del modelo general (sección 18.5), luego demuestre que la expresión para p_n es

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, n = 1, 2, \ldots, c$$

donde

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{c} \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$$

$(M/M/\infty)$:$(GD/\infty \neq \infty)$—Modelo de autoservicio. En este modelo, las tasas de llegadas y servicio son λ y μ, respectivamente, y la cantidad de servidores es ilimitada porque el cliente también es el servidor. Un ejemplo típico es realizar la parte escrita del examen para la licencia de conductor. Las gasolineras de autoservicio y los cajeros automáticos que operan durante las 24 horas del día no caen dentro de este modelo porque los servidores en estos casos son en realidad las bombas de gasolina y los cajeros automáticos.

En términos del modelo general de la sección 18.5, tenemos

$$\lambda_n = \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_n = n\mu, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Por lo tanto,

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Debido a que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, se desprende que

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots} = \frac{1}{e^\rho} = e^{-\rho}$$

Por resultado,

$$p_n = \frac{e^{-\rho}\rho^n}{n!}, n = 0,1,2, \ldots$$

la cual es Poisson con media $L_s = \rho$. Como era de esperarse, L_q y W_q son cero porque es una instalación de autoservicio.

Ejemplo 18.6-7

Un inversionista invierte $1000 al mes, en promedio, en el mercado de valores. Debido a que el inversionista debe esperar una buena oportunidad para "comprar", el tiempo real de compra es aleatorio. El inversionista suele conservar los valores durante unos 3 años en promedio pero los vende al azar cuando se le presenta una buena oportunidad para "vender". Aunque al inversionista se le suele reconocer como un astuto corredor del mercado de valores, la experiencia pasada indica que alrededor de 25% de los valores declinan a 20% al año, aproximadamente. El 75% restante aumenta de valor a razón de 12% al año. Estime el capital accionario del inversionista (a largo plazo) promedio en el mercado de valores.

Esta situación se puede tratar como un modelo $(M/M/c):(GD/N/\infty/\infty)$ porque, para todos los propósitos prácticos, el inversionista no tiene que esperar en línea para comprar o vender sus valores. El tiempo promedio entre colocaciones de pedidos es de 1 mes, lo que da $\lambda = 12$ valores por año. La tasa de venta de los valores es $\mu = \frac{1}{3}$ valor por año. Puede obtener los resultados del modelo con los siguientes datos de entrada:

Lambda	Mu	c	Límite del sistema	Límite de la fuente
12	.3333333	infinito	infinito	infinito

Dados los valores de λ y μ, obtenemos

$$L_s = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 36 \text{ valores}$$

La estimación del valor neto *anual* promedio (a largo plazo) del inversionista es

$$(.25L_s \times \$1000)(1 - .20) + (.75L_s \times \$1000)(1 + .12) = \$63{,}990$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6F

1. En el ejemplo 18.6-7, calcule lo siguiente:
   (a) La probabilidad de que el inversionista venda todos sus valores.
   (b) La probabilidad de que el inversionista posea al menos 10 valores.
   (c) La posibilidad de que el inversionista posea entre 30 y 40 valores, inclusive.
   (d) El capital accionario anual neto del inversionista si sólo 10% de los valores se deprecian 30% al año y el 90% restante suben 15% al año.
2. Se requiere que los nuevos conductores aprueben exámenes escritos antes de someterlos a un examen de manejo en carretera. Estos exámenes suelen ser administrados por el departamento de policía de la ciudad. Los registros en la ciudad de Springdale muestran que el promedio de exámenes escritos es de 100 por día de ocho horas. El tiempo promedio necesario para completar el examen es aproximadamente de 30 minutos. Sin embargo, la llegada real de los conductores que van a realizar el examen y el tiempo que cada uno emplea en el examen son totalmente aleatorios. Determine lo siguiente:
   *__(a)__ La cantidad promedio de sillas que el departamento de policía debe proporcionar en el salón donde se realizan los exámenes.
   *__(b)__ La probabilidad de que la cantidad de conductores que van a realizar el examen no exceda el promedio de sillas proporcionadas en el salón.
   (c) La probabilidad de que no se administren exámenes en cualquier día.
3. Demuestre (utilizando *excelPoissonQ.xls* o TORA) que con $\rho = .1$, los valores de L_s, L_q, W_s y W_q y p_n para el modelo $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ pueden estimarse con confiabilidad uti-

lizando las fórmulas menos complicadas del modelo $(M/M/\infty)$:$(GD/\infty/\infty)$ con c tan pequeño como 4 servidores.

4. Repita el problema 3 para $\rho = 9$ grande, y demuestre que la misma conclusión es válida excepto que el valor de c debe ser mayor (al menos 14). A partir de los resultados de los problemas 3 y 4, ¿a qué conclusión puede llegarse con respecto al uso de $(M/M/\infty)$:$(GD/\infty/\infty)$ para estimar los resultados del modelo $(M/M/c)$:$(GD/\infty/\infty)$?

18.6.4 Modelo de servicio de máquinas (*M/M/R*):(*GD/K/K*), $R < K$

La jurisdicción de este modelo es un taller con K máquinas. Cuando una máquina se descompone, se llama a uno de los técnicos en mantenimiento para que la repare. La tasa de descomposturas *por máquina* es λ descomposturas por unidad de tiempo, y un técnico reparará las máquinas descompuestas a razón de μ máquinas por unidad de tiempo. Todas las descomposturas y servicios siguen la distribución de Poisson.

La fuente en este modelo es finita porque las máquinas que están funcionando pueden descomponerse, y por consiguiente puede generar llamadas de servicio. Una vez que todas las máquinas se descompongan, no podrá haber más llamadas de servicio.

Dada λ la tasa de descomposturas *por máquina*, la tasa de descomposturas de *todo el taller* es proporcional a la cantidad de máquinas que están funcionando. En función del modelo de colas, tener n máquinas *en el sistema* significa que n máquinas están descompuestas, y que la tasa de descomposturas asociada de todo el taller es

$$\lambda_n = (K - n)\lambda, 0 \leq n \leq K$$

En función del modelo generalizado de la sección 18.5, tenemos

$$\lambda_n = \begin{cases} (K - n)\lambda, & 0 \leq n \leq K \\ 0, & n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq R \\ R\mu, & R \leq n \leq K \end{cases}$$

A partir del modelo generalizado podemos obtener (¡compruébelo!)

$$p_n = \begin{cases} C_n^K \rho^n p_0, & 0 \leq n \leq R \\ C_n^K \dfrac{n!\,\rho^n}{R!\,R^{n-R}} p_0, & R \leq n \leq K \end{cases}$$

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{R} C_n^K \rho^n + \sum_{n=R+1}^{K} C_n^K \frac{n!\,\rho^n}{R!\,R^{n-R}} \right)^{-1}$$

No hay expresión alguna de forma cerrada para L_s y por consiguiente debe calcularse por medio de la siguiente definición básica:

$$L_s = \sum_{n=0}^{K} n p_n$$

El valor de λ_{efec} se calcula como

$$\lambda_{\text{efec}} = E\{\lambda(K - n)\} = \lambda(K - L_s)$$

Utilizando las fórmulas de la sección 18.6.1, podemos calcular las medidas restantes de desempeño W_s, W_q y L_q.

Ejemplo 18.6-8

Toolco opera un taller con 22 máquinas. En promedio, una máquina se descompone cada 2 horas. Se requiere un promedio de 12 minutos completar una reparación. Tanto el tiempo entre descomposturas como el tiempo de reparación son exponenciales. A Toolco le interesa determinar la cantidad de técnicos en reparaciones para mantener el taller funcionando "bien".

La situación se analiza investigando la productividad de las máquinas como una función de la cantidad de técnicos, definida como

$$\begin{pmatrix}\text{Productividad}\\ \text{de las máquinas}\end{pmatrix} = \frac{\text{Máquinas disponibles} - \text{Máquinas descompuestas}}{\text{Máquinas disponibles}} \times 100$$

$$= \frac{22 - L_s}{22} \times 100$$

Los resultados en esta situación se obtienen utilizando los siguientes datos de entrada: lambda = .5, mu = 5, R = 1,2,3 o 4, límite del sistema = 22, y límite de la fuente = 22. La figura 18.9 proporciona los resultados. La siguiente tabla da la productividad asociada como una función del número de técnicos en reparaciones.

Técnicos en reparaciones	1	2	3	4
Productividad de las máquinas (100%)	45.44	80.15	88.79	90.45
Incremento marginal (100%)	—	34.71	8.64	1.66

Los resultados muestran que con un técnico la productividad es baja (= 45.44%). Si se aumenta la cantidad de técnicos a dos, la productividad salta 34.71% a 80.15%. Cuando el taller emplea tres técnicos, la productividad se incrementa sólo en aproximadamente de 8.64% a 88.79%, mientras que los cuatro técnicos incrementarán la productividad en un escaso 1.66% a 90.45%.

Juzgando a partir de estos resultados, se justifica el uso de dos técnicos. El caso de tres no es tan fuerte ya que eleva la productividad en sólo 8.64%. Tal vez una comparación monetaria entre el costo de contratar un tercer técnico y el ingreso atribuido al incremento de 8.64% de la productividad pueda usarse para resolver este punto (vea la sección 18.10 para un análisis de los modelos de costos).

FIGURA 18.9

Resultados del análisis comparativo realizado con TORA para el ejemplo 18.6-8 (archivo *toraEx18.6-8.txt*)

Comparative Analysis

c	Lambda	Mu	L'da eff	p0	Ls	Lq	Ws	Wq
1	0.500	5.00	4.9980	0.0004	12.0040	11.0044	2.4018	2.2018
2	0.500	5.00	8.8161	0.0564	4.3677	2.6045	0.4954	0.2954
3	0.500	5.00	9.7670	0.1078	2.4660	0.5128	0.2525	0.0525
4	0.500	5.00	9.9500	0.1199	2.1001	0.1102	0.2111	0.0111

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.6G

1. En el ejemplo 18.6-8, haga lo siguiente:
   (a) Verifique los valores de λ_{efec} dados en la figura 18.9.
   ***(b)** Calcule la cantidad esperada de técnicos ociosos, si $R = 4$.
   (c) Calcule la probabilidad de que los técnicos estén ociosos, si $R = 3$.
   ***(d)** Calcule la probabilidad de que la mayoría (más de la mitad) de los técnicos estén ociosos, si $R = 3$.
2. En el ejemplo 18.6-8, defina y calcule la productividad de los técnicos para $R = 1,2,3$, y 4. Utilice esta información junto con la medida de productividad de la máquina para decidir el número de técnicos que Toolco debe contratar.
3. En los cálculos de la figura 18.9, puede parecer confuso que la tasa promedio de descomposturas de máquinas en el taller, λ_{efec}, se incrementa con el incremento de R. Explique por qué debe esperarse el incremento de λ_{efec}.

*4. Un operador atiende 5 máquinas automáticas. Después de que cada máquina completa un lote, el operador debe reiniciarla antes de que se inicie un nuevo lote. El tiempo para completar un lote es exponencial con media de 45 minutos. El tiempo de preparación también es exponencial con media de 8 minutos.
   (a) Determine el promedio de máquinas en espera de ser preparadas o que se están preparando.
   (b) Calcule la probabilidad de que todas las máquinas estén funcionando.
   (c) Determine el tiempo promedio que una máquina está detenida.

5. Kleen All es una compañía de servicios que realiza varios trabajos peculiares, como jardinería, poda de árboles y pintura de casas. Los 4 empleados de la compañía salen de la oficina con la primera asignación del día. Después de completar una asignación, el empleado llama a la oficina para pedir instrucciones para el siguiente trabajo que se va a realizar. El tiempo para completar una asignación es exponencial con una media de 45 minutos. El tiempo de viaje entre los trabajos también es exponencial con una media de 20 minutos.
   (a) Determine el promedio de empleados que viajan entre los trabajos.
   (b) Calcule la probabilidad de que ningún empleado ande en camino.

*6. Luego de una larga espera, los Newborns fueron recompensados con quíntuples, 2 niños y 3 niñas, gracias a los maravillosos avances de la medicina. Durante los primeros 5 meses, la vida de los niños consistía en dos estados, despiertos (la mayor parte del tiempo llorando) y dormidos. De acuerdo con los Newborns, las actividades de los bebés de "despertar-dormir" nunca coinciden. En su lugar, todo el asunto es totalmente aleatorio. De hecho, la señora Newborn, profesional en estadísticas, cree que el tiempo que cada bebé llora es exponencial, con una media de 30 minutos. La cantidad de sueño que cada bebé obtiene también resulta ser exponencial, con media de 2 horas. Determine lo siguiente:
   (a) El promedio de bebés despiertos en cualquier momento.
   (b) La probabilidad de que todos los bebés estén dormidos.
   (c) La probabilidad de que los Newborns no se sientan felices porque haya más bebés despiertos (y llorando) que dormidos.

7. Verifique la expresión de p_n para el modelo $(M/M/R)$:$(GD/K/K)$.
8. Demuestre que la tasa de descomposturas en el taller puede calcularse a partir de la fórmula

$$\lambda_{efec} = \mu \overline{R}$$

donde $\overline{R}$ es el promedio de técnicos ocupados.

9. Verifique los siguientes resultados en el caso especial de un técnico ($R = 1$): 1

$$p_n = \frac{K!\,\rho^n}{(K - n)!}p_0$$

$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{R}\frac{K!\,\rho^n}{(K - n)}\right)^{-1}$$

$$L_s = K - \frac{(1 - p_0)}{\rho}$$

18.7 (*M*/*G*/1):(*GD*/∞/∞)—FÓRMULA DE POLLACZEK-KHINTCHINE (P-K)

Los modelos de colas en los que las llegadas y salidas no siguen la distribución de Poisson son complejos. En general, es aconsejable utilizar la simulación como una herramienta alternativa para analizar estas situaciones (vea el capítulo 19).

Esta sección presenta una de las pocas colas no Poisson para la cual hay disponibles resultados analíticos. Se trata del caso en que el tiempo de servicio, t, está representado por cualquier distribución de probabilidad con media $E\{t\}$ y varianza var$\{t\}$. Los resultados del modelo incluyen las medidas de desempeño básicas L_s, L_q, W_s y W_q, así como también p_0. El modelo no proporciona una expresión de forma cerrada para p_n debido a la incontrolabilidad analítica.

Sea λ la tasa de llegadas a la instalación de un solo servidor. Dadas $E\{t\}$ y var{t} de la distribución del tiempo de servicio y que $\lambda E\{t\} < 1$, se puede demostrar por medio de un análisis de cadena de Markov/probabilidad compleja que

$$L_s = \lambda E\{t\} + \frac{\lambda^2(E^2\{t\} + \text{var}\{t\})}{2(1 - \lambda E\{t\})},\ \lambda E\{t\} < 1$$

La probabilidad de que la instalación esté vacía (ociosa) se calcula como

$$p_0 = 1 - \lambda E\{t\} = 1 - \rho$$

Dada $\lambda_{\text{efec}} = \lambda$, las medidas de desempeño restantes (L_q, W_s y W_q) se derivan a partir de L_s, como se explica en la sección 18.6.1.

La plantilla *excelPKFormula.xls* automatiza los cálculos de este modelo.

Ejemplo 18.7-1

En la instalación de lavado de autos Automata del ejemplo 18.6-2, suponga que se instala un sistema nuevo de modo que el tiempo de servicio de todos los autos es constante e igual a 10 minutos. ¿Cómo afecta el nuevo sistema al funcionamiento de la instalación?

A partir del ejemplo 18.6-2, $\lambda_{\text{efec}} = \lambda = 4$ autos por hora. El tiempo de servicio es constante de modo que $E\{t\} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ hora y var $\{t\} = 0$. Por lo tanto,

$$L_s = 4\left(\tfrac{1}{6}\right) + \frac{4^2\left(\left(\tfrac{1}{6}\right)^2 + 0\right)}{2\left(1 - \tfrac{4}{6}\right)} = 1.33 \text{ autos}$$

$$L_q = 1.333 - \left(\tfrac{4}{6}\right) = .667 \text{ autos}$$

$$W_s = \frac{1.333}{4} = .333 \text{ horas}$$

$$W_q = \frac{.667}{4} = .167 \text{ horas}$$

Es interesante comparar los tiempos de espera con los del caso Poisson en el ejemplo 18.6-2, $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$. Las tasas de llegadas y salidas son las mismas en ambos casos ($\lambda = 4$ autos por hora y $\mu = \frac{1}{E\{t\}} = 6$ autos por hora). No obstante, como se muestra en la tabla siguiente, el tiempo de espera anticipado es menor en el modelo actual. Los resultados tienen sentido porque un tiempo de servicio constante indica *más certeza* en la operación de la instalación.

	$(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$	$(M/D/1):(GD/\infty/\infty)$
W_s (hr)	.500	.333
W_q (hr)	.333	.167

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.7A

1. En el ejemplo 18.7-1, calcule el porcentaje de tiempo que la instalación está ociosa.

2. Resuelva el ejemplo 18.7-1 suponiendo que la distribución del tiempo de servicio es como sigue:
*(a)** Uniforme entre 8 y 20 minutos.
(b) Normal con $\mu = 12$ minutos y $\sigma = 3$ minutos.
(c) Discreto con valores iguales a 4,8 y 15 minutos y probabilidades de .2, .6 y .2, respectivamente.

3. Layson Roofing Inc. instala techos de tejas en casas nuevas y viejas en Arkansas. Los clientes potenciales solicitan el servicio al azar a razón de nueve trabajos por mes de 30 días y se les pone en una lista de espera para ser procesados sobre la base de FCFS. Los tamaños de las casas varían, pero es bastante razonable suponer que las áreas del techo están uniformemente distribuidas entre 150 y 300 metros cuadrados. Por lo común, la cuadrilla de trabajo puede completar 75 cuadrados al día. Determine lo siguiente:
(a) Los trabajos de techado pendientes promedio de Layson.
(b) El tiempo promedio que un cliente espera hasta que se completa el trabajo de techado.
(c) Si la cuadrilla de trabajo se incrementa al punto de que pueden completar 150 cuadrados al día, ¿cómo afectará esto al tiempo promedio hasta que se completa un trabajo?

*4.** Optica elabora lentes de prescripción de acuerdo con los pedidos de los clientes. Cada trabajador se especializa en ciertos tipos de lentes. La compañía ha estado experimentando demoras inusuales en el procesamiento de prescripciones bifocales y trifocales. El trabajador a cargo recibe 30 pedidos por día de 8 horas. El tiempo para completar una prescripción en general está normalmente distribuido, con una media de 12 minutos y una desviación estándar de 3 minutos. Después de emplear entre 2 y 4 minutos, uniformemente distribuidos, para inspeccionar los lentes, el trabajador puede empezar a procesar una nueva prescripción. Determine lo siguiente:
(a) El porcentaje de tiempo que el trabajador está ocioso.
(b) El promedio de prescripciones bifocales y trifocales pendientes en Óptica.
(c) El tiempo promedio hasta que se completa una prescripción.

5. Un producto llega de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de uno cada 45 minutos. El producto requiere dos operaciones aleatorias atendidas por un trabajador. La primera operación utiliza una máquina semiautomática que completa su ciclo en exactamente 28 minutos. La segunda operación realiza ajustes y cambios menores, y su tiempo

depende de la condición del producto cuando sale de la operación 1. Específicamente, el tiempo de la operación 2 es uniforme entre 3 y 6 minutos. Debido a que cada operación requiere toda la atención del trabajador, no se puede cargar un nuevo producto en la máquina semiautomática hasta que el producto actual sale de la operación 2.

(a) Determine la cantidad de productos en espera de ser procesados en la máquina semiautomática.

(b) ¿Cuál es el porcentaje de tiempo que el trabajador estará ocioso?

(c) Cuánto tiempo se requiere, en promedio, para que un producto que llega salga de la operación 2?

6. $(M/M/1):(GD\infty/\infty)$. Demuestre que en el caso en que el tiempo es constante, la fórmula P-K se reduce a

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

donde $\mu = \frac{1}{E\{t\}}$ y $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E\{t\}$.

7. $(M/E_m/1):(GD/\infty/\infty)$. Dado que el tiempo de servicio es Erlang con parámetros m y μ (es decir, $E\{t\} = \frac{m}{\mu}$ y $\text{var}\{t\} = \frac{m}{\mu^2}$), demuestre que la fórmula P-K se reduce a

$$L_s = m\rho + \frac{m(1+m)\rho^2}{2(1-m\rho)}$$

8. Demuestre que la fórmula P-K se reduce a L_S del modelo $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ cuando el tiempo de servicio es exponencial con media de $\frac{1}{\mu}$ unidades de tiempo.

9. En una instalación de servicios con c servidores paralelos, suponga que los clientes según una distribución de Poisson, con tasa media de λ. Los clientes que llegan son asignados a los servidores (ocupados o desocupados) de una forma estrictamente de rotación.

(a) Determine la distribución de la probabilidad del tiempo entre llegadas.

(b) Suponga en el inciso (a) que los clientes que llegan son asignados al azar a los c servidores con probabilidades α_i, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,c$, y $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_c = 1$. Determine la distribución de la probabilidad del tiempo entre llegadas.

18.8 OTROS MODELOS DE COLAS

Las secciones anteriores se concentraron en el modelo de colas de Poisson. La literatura sobre colas abunda con otros tipos de colas. En particular, las colas con prioridad de servicio, las colas en red y las colas no Poisson forman un importante cuerpo de la literatura de teoría de colas. Estos modelos se encuentran en la mayoría de libros especializados en la teoría de colas.

18.9 MODELOS DE DECISIÓN EN COLAS

El *nivel de servicio* en una instalación de colas es una función de la tasa de servicios, m, y de la cantidad de servidores paralelos, c. Esta sección presenta dos modelos de decisión para determinar niveles de servicio "adecuado" en sistemas de colas: (1) un modelo de costos, y (2) un modelo de nivel de aspiración. El objetivo es encontrar un balance entre el nivel de servicio y la espera.

18.9.1 Modelos de costos

Los modelos de costos tratan de balancear dos costos conflictivos:

1. El costo del ofrecimiento del servicio.
2. El costo de la demora al ofrecer el servicio (tiempo de espera del cliente).

Un incremento de un costo provoca automáticamente una reducción del otro, como se demostró antes en la figura 18.1.

Si x ($= \mu$ o c) representa el *nivel de servicio*, el modelo de costos se expresa como

$$ETC(x) = EOC(x) + EWC(x)$$

donde

ETC = Costo total esperado *por unidad de tiempo*
EOC = Costo de operación esperado de la instalación *por unidad de tiempo*
EWC = Costo de espera anticipado *por unidad de tiempo*

Las formas más simples de EOC y EWC son las siguientes funciones lineales:

$$EOC(x) = C_1 x$$

$$EWC(x) = C_2 L_s$$

donde

C_1 = Costo *marginal* por unidad de x por unidad de tiempo
C_2 = Costo de espera por unidad de tiempo por cliente (en espera)

Los dos ejemplos siguientes ilustran el uso del modelo de costos. El primer ejemplo supone $x = \mu$ y el segundo supone $x = c$.

Ejemplo 18.9-1

KeenCo Publishing se encuentra en el proceso de comprar una copiadora comercial de alta velocidad. Los vendedores propusieron cuatro modelos cuyas especificaciones se resumen a continuación.

Modelo de copiadora	Costo de operación ($/h)	Velocidad (hojas/min)
1	15	30
2	20	36
3	24	50
4	27	66

Los trabajos llegan a KeenCo en una corriente Poisson a razón de cuatro trabajos por día de 24 horas. El tamaño del trabajo es aleatorio con promedios aproximadamente de 10,000 hojas por trabajo. Los contratos con los clientes especifican un costo de penalización por entrega retrasada de $80 por trabajos por día. ¿Cuál copiadora debe comprar KeenCo?

El costo total esperado *por día* asociado con la copiadora i es

$$ETC_i = EOC_i + EWC_i$$
$$= C_{1i} \times 24 + C_{2i}L_{si}$$
$$= 24C_{1i} + 80L_{si}, i = 1,2,3,4$$

Los datos del problema dan los valores de C_{1i}. Determinamos L_{si} reconociendo que, para todos los propósitos prácticos, cada copiadora puede ser tratada como un modelo $(M/M/1):(GD\infty/\infty)$. La tasa de llegadas es $\lambda = 4$ trabajos/día. La tasa de servicios μ_i asociada con el modelo i se calcula como

Modelo i	Tasa de servicios μ_i (trabajos/día)
1	4.32
2	5.18
3	7.20
4	9.50

El cálculo de la tasa de servicios se demuestra para el modelo 1.

$$\text{Tiempo promedio por trabajo} = \frac{10{,}000}{30} \times \frac{1}{60} = 5.56 \text{ horas}$$

Por lo tanto,

$$\mu_1 = \frac{24}{5.56} = 4.32 \text{ trabajos/día}$$

Los valores de L_{si} calculados por TORA o *excelPoissonQ.xls*, se dan en la siguiente tabla:

Modelo i	λ_i (Trabajos/día)	μ_i(Trabajos/día)	L_{si}(Trabajos)
1	4	4.32	12.50
2	4	5.18	3.39
3	4	7.20	1.25
4	4	9.50	0.73

Los costos de los cuatro modelos se calculan como sigue:

Modelo i	EOC_i (\$)	EWC_i (\$)	ETC_i (\$)
1	360.00	1000.00	1360.00
2	480.00	271.20	751.20
3	**576.00**	**100.00**	**676.00**
4	648.00	58.40	706.40

El modelo 3 produce el costo mínimo.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.9A

1. En el ejemplo 18.9-1, haga lo siguiente:

(a) Verifique los valores de μ_2, μ_3 y μ_4 dados en el ejemplo.

(b) Suponga que la penalización de \$80 por trabajo por día se aplica sólo a trabajos que *no* "están en proceso" al final del día. ¿Cuál copiadora produce el costo mínimo total por día?

***2.** Metalco va a contratar a un técnico en mantenimiento para un taller de 10 máquinas. Se están considerando dos candidatos. El primero puede realizar reparaciones a razón de 5 máquinas por hora y gana $15 por hora. El segundo, por estar más calificado, recibe $20 por hora y puede reparar 8 máquinas por hora. Metalco estima que cada máquina descompuesta incurrirá en un costo de $50 por hora a causa de la producción perdida. Suponiendo que las máquinas se descomponen de acuerdo con una distribución de Poisson con una media de 3 por hora y que el tiempo de reparación es exponencial, ¿cuál técnico debe ser contratado?

3. B&K Groceries va a abrir una tienda que presumirá de constar con lectores de barras de "última generación". El señor Bih, uno de los propietarios de B&K ha limitado las opciones a dos lectores: El lector A puede procesar 10 artículos por minuto, y el lector B puede leer 15 artículos por minuto. El costo diario de operación (10 horas) y mantenimiento de los lectores es de $25 y $35 para los modelos A y B respectivamente. Los clientes que terminan sus compras llegan a la caja de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 10 clientes por hora. Cada carrito lleva entre 25 y 35 artículos, distribuidos de manera uniforme. El señor Bih estima que el costo promedio por cliente que espera por minuto es aproximadamente de 20 centavos. ¿Cuál lector debe adquirir B&K? (*Sugerencia:* El tiempo de servicio por cliente no es exponencial, sino uniformemente distribuido.)

4. H&I Industry produce una máquina especial con diferentes tasas de producción (piezas por hora) para satisfacer las especificaciones del cliente. El propietario de un taller está considerando comprar una de estas máquinas y desea adquirir la de velocidad más económica (en piezas por hora). Por experiencias pasadas, el propietario estima que los pedidos de los clientes llegan al taller de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de tres pedidos por hora. Cada pedido promedia 500 piezas. Los contratos entre el propietario y los clientes especifican una penalización de $100 por pedido retrasado por hora.

(a) Suponiendo que el tiempo de producción real por pedido es exponencial, desarrolle un modelo de costos general como una μ función de la tasa de producción.

***(b)** A partir del modelo de costos en (a), determine una expresión para la tasa de producción óptima.

***(c)** Aplicando los datos del problema, determine la tasa de producción óptima que el propietario debe obtener de H&I.

5. A un taller llegan trabajos a una taza de distribución de Poisson a razón de 80 trabajos por semana. Una máquina automática representa el cuello de botella en el taller. Se estima que un incremento unitario de la producción de la máquina costará $250 por semana. Los trabajos retrasados normalmente originan un negocio perdido, el que se supone es de $500 por trabajo por semana. Determine la tasa de producción óptima para la máquina automática.

6. Pizza Unlimited vende dos modelos de restaurantes franquiciados. La capacidad del modelo A es de 20 grupos de clientes, la del modelo B es de 30 grupos. El costo mensual de operación del modelo A es de $12,000 y el del modelo B es de $16,000. Un inversionista desea montar un restaurante de pizzas estilo buffet que grupos de clientes, cada uno ocupando una mesa, lleguen siguiendo una distribución de Poisson a razón de 25 grupos por hora. Si todas las mesas están ocupadas, los clientes se irán a otra parte. El modelo A servirá a 26 grupos por hora, el modelo B servirá a 29 grupos por hora. Debido a la variación de los tamaños de los grupos y de los tipos de órdenes, el tiempo de servicio es exponencial. El inversionista estima que el promedio de negocio perdido por grupo de clientes por hora es de $15. Se estima que una demora en el servicio de los clientes que esperan cuesta un promedio de $10 por grupo de clientes por hora.

(a) Desarrolle un modelo de costos apropiado.

(b) Suponiendo que el restaurante estará abierto 10 horas al día, ¿cuál modelo recomendaría para el inversionista?

7. Suponga que en el problema 6 el inversionista puede elegir cualquier capacidad de restaurante deseada basado en un costo marginal específico por cada unidad de capacidad adicional solicitada. Derive el modelo de costos general, y defina todos sus componentes y términos.

8. Second Time Around vende a consignación artículos populares usados. Su operación puede considerarse como un problema de inventario en el cual las existencias se reponen y agotan al azar, de acuerdo con una distribución de Poisson con tasas de λ y μ artículos por día. Cada unidad de tiempo que el artículo está agotado, Second Time pierde $\$C_1$ a causa de las oportunidades perdidas, y cada unidad de tiempo que un artículo se mantiene en existencia, se incurre en un costo de retención de $\$C_2$.

(a) Desarrolle una expresión para el costo total esperado por unidad de tiempo.

(b) Determine el valor óptimo de $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. ¿Cuál condición debe imponerse a los valores relativos de C_1 y C_2 para que la solución sea consistente con las suposiciones del modelo $(M/M/1):(GD\infty/\infty)$?

Ejemplo 18.9-2

En una instalación de almacén de herramientas manejado por varios empleados, las solicitudes de cambio de herramientas llegan de acuerdo con una distribución de Poisson a razón de 17.5 solicitudes por hora. Cada empleado puede manejar un promedio de 10 solicitudes por hora. El costo de contratar un empleado en la instalación es de \$12 por hora. El costo de la producción perdida por máquina de espera por hora es aproximadamente de \$50. Determine la cantidad óptima de empleados para la instalación.

La situación corresponde a un modelo $(M/M/c)$ en el cual se desea determinar el valor óptimo de c. Por lo tanto, en el modelo de costos general presentado al inicio de esta sección, con $x = c$, obtenemos el siguiente modelo de costos:

$$ETC(c) = C_1c + C_2L_s(c)$$
$$= 12c + 50L_s(c)$$

Observe que $L_s(c)$ es una función de la cantidad de empleados (paralelos) en el almacén.

Utilizamos $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ con $\lambda = 17.5$ solicitudes por hora y $\mu = 10$ solicitudes por hora. El estado estable se alcanza sólo si $c > \frac{\lambda}{\mu}$ es decir $c \geq 2$ en este ejemplo. La tabla siguiente proporciona los cálculos necesarios para determinar el c óptimo. Los valores $L_s(c)$ (determinados por *excelPoissonQ.xls* o TORA) muestran que el número óptimo de empleados es 4.

c	$L_s(c)$ (respuestas)	ETC(c) (\$)
2	7.467	397.35
3	2.217	146.85
4	**1.842**	**140.10**
5	1.769	148.45
6	1.754	159.70

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.9B

1. Resuelva el ejemplo 18.9-2, suponiendo que $C_1 = \$20$ y $C_2 = \$45$.

***2.** Tasco Oil posee una unidad propulsora de oleoducto que opera de forma continua. El tiempo entre descomposturas de cada propulsor es exponencial con una media de 20 horas. El tiempo de reparación es exponencial con una media de 3 horas. En una estación particular, dos técnicos de mantenimiento atienden 10 propulsores. El salario por hora de cada técnico es de \$18. Se estima que las pérdidas del oleoducto son de \$30 por propulsor descompuesto por hora. Tasco está estudiando la posibilidad de contratar un técnico adicional.

(a) ¿Se ahorrarán costos con la contratación de un tercer técnico?

(b) ¿Cuál es pérdida programada en dólares por descompostura cuando la cantidad de técnicos en servicio es de dos?, ¿de tres?

3. Una compañía renta una línea telefónica de telecomunicaciones de banda ancha (WATS, por sus siglas en inglés) por $2000 al mes. La oficina está abierta 200 horas laborales por mes. Durante el tiempo restante, la línea WATS se utiliza para otros propósitos y no está disponible para la compañía. El acceso a la línea WATS durante las horas laborales se amplía a 100 vendedores, cada uno de los cuales puede necesitar la línea en cualquier momento dos veces en promedio por día de 8 horas con tiempo exponencial entre llamadas. Un vendedor siempre espera si la línea WATS está ocupada a un costo estimado de 1 centavo por minuto de espera. Se supone que mientras un vendedor espera una llamada dada no se presentará la necesidad de hacer llamadas. El costo normal de las llamadas (sin utilizar la línea WATS) promedia aproximadamente 50 centavos por minuto, y la duración de cada llamada es exponencial, con una media de 6 minutos. La compañía está considerando rentar (al mismo precio) una segunda línea WATS para mejorar el servicio.

(a) ¿La línea WATS única le está ahorrando dinero a la compañía en comparación con un sistema sin línea WATS? ¿Qué tanto está ganando o perdiendo la compañía por mes en comparación con el sistema sin línea WATS?

(b) ¿Debe rentar la compañía una segunda línea WATS? ¿Cuánto ganaría o perdería sobre el caso de una línea WATS única al rentar una línea más?

***4.** Un taller mecánico incluye 20 máquinas y 3 técnicos en reparaciones. Una máquina en funcionamiento se descompone de acuerdo con una distribución de Poisson. El tiempo de reparación por máquina es exponencial con una media de 6 minutos. Un análisis de colas de la situación muestra un promedio de 57.8 de solicitudes de reparación por día de 8 horas para todo el taller. Suponga que la tasa de producción por máquina es de 25 unidades por hora y que cada unidad producida genera $2 en ingresos. Además, asuma que el salario de un técnico es de $20 por hora. Compare el costo de contratar los técnicos con el costo de los ingresos perdidos cuando las máquinas se descomponen.

5. Las condiciones necesarias para que el $ETC(c)$ (definidas antes) para asumir un valor mínimo con $c = c^*$ son

$$ETC(c^* - 1) \geq ETC(c^*) \text{ y } ETC(c^* + 1) \geq ETC(c^*)$$

Demuestre que estas condiciones se reducen a

$$L_s(c^*) - L_s(c^* + 1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c^* - 1) - L_s(c^*)$$

Aplique el resultado al ejemplo 18.9-2, y demuestre que el resultado es $c^* = 4$.

18.9.2 Modelo de nivel de aspiración

La viabilidad del modelo de costos depende de qué tan bien podamos estimar los parámetros de costos. En general, estos parámetros son difíciles de estimar, en particular el asociado con el tiempo de espera de clientes. El modelo de nivel de aspiración mitiga esta dificultad al trabajar directamente con las medidas de desempeño de la situación de colas. La idea es determinar un intervalo aceptable para el nivel de servicio (μ o c) especificando límites razonables en las medidas de desempeño conflictivas. Tales límites son los **niveles de aspiración** que el tomador de decisiones desea alcanzar.

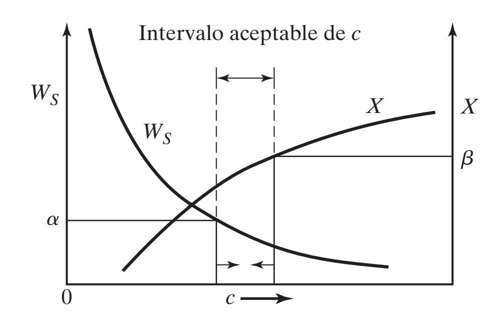


FIGURA 18.10
Aplicación de los niveles de aspiración en la toma de decisiones de colas

El modelo se aplica al modelo de varios servidores para determinar una cantidad "aceptable" de servidores, c^*, teniendo en cuenta dos medidas de desempeño (conflictivas):

1. El tiempo promedio en el sistema, W_s.
2. El porcentaje de ociosidad de los servidores, X.

El porcentaje de ociosidad se calcula como sigue:

$$X = \frac{c - \bar{c}}{c} \times 100 = \frac{c - (L_s - L_q)}{c} \times 100 = \left(1 - \frac{\lambda_{\text{efec}}}{c\mu}\right) \times 100$$

(Vea el problema 12, conjunto 18.6D para la comprobación.)

El problema se reduce a determinar la cantidad de servidores c^* de modo que

$$W_s \leq \alpha \text{ y } X \leq \beta$$

Las constantes α y β son los niveles de aspiración especificados por el tomador de decisiones. Por ejemplo, $\alpha = 3$ minutos y $\beta = 10\%$.

La solución del problema puede determinarse trazando una gráfica de W_s y X como una función de c, como se muestra en la figura 18.10. Localizando α y β en la gráfica, podemos determinar un intervalo aceptable para c^*. Si no se pueden satisfacer las dos condiciones al mismo tiempo, entonces una o ambas deben relajarse antes de que se pueda encontrar un intervalo factible.

Ejemplo 18.9-3

En el ejemplo 18.9-2, suponga que se desea determinar la cantidad de empleados de modo que el tiempo de espera hasta que se recibe una herramienta permanezca por debajo de 5 minutos. Al mismo tiempo, el porcentaje de ociosidad debe estar por debajo de 20%.

Sin pensar, y antes de realizar cualquier cálculo, es inalcanzable un límite de aspiración de 5 minutos en el tiempo de espera hasta que se recibe una herramienta (es decir, $W_s \leq 5$ minutos) porque de acuerdo con los datos del problema, el tiempo de servicio promedio sólo es de 6 minutos.

La siguiente tabla resumen W_s y X como una función de c:

c	2	3	4	5	6	7	8
W_s (min)	25.4	7.6	6.3	6.1	6.0	6.0	6.0
X (%)	12.5	41.7	56.3	65.0	70.8	75.0	78.0

Con base en estos resultados debemos, o reducir el tiempo de servicio o reconocer que la causa del problema es que las herramientas se solicitan a una tasa irrazonablemente alta ($\lambda = 17.5$ solicitudes por hora). Ésta, sin duda, es el área que hay que atacar. Por ejemplo, nos gustaría investigar la razón de tan alta demanda de reemplazo de herramientas. ¿Podría ser que el diseño de la herramienta está defectuoso en sí? O, ¿podría ser que los operadores de las máquinas tratan a propósito de interrumpir la producción para expresar sus quejas?

CONJUNTO DE PROBLEMAS 18.9C

*1. Un taller utiliza 10 máquinas idénticas. Cada máquina se descompone una vez cada 8 horas en promedio. Se requiere media hora en promedio para reparar una máquina descompuesta. Los procesos de descompostura y reparación siguen la distribución de Poisson. Determine lo siguiente:
   - **(a)** La cantidad de técnicos de mantenimiento necesarios de modo que el número promedio de máquinas descompuestas sea menor que 1.
   - **(b)** La cantidad de técnicos en mantenimiento necesarios de modo que el tiempo de demora hasta que se inicie una reparación sea de menos de 10 minutos.

2. En el modelo de costos de la sección 18.9-1, en general es difícil estimar el parámetro de costo C_2 (costo de espera). En consecuencia, puede ser útil calcular el costo C_2 implicado por los niveles de aspiración. Utilizando el modelo de nivel de aspiración para determinar c^*, podemos entonces determinar el C_2 implicado mediante la siguiente desigualdad:

$$L_s(c^*) - L_s(c^*+1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c^*-1) - L_s(c^*)$$

(Vea el problema 5, conjunto 18.9B, para la derivación.) Aplique el procedimiento al problema del ejemplo 18.9-2, con $c^* = 3$ y $C_1 = \$12.00$.

BIBLIOGRAFÍA

Bose, *S., An Introduction to Queuing Systems,* Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.

Gross, D., y M. Harris, *Fundamentals of Queuing Theory*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 1998.

Lee, *A., Applied Queuing Theory,* St. Martin's Press, Nueva York, 1966**.**

Lipsky, *L.*, *Queuing Theory*, *A Linear Algebraic Approach,* Macmillan, Nueva York,1992.

Saaty, T., *Elements of Queuing Theory with Applications,* Dover, Nueva York, 1983.

Tanner, *M., Practical Queuing* Analysis, McGraw-Hill, Nueva York, 1995.

CAPÍTULO 19

Modelado de simulación

19.1 SIMULACIÓN MONTECARLO

Un precursor de la simulación actual es el experimento Montecarlo, un esquema de modelado que estima parámetros estocásticos o determinísticos con base en un muestreo aleatorio. Algunos ejemplos de aplicaciones Montecarlo incluyen la evaluación de integrales múltiples, la estimación de la constante $\pi\,(\cong 3.14159)$, y la inversión de matrices.

Esta sección utiliza un ejemplo para demostrar la técnica Montecarlo. El objetivo del ejemplo es enfatizar la naturaleza estadística de la simulación.

Ejemplo 19.1-1

Utilizaremos un muestreo Montecarlo para estimar el área del siguiente círculo:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

El radio del círculo es $r = 5$ cm, y su centro es $(x, y) = (1, 2)$.

El procedimiento para estimar el área requiere encerrar estrechamente el círculo en un cuadrado cuyo lado sea igual al diámetro del círculo, como se muestra en la figura 19.1. Los puntos de esquina se determinan a partir de la geometría del cuadrado.

La estimación del área del círculo se basa en un experimento de muestreo que brinda una oportunidad igual de seleccionar cualquier punto en el cuadrado. Si m de n puntos muestreados quedan dentro del círculo, entonces

$$\begin{pmatrix}\text{Área aproximada}\\ \text{del círculo}\end{pmatrix} = \frac{m}{n}\begin{pmatrix}\text{Área del}\\ \text{cuadrado}\end{pmatrix} = \frac{m}{n}(10 \times 10)$$

Para asegurarnos de que todos los puntos en el cuadrado son igualmente probables, las coordenadas x y y de un punto en el cuadrado se representan por medio de las siguientes distribuciones *uniformes*:

$$f_1(x) = \frac{1}{10}, -4 \leq x \leq 6$$

$$f_2(y) = \frac{1}{10}, -3 \leq y \leq 7$$

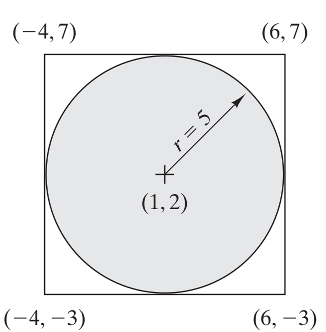


FIGURA 19.1
Estimación Montecarlo del área de un círculo

La determinación de una muestra (x, y) se basa en el uso de números (seudo) aleatorios independientes 0-1. La tabla 19.1 incluye una muestra de tales números, los cuales utilizaremos en los ejemplos de este capítulo. Para el propósito de simulación general, se utilizan operaciones aritméticas especiales para generar números (seudo) aleatorios 0-1, como se demostrará en la sección 19.4.

Se puede usar un par de números aleatorios 0-1, R_1 y R_2, para generar un punto aleatorio (x, y) en el cuadrado utilizando las siguientes fórmulas:

$$x = -4 + [6 - (-4)]R_1 = -4 + 10R_1$$

$$y = -3 + [7 - (-3)]R_2 = -3 + 10R_2$$

Para demostrar la aplicación del procedimiento, consideremos $R_1 = .0589$ y $R_2 = .6733$.

$$x = -4 + 10R_1 = -4 + 10 \times .0589 = -3.411$$

$$y = -3 + 10R_2 = -3 + 10 \times .6733 = 3.733$$

Este punto queda dentro del círculo debido a que

$$(-3.411 - 1)^2 + (3.733 - 2)^2 = 22.46 < 25$$

Comentarios. La precisión de la estimación del área se puede mejorar por medio de experimentos estadísticos comunes.

1. Aumente el tamaño de la muestra, n
2. Use réplicas, N.

TABLA 19.1 Una lista breve de números aleatorios 0-1

.0589	.3529	.5869	.3455	.7900	.6307
.6733	.3646	.1281	.4871	.7698	.2346
.4799	.7676	.2867	.8111	.2871	.4220
.9486	.8931	.8216	.8912	.9534	.6991
.6139	.3919	.8261	.4291	.1394	.9745
.5933	.7876	.3866	.2302	.9025	.3428
.9341	.5199	.7125	.5954	.1605	.6037
.1782	.6358	.2108	.5423	.3567	.2569
.3473	.7472	.3575	.4208	.3070	.0546
.5644	.8954	.2926	.6975	.5513	.0305

El análisis en el ejemplo 19.1-1 plantea dos preguntas con respecto al experimento de simulación:

1. ¿Qué tan grande debe ser la muestra?
2. ¿Cuántas réplicas se requieren?

Hay algunas fórmulas en la teoría estadística para determinar n y N, y dependen de la naturaleza del experimento de simulación y también del nivel de confianza deseado. Sin embargo, como en cualquier experimento estadístico, la regla de oro es que los valores altos de n y N producen resultados de simulación más precisos. Al final, el tamaño de la muestra dependerá del costo asociado con la realización del experimento de simulación. Sin embargo, un tamaño de muestra seleccionado se suele considerar "adecuado" si produce una desviación estándar "relativamente pequeña".

Es necesario expresar los resultados como un intervalo de confianza para tener en cuenta la variación aleatoria del resultado del experimento. Si $\overline{A}$ y s son la media y la raíz cuadrada de la varianza de N réplicas, entonces, con un nivel de confianza α, el intervalo de confianza del área verdadera A es

$$\overline{A} - \frac{s}{\sqrt{N}} t_{\frac{\alpha}{2}, N-1} \leq A \leq \overline{A} + \frac{s}{\sqrt{N}} t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}$$

El parámetro $t_{\frac{\alpha}{2}, N-1}$ se determina con las tablas de distribución t dado un nivel de confianza α y $N - 1$ grados de libertad (vea la tabla t en el apéndice A o utilice la plantilla *excelStatTable.xls)*. Observe que N es igual al número de réplicas, el cual es distinto del tamaño n de la muestra.

Momento de Excel

Los cálculos asociados con cada muestra en el ejemplo 19.1-1 son voluminosos. Se utiliza la plantilla de Excel *excelCircle.xls* (con macros VBA) para probar el efecto del tamaño de la muestra y la cantidad de réplicas en la precisión de la estimación. Los datos de entrada incluyen el radio del círculo; y su centro (cx, cy); el tamaño de la muestra, n; el número de réplicas, N, y el nivel de confianza α. La entrada *Steps* en la celda D4 permite ejecutar varias muestras en la misma ejecución. Por ejemplo, si n = 30,000 y Steps = 3, la plantilla producirá de forma automática el resultado con n = 30,000, 60,000 y 90,000. Se realizan nuevas estimaciones cada vez que se hace clic en el botón Press to Execute Montecarlo porque Excel reaviva la semilla del generador de números aleatorios.

La figura 19.2 resume los resultados de 5 réplicas y los tamaños de muestra de 30,000, 60,000 y 90,000. El área exacta es de 78.54 cm^2 y los resultados Monte Carlo muestran que las áreas medias estimadas con los tres tamaños de muestra son ligeramente diferentes.

La figura 16.2 da los intervalos de 95% de confianza para cada n. Por ejemplo, el intervalo de confianza $78.452 \leq A \leq 78.68$ corresponde a n = 90,000, con N = 5, = 78.566 cm^2, y s = .092 cm *y* $t_{.025,4} = 2.776$. En general, para obtener una precisión razonable en la estimación del intervalo de confianza, el valor de N debe ser al menos 5.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.1A

1. En el ejemplo 19.1-1, estime el área del círculo utilizando las primeras dos columnas de los números aleatorios 0-1 en la tabla 19.1. (Por conveniencia, repase cada columna de arriba a abajo, y seleccione primero R_1 y luego R_2.) ¿Cómo se compara esta estimación con las dadas en la figura 19.2?

	B	C	D	E
1	Monte Carlo Estimation of the Area of a Circle			
2	Input data			
3	Nbr. Replications, N =	5	α =	0.025
4	Sample size, n =	30,000	Steps =	3
5	Radius, r =	5		
6	Center, cx =	1		
7	Center, cy =	2		
8	Output results			
9	Exact area =	78.540		
10	Press to Execute Monte Carlo			
11	Monte Carlo Calculations:			
12		n=30000	n=60000	n=90000
13	Replication 1	78.590	78.543	78.536
14	Replication 2	78.447	78.695	78.731
15	Replication 3	78.747	78.648	78.534
16	Replication 4	78.363	78.500	78.512
17	Replication 5	78.540	78.420	78.517
18				
19	Mean =	78.537	78.561	78.566
20	Std. Deviation =	0.142	0.118	0.092
21				
22	95% lower conf. limit =	78.361	78.415	78.452
23	95% upper conf. limit =	78.714	78.708	78.680

FIGURA 19.2

Resultados de la estimación Montecarlo del área de un círculo obtenidos con Excel (archivo *excelCircle.xls*)

2. Suponga que la ecuación de un círculo es

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

(a) Defina las distribuciones correspondientes $f(x)$ y $f(y)$ y luego demuestre cómo se determina un punto (x, y) de la muestra utilizando el par de aleatorios $(0, 1)$, (R_1, R_2).

(b) Use la plantilla *excelCircle.xls* para estimar el área y el intervalo de 95% de confianza asociado, dados $n = 100{,}000$ y $N = 10$.

3. Use el muestreo Montecarlo para estimar el área del lago que se muestra en la figura 19.3. Base su estimación en las primeras dos columnas de números aleatorios $(0, 1)$ en la tabla 19.1.

4. Considere el juego en el cual dos participantes, Jan y Jim, se turnan para lanzar al aire una moneda. Si el resultado es cara, Jim obtiene $10 de Jan. De lo contrario, Jan obtiene $10 de Jim.

*__(a)__ ¿Cómo se simula el juego con un experimento Montecarlo?

(b) Ejecute el experimento con 5 réplicas de 10 lanzamientos cada una. Use las primeras 5 columnas de los números aleatorios 0-1 en la tabla 19.1 con cada columna correspondiendo a una réplica.

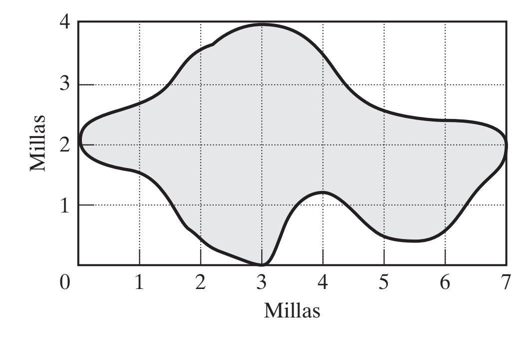


FIGURA 19.3
Mapa del lago para el problema 3, conjunto 19.1A

(c) Establezca un intervalo de 95% de confianza para las victorias de Jan.

(d) Compare el intervalo de confianza en (c) con las victorias teóricas esperadas de Jan.

5. Considere la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 x^2 dx$$

(a) Desarrolle el experimento Montecarlo para estimar la integral.

(b) Use las primeras cuatro columnas de la tabla 19.1 para evaluar la integral con 4 réplicas, cada una de tamaño 5. Calcule el intervalo de 95% de confianza, y compárelo con el valor exacto de la integral.

6. Simule cinco ganancias o pérdidas del siguiente juego de "craps". El jugador lanza dos dados. Si la suma resultante es 7 u 11, el jugador gana $10. De lo contrario, el jugador anota la suma resultado (llamada *punto*) y continúa lanzando los dados hasta que la suma resultante coincida con el *punto* anotado, en cuyo caso el jugador gana $10. Si se obtiene un 7 antes de la coincidencia con el *punto*, el jugador pierde $10.

***7.** El tiempo de espera para recibir un pedido puede ser de 1 o 2 días con probabilidades iguales. La demanda por *día* supone los valores 0, 1 y 2 con las probabilidades respectivas de .2, .7 y .1. Use los números aleatorios de la tabla 19.1 (comenzando con la columna 1) para estimar la distribución conjunta de la demanda y el tiempo de espera. A partir de la distribución conjunta, estime la función de densidad de probabilidad de la demanda durante el tiempo de espera. (*Sugerencia:* La demanda durante el tiempo de espera supone valores discretos de 0 a 4.)

8. Considere el experimento de la aguja de Buffon. Se traza un plano horizontal con líneas paralelas con una separación de Dcm entre ellas. Se deja caer una aguja de $d$cm de longitud ($d < D$) al azar sobre el plano. El objetivo del experimento es determinar la probabilidad de que cualquiera de los extremos toque o cruce una de las líneas. Defina

$h =$ Distancia *perpendicular* del centro de la aguja a una línea (paralela)
$\theta =$ Ángulo de *inclinación* de la aguja con respecto a una línea

(a) Demuestre que la aguja tocará o cruzará una línea sólo si

$$h \leq \frac{d}{2} \text{ sen } \theta, 0 \leq h \leq \frac{D}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

(b) Diseñe el experimento Montecarlo, y estime la probabilidad deseada.

(c) Use Excel para obtener 4 réplicas, cada una de tamaño 10 de la probabilidad deseada. Determine el intervalo de 95% de confianza para la estimación. Suponga que $D = 20$ cm y $d = 10$ cm.

(d) Demuestre que la siguiente fórmula da la probabilidad teórica.

$$p = \frac{2d}{\pi D}$$

(e) Use el resultado en (c) junto con la fórmula en (d) para estimar π.

9. Diseñe un experimento Montecarlo para estimar el valor de la constante π. [*Sugerencia:* Área de un círculo)/(Área de un rectángulo que envuelve estrechamente al círculo) = $\pi/4$.]

19.2 TIPOS DE SIMULACIÓN

La simulación de este día se basa en la idea del muestreo utilizado con el método Montecarlo. Difiere en que estudia el comportamiento de sistemas reales como una *función de tiempo*. Existen dos tipos distintos de modelos de simulación.

1. Los **modelos continuos** se ocupan de sistemas cuyo comportamiento cambia *continuamente* con el tiempo. Estos modelos suelen utilizar ecuaciones diferenciales para describir las interacciones entre los diferentes elementos del sistema. Un ejemplo típico tiene que ver con el estudio de la dinámica de la población mundial.
2. Los **modelos discretos** tienen que ver principalmente con el estudio de líneas de espera con el objetivo de determinar medidas como el tiempo de espera promedio y la longitud de la cola. Estas medidas cambian sólo cuando un cliente entra o sale del sistema. Los instantes en que ocurren los cambios en puntos discretos específicos del tiempo (eventos de llegada y salida), originan el nombre **simulación de evento discreto**.

Este capítulo presenta los fundamentos de la simulación de evento discreto, incluida una descripción de los componentes de un modelo de simulación, la recolección de estadísticas de simulación y el aspecto estadístico del experimento de simulación. También pone énfasis en el papel de la computadora y los lenguajes de simulación en la ejecución de modelos de simulación.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.2A

1. Categorice las siguientes situaciones como discretas o continuas (o una combinación de ambas). En cada caso, especifique el objetivo de desarrollar el modelo de simulación.

*__(a)__ Los pedidos de un artículo llegan al azar a un almacén. Un pedido que no puede ser completado de inmediato con las existencias disponibles debe esperar la llegada de nuevos envíos.

(b) La población mundial se ve afectada por la disponibilidad de los recursos naturales, la producción de alimentos y las condiciones ambientales, el nivel educativo, el cuidado de la salud y las inversiones de capital.

(c) A una bahía receptora de un almacén automatizado llegan mercancías en tarimas. Las tarimas se cargan sobre una banda transportadora y se izan mediante un elevador a una transportadora elevada que mueve las tarimas a los corredores. Los corredores son atendidos por grúas que recogen las tarimas de la banda y las colocan en compartimientos de almacenamiento.

2. Explique por qué estaría de acuerdo o en desacuerdo con el siguiente enunciado: "La mayoría de los modelos de simulación de evento discreto pueden ser considerados en una u otra forma como sistemas de colas, compuestos de *fuentes* desde las cuales llegan los clientes, *colas* donde los clientes pueden esperar, e *instalaciones* donde se atiende a los clientes".

19.3 ELEMENTOS DE LA SIMULACIÓN DE EVENTO DISCRETO

El objetivo final de la simulación es estimar algunas medidas de desempeño deseables que describan el comportamiento del sistema simulado. Por ejemplo, en una instalación de servicio, las medidas de desempeño asociadas pueden incluir el tiempo de espera promedio hasta que un cliente es atendido, la longitud promedio de la cola y la utilización promedio de la instalación de servicio. Esta sección muestra como se recopilan las estadísticas del sistema simulado con base en el concepto de *eventos*.

19.3.1 Definición genérica de eventos

Todas las simulaciones de eventos discretos describen, directamente o indirectamente, situaciones de colas en las que los clientes llegan (para servicio), esperan en la cola (si es necesario) y luego reciben el servicio antes de salir de la instalación de servicio. Como tal, cualquier simulación de evento discreto, independientemente de la complejidad del sistema que describe, se reduce a tratar con dos eventos básicos: llegadas y salidas. El siguiente ejemplo ilustra el uso de los eventos de llegada y salida para describir un sistema compuesto de colas distintas.

Ejemplo 19.3-1

Metalco Jobshop recibe dos tipos de trabajos: regulares y urgentes. Todos los trabajos se procesan en dos máquinas consecutivas con amplias áreas intermedias. Los trabajos urgentes siempre suponen prioridad preventiva sobre los trabajos regulares.

Esta situación consta de colas en tándem que representan las máquinas. Al principio nos podemos inclinar a identificar los eventos de la situación como

*A*11*:* Un trabajo regular llega a la máquina 1.

*A*21*:* Un trabajo urgente llega a la máquina 1.

*D*11*:* Un trabajo regular sale de la máquina 1.

*D*21*:* Un trabajo urgente sale de la máquina 1.

*A*l2*:* Un trabajo regular llega a la máquina 2.

*A*22*:* Un trabajo urgente llega a la máquina 2.

*D*12*:* Un trabajo regular sale de la máquina 2.

*D*22*:* Un trabajo urgente sale de la máquina 2.

En realidad sólo hay dos eventos: la llegada de un (nuevo) trabajo al taller y la salida de un trabajo (terminado) de una máquina. En primer lugar observe que los eventos *D*11 y *A*12 en realidad son los mismos. Lo mismo aplica a *D*21 y *A*22. Luego, en la simulación discreta podemos utilizar un evento (llegada o salida) de ambos tipos de trabajos y simplemente "etiquetar" el evento con un **atributo** que identifique el tipo de trabajo como regular o urgente. (En este caso podemos pensar en el atributo como un *descriptor de identificación personal*, y de hecho lo es). Dado este razonamiento, los eventos del modelo se reducen a (1) una llegada *A* (al taller), y (2) una salida *D* (de una máquina). Las acciones asociadas con el evento de llegada dependen del tipo de trabajo que llega (urgente o regular) y de la disponibilidad de una máquina. Asimismo, el procesamiento del evento de salida dependerá de la máquina y del estatus de los trabajos en espera.

Habiendo definido los eventos básicos de un modelo de simulación, demostramos cómo se ejecuta el modelo. La figura 19.4 ofrece una representación esquemática de ocurrencias típicas de eventos en la escala de tiempo de la simulación. Una vez que se han realizado todas las acciones asociadas con un evento existente, la simulación "salta" al siguiente evento cronológico. En esencia, la ejecución de la simulación ocurre en los instantes en que ocurren los eventos.

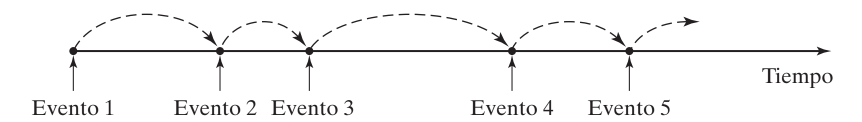


FIGURA 19.4
Ejemplo de la ocurrencia de eventos de simulación en la escala de tiempo

¿Cómo determina la simulación el tiempo de ocurrencia de los eventos? Los eventos de llegada están separados por el tiempo entre llegadas (el intervalo entre llegadas sucesivas) y los eventos de salida son una función del tiempo de servicio en la instalación. Estos tiempos pueden ser determinísticos (por ejemplo un tren que llega a una estación cada 5 minutos) o probabilísticos (como la llegada aleatoria de los clientes a un banco). Si el tiempo entre eventos es determinístico, la determinación de sus tiempos de ocurrencia es simple. Si es probabilístico, utilizamos un procedimiento especial para muestrear de la distribución de probabilidad correspondiente. Este punto se trata en la siguiente sección.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.3A

1. Identifique los eventos discretos necesarios para simular la siguiente situación. Llegan dos tipos de trabajos de dos fuentes diferentes. Ambos tipos se procesan en una sola máquina, con prioridad dada a los trabajos de la primera fuente.

2. Llegan trabajos a una tasa constante en un sistema transportador de carrusel. Tres estaciones de servicio están equidistantes entre sí alrededor del carrusel. Si el servidor está ocioso cuando llega un trabajo a la estación, el trabajo se retira del transportador para procesarlo. De lo contrario, el trabajo continúa girando en el carrusel hasta que el servidor vuelve a estar disponible. Un trabajo procesado se guarda en un área de envío adyacente. Identifique los eventos discretos necesarios para simular esta situación.

3. Los autos llegan a los carriles de una caja de servicio en su coche de un banco, donde cada carril puede alojar un máximo de cuatro autos. Si los dos carriles están llenos, los autos que llegan buscan servicio en otra parte. Si en cualquier momento un carril es al menos dos autos más largo que el otro, el último auto en el carril más largo se pasará a la última posición del carril más corto. El banco opera la instalación de servicio en su coche de 8:00 A.M. a 3:00 P.M. cada día laboral. Defina los eventos discretos de la situación.

***4.** La cafetería en la escuela primaria Elmdale proporciona un almuerzo de menú fijo de una sola charola a todos sus alumnos. Los niños llegan a la ventanilla despachadora cada 30 segundos. Se requieren 18 segundos para recibir la charola del almuerzo. Trace el mapa de los eventos de llegada y salida en la escala de tiempo de los primeros cinco alumnos.

19.3.2 Muestreo de distribuciones de probabilidad

La aleatoriedad de la simulación surge cuanto el intervalo, t, entre eventos sucesivos es probabilístico. Esta sección presenta tres métodos para generar muestras aleatorias sucesivas ($t = t_1, t_2, \ldots$) de una distribución de probabilidad $f(t)$:

1. Método inverso.
2. Método de convolución.
3. Método de aceptación y rechazo.

El método inverso es particularmente adecuado para funciones de densidad de probabilidad analíticamente solubles, como la exponencial y la uniforme. Los otros dos métodos se ocupan de casos más complejos, como el normal y el de Poisson. Los tres métodos se derivan del uso de números aleatorios 0-1 independientes e idénticamente distribuidos.

Esta sección presentará sólo los dos primeros métodos. Los detalles del método de aceptación y rechazo se pueden encontrar en la bibliografía.

Método inverso. Suponga que se desea obtener una muestra aleatoria x de la función de densidad de probabilidad $f(x)$ (continua o discreta). El método inverso determina primero la expresión de forma cerrada de la función de densidad acumulada $F(x) = P\{y \leq x\}$, donde $0 \leq F(x) \leq 1$, para todos los valores definidos de y.

Se puede demostrar que la variable aleatoria $z = F(x)$ está distribuida de modo uniforme en el intervalo $0 \leq z \leq 1$. Con base en este resultado, se determina una muestra aleatoria de $f(x)$ mediante los siguientes pasos (F^{-1} es la inversa de F):

Paso 1. Genere un número aleatorio 0-1, R.

Paso 2. Calcule la muestra deseada $x = F^{-1}(R)$.

La figura 19.5 ilustra los procedimientos tanto de una distribución continua como de una distribución aleatoria discreta.

Ejemplo 19.3-2 (Distribución exponencial)

La función de densidad de probabilidad exponencial $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$ representa el tiempo entre llegadas t a una instalación con valor medio de $\frac{1}{\lambda}$. La función de densidad acumulada es

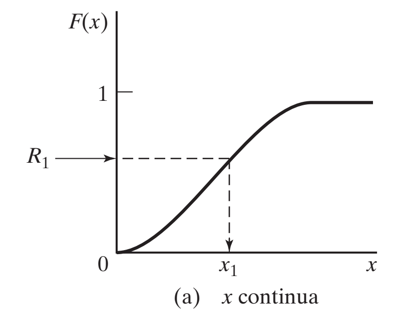
$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$$

Estableciendo $R = F(t)$, podemos resolver t como

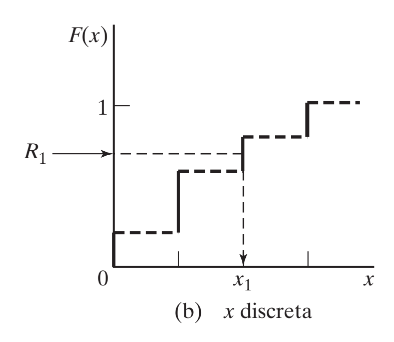
$$t = -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln\,(1 - R)$$

FIGURA 19.5

Muestreo de una distribución de probabilidad por medio del método inverso



(a) x continua



(b) x discreta

Por ejemplo, para $\lambda = 4$ clientes por hora y $R = .9$, el periodo de tiempo hasta que ocurre la siguiente llegada es

$$t_1 = -\left(\frac{1}{4}\right)\ln(1 - .9) = .577 \text{ horas } = 34.5 \text{ minutos}$$

Observe que $1n(1 - R)$ puede ser reemplazado con $1n(R)$ porque $1 - R$ es el complemento de R.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.3B

***1.** En el ejemplo 19.3-2, suponga que el primer cliente llega en el instante 0. Use los primeros tres números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 para generar los tiempos de llegada de los 3 clientes siguientes, y trace la gráfica de los eventos resultantes en la escala de tiempo.

***2.** *Distribución uniforme.* Suponga que la siguiente distribución uniforme describe el tiempo necesario para fabricar una pieza en una máquina:

$$f(t) = \frac{1}{b - a}, a \leq t \leq b$$

Determine una expresión para la muestra t, dado el número aleatorio R.

3. En un taller se reciben trabajos al azar. El tiempo entre llegadas es exponencial con media de 2 horas. El tiempo necesario para procesar un trabajo es uniforme entre 1.1 y 2 horas. Suponiendo que el primer trabajo llega en el instante 0, determine el tiempo de llegada y salida de los primeros cinco trabajos mediante los números aleatorios (0, 1) de la columna 1 de la tabla 19.1.

4. La demanda de una pieza cara de repuesto de un avión de pasajeros es de 0,1,2 o 3 unidades por mes con probabilidades de .2, .3, .4 y .1, respectivamente. El taller de mantenimiento de la aerolínea inicia la operación con existencias de 5 unidades y regresará el nivel de las existencias a 5 unidades inmediatamente después que se reduzca a 2 unidades.

*__(a)__ Idee el procedimiento para muestrear la demanda.

(b) ¿Cuántos meses transcurrirán hasta que ocurra la primera reposición? Use valores sucesivos de R de la primera columna de la tabla 19.1.

5. En una situación de simulación, las unidades de TV se inspeccionan en busca de posibles defectos. Hay 80% de probabilidades de que una unidad pase la inspección, en cuyo caso se le envía a empaque. De lo contrario, la unidad se repara. Podemos representar la situación simbólicamente de dos maneras.

gotoREPARACIÓN/.2, EMPAQUE/.8
gotoEMPAQUE/.8, REPARACIÓN/.2

Estas dos representaciones parecen equivalentes. No obstante, cuando se aplica una secuencia dada de números aleatorios (0, 1) a las dos representaciones, pueden resultar decisiones diferentes (REPARACIÓN o EMPAQUE). Explique por qué.

6. Un jugador lanza una moneda repetidamente hasta que cae una cara. La retribución asociada es 2^n, donde n es la cantidad de lanzamientos hasta que sale una cara.

(a) Idee el procedimiento de muestreo del juego.

(b) Use los números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 para determinar la retribución acumulada después de que salen dos caras.

7. *Distribución triangular.* En la simulación, la carencia de datos puede hacer imposible determinar la distribución de probabilidad asociada con una actividad de simulación. En la mayoría de estas situaciones puede ser fácil describir la variable deseada estimando sus valores mínimos, los más probables y los máximos. Estos tres valores bastan para definir una distribución triangular, la cual puede utilizarse entonces como una estimación "preliminar" de la distribución real.

(a) Desarrolle la fórmula para tomar muestras de la siguiente distribución triangular, cuyos parámetros respectivos son a, b y c:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a \leq x \leq b \\ \frac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)}, & b \leq x \leq c \end{cases}$$

(b) Genere tres muestras de una distribución triangular con parámetros (1,3,7) utilizando los primeros tres números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1.

8. Considere una distribución de probabilidad compuesta de un rectángulo flanqueado por los lados izquierdo y derecho por triángulos rectángulos simétricos. Los intervalos respectivos del triángulo de la izquierda y del triángulo de la derecha son $[a,b]$, $[b,c]$ y$[c,d]$, $a < b < c < d$. Ambos triángulos tienen la misma altura que el rectángulo.

(a) Desarrolle un procedimiento de muestreo.

(b) Determine cinco muestras con $(a, b, c, d) = (1,2,4,6)$ utilizando los cinco primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1.

***9.** *Distribución geométrica*. Demuestre cómo se puede obtener una muestra aleatoria de la siguiente distribución geométrica:

$$f(x) = p(1-p)^x, x = 0, 1, 2, \ldots$$

El parámetro x es el número (de Bernoulli) de fallas hasta que ocurre un éxito, y p es la probabilidad de un éxito, $0 < p < 1$. Genere cinco muestras para $p = .6$, utilizando los cinco primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1.

10. *Distribución de Weibull*. Demuestre cómo se puede obtener una muestra aleatoria de la distribución de Weibull con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^{\alpha}}, x > 0$$

donde $\alpha > 0$ es el parámetro de forma y $\beta > 0$ es el parámetro de escala.

Método de convolución. La idea básica del método de convolución es expresar la muestra deseada como la suma estadística de otras variables aleatorias fáciles de muestrear. Típicas entre estas distribuciones están las de Erland y la de Poisson, cuyas muestras pueden obtenerse con las muestras de la distribución exponencial.

Ejemplo 19.3-3 (Distribución Erlang)

La variable aleatoria m Erlang se define como la suma estándar (convoluciones) de m variables aleatorias exponenciales independientes e idénticamente distribuidas. Sea y la variable aleatoria m Erlang; entonces

$$y = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

donde $y_i, i = 1, 2,\ldots, m$ son exponenciales independientes e idénticamente distribuidas con la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$f(y_i) = \lambda e^{-\lambda y_i}, y_i > 0, i = 1, 2, \ldots, m$$

Según el ejemplo 19.3-2, una muestra de la i-ésima distribución exponencial se calcula como

$$y_i = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(R_i), i = 1, 2, \ldots, m$$

Por lo tanto la muestra m Erlang se calcula como

$$y = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\{\ln(R_1) + \ln(R_2) + \cdots + \ln(R_m)\}$$

$$= -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln\left(\prod_{i=1}^{m} R_i\right)$$

Para ilustrar el uso de la fórmula, suponga que $m = 3$ y $\lambda = 4$ eventos por hora. Los tres primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 resultan $R_1R_2R_3 = (.0589)\ (.6733)(.4799) = .0190$, los cuales dan

$$y = -\left(\tfrac{1}{4}\right)\ln(.019) = .991 \text{ horas}$$

Ejemplo 19.3-4 (Distribución de Poisson)

La sección 18.4.1 muestra que si la distribución del tiempo entre las ocurrencias sucesivas de eventos es exponencial, entonces la distribución de la cantidad de eventos por unidad de tiempo es Poisson, y viceversa. Utilizamos la relación para muestrear la distribución de Poisson.

Suponga que la media de la distribución de Poisson es λ eventos por unidad de tiempo. Se desprende que el tiempo entre eventos es exponencial con media de $\frac{1}{\lambda}$ unidades de tiempo. Esto significa que una muestra n, de Poisson se repetirá durante t unidades de tiempo si, y sólo si,

El Periodo hasta que ocurre el evento $n \leq t <$ el periodo hasta que ocurre el evento $n + 1$
Esta condición se traduce a

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n \leq t < t_1 + t_2 + \cdots + t_{n+1}, n > 0$$

$$0 \leq t < t_1, n = 0$$

La variable aleatoria t_i, $i = 1,2,\ldots, n + 1$, es una muestra de la distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$. Con el resultado del ejemplo 19.3-3, tenemos

$$-\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} R_i\right) \leq t < -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln\left(\prod_{i=1}^{n+1} R_i\right), n > 0$$

$$0 \leq t < -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(R_1), n = 0$$

Estas expresiones se reducen a

$$\prod_{i=1}^{n} R_i \geq e^{-\lambda t} > \prod_{i=1}^{n+1} R_i, n > 0$$

$$1 \geq e^{-\lambda t} > R_1, n = 0$$

Para ilustrar la implementación del proceso de muestreo, supongamos que $\lambda = 4$ eventos por hora. Para obtener una muestra durante un periodo $t = .5$ hora, primero calculamos $e^{-\lambda t} = .1353$. El número aleatorio $R_1 = .0589$ es menor que $e^{-\lambda t} = .1353$. Por consiguiente, la muestra correspondiente es $n = 0$.

Ejemplo 19.3-5 (Distribución normal)

El teorema del límite central (vea la sección 14.4.4) expresa que la suma (convolución) de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas se hace asintóticamente normal a medida que n se hace lo bastante grande. Utilizamos este resultado para generar muestras de una distribución normal con media μ y desviación estándar σ.

Defina

$$x = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$

La variable aleatoria es asintóticamente normal de acuerdo con el teorema del límite central. Dado que el número aleatorio (0,1) uniforme R tiene una medida de $\frac{1}{2}$ y una varianza de $\frac{1}{12}$, se desprende que la media y la varianza de x son $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{12}$, respectivamente. Por lo tanto, una muestra aleatoria, y, de una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ con media μ y desviación estándar σ, se calcula a partir de x como

$$y = \mu + \sigma\left(\frac{x - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right)$$

En la práctica, consideramos que $n = 12$ por conveniencia, lo cual reduce la fórmula a

$$y = \mu + \sigma(x - 6)$$

Para ilustrar el uso de este método, supongamos que deseamos generar una muestra de $N(10,2)$ (media $\mu = 10$ y desviación estándar $\sigma = 2$). Sumando los primeros 12 números aleatorios de las columnas 1 y 2 de la tabla 19.1, tenemos $x = 6.1094$. Por lo tanto $y = 10 + 2(6.1094 - 6) = 10.2188$.

Fórmula de muestreo normal de Box-Muller. La desventaja del procedimiento anterior es que requiere generar 12 números aleatorios por muestra normal, lo cual es computacionalmente ineficiente. Un procedimiento más eficiente utiliza la transformación

$$x = \cos(2\pi R_2)\sqrt{-2\ln(R_1)}$$

Box y Muller (1958) demostraron que x es una $N(0,1)$ estándar. Por lo tanto, $y = \mu + \sigma x$ producirá una muestra de $N(\mu,\sigma)$. El nuevo procedimiento es más eficiente porque requiere sólo dos números aleatorios (0,1). En realidad, este método es aún más eficiente de lo que se formuló, porque Box y Muller demostraron que la fórmula dada produce otra muestra $N(0,1)$ si $\text{sen}(2\pi R_2)$ reemplaza a $\cos(2\pi R_2)$.

Para ilustrar la aplicación del procedimiento de Box y Muller a la distribución normal $N(10,2)$, los dos primeros números aleatorios de la columna 1 de la tabla 19.1 producen las siguientes muestras $N(0, 1)$:

$$x_1 = \cos(2\pi \times .6733)\sqrt{-2\ln(.0589)} \approx -1.103$$
$$x_2 = \operatorname{sen}(2\pi \times .6733)\sqrt{-2\ln(.0589)} \approx -2.109$$

Por lo tanto, las muestras $N(10,2)$ correspondientes son

$$y_1 = 10 + 2(-1.103) = 7.794$$
$$y_2 = 10 + 2(-2.109) = 5.782$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.3C[1]

***1.** En el ejemplo 19.3-3, calcule una muestra Erlang, si $m = 4$ y l = 5 eventos por hora.

2. En el ejemplo 19.3-4, genere tres muestras Poisson durante un periodo de 2 horas, dado que la media de la distribución de Poisson es de 5 eventos por hora.

3. En el ejemplo 19.4-5, genere dos muestras desde $N(8,1)$ utilizando tanto el método de convolución como el de Box-Muller.

4. A Metalco Jobshop llegan trabajos de acuerdo con una distribución de Poisson, con una media de 6 trabajos por día. Los trabajos se asignan a los cinco centros de maquinado del taller en una forma estrictamente rotacional. Determine una muestra del intervalo entre llegadas de trabajos al primer centro de maquinado.

5. Las calificaciones del examen ACT de la clase de estudiante de último año de 1994 en la prepatoria de Springdale son normales, con una medida de 27 puntos y una desviación estándar de 3 puntos. Supongamos que sacamos una muestra aleatoria de seis estudiantes del último año de esa clase. Utilice el método de Box-Muller para determinar la media y la desviación estándar de la muestra.

***6.** El profesor de psicología Yataha está llevando a cabo un experimento de aprendizaje en el cual se entrenan ratones para que encuentren su camino en un laberinto. La base del laberinto es un cuadrado. Un ratón entra al laberinto por una de las cuatro esquinas y debe encontrar su camino a través del laberinto para salir por el mismo punto por donde entró. El diseño del laberinto es tal que el ratón debe pasar por cada uno de los tres puntos de esquina restantes exactamente una vez antes de que salga. Las múltiples rutas del laberinto conectan las cuatro esquinas en un estricto orden en el sentido de las manecillas del reloj. El profesor Yataha estima que el tiempo que el ratón emplea para llegar a un punto de esquina desde otro está distribuido uniformemente entre 10 y 20 segundos, según la ruta que tome. Desarrolle un procedimiento de muestreo para el tiempo que un ratón pasa en el laberinto.

7. En el problema 6, suponga que una vez que el ratón sale del laberinto, de inmediato entra otro ratón. Desarrolle un procedimiento de muestreo para la cantidad de ratones que salen del laberinto en 5 minutos.

---

[1]Para todos los problemas de este conjunto, utilice los números aleatorios de la tabla 19.1 comenzando con columna 1.

8. *Binomial negativa.* Demuestre cómo se puede determinar una muestra aleatoria a partir de la binomial negativa cuya distribución es

$$f(x) = C_x^{r+x-1} p^r (1 - p)^x, x = 0, 1, 2, \ldots$$

donde x es la cantidad de fallas hasta que ocurre el r-ésimo éxito en una secuencia de ensayos de Bernoulli independientes y p es la probabilidad de éxito $0 < p < 1$. (*Sugerencia*: La binomial negativa es la convolución de r muestras geométricas independientes. Vea el problema 9, conjunto 19.3B.)

19.4 GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS

Los números aleatorios uniformes (0, 1) desempeñan un papel clave en el muestreo de distribuciones. Sólo los dispositivos electrónicos pueden generar números aleatorios (0,1) verdaderos. Sin embargo, debido a que los modelos de simulación se ejecutan en la computadora, el uso de dispositivos electrónicos para generar números aleatorios es demasiado lento para este propósito. Además, los dispositivos electrónicos son activados por leyes de probabilidades, lo que hace imposible duplicar la misma secuencia de números aleatorios a voluntad. Este punto es importante porque la depuración, la verificación y la validación del modelo de simulación a menudo requieren la duplicación de la secuencia de los números aleatorios.

La única forma factible de generar números aleatorios (0,1) para usarlos en una simulación está basada en operaciones aritméticas. Tales números no son verdaderamente aleatorios debido a que toda la secuencia puede generarse con anticipación. Es por lo tanto más apropiado referirse a ellos como **números seudoaleatorios**.

La operación aritmética mas común para generar números aleatorios (0,1) es el **método congruencial multiplicativo**. Dados los parámetros u_0, b, c y m, un número seudoaleatorio R_n se puede generar con las fórmulas:

$$u_n = (bu_{n-1} + c)\operatorname{mod}(m), n = 1, 2, \ldots$$

$$R_n = \frac{u_n}{m}, n = 1, 2, \ldots$$

Al valor inicial u_0 se le suele conocer como la **semilla** del generador.

En Law (2007) se pueden encontrar variaciones del método congruencial multiplicativo que mejoran la calidad del generador.

Ejemplo 19.4-1

Genere tres números aleatorios basado en el método congruencial multiplicativo aplicando $b = 9, c = 5$ y $m = 12$. La semilla es $u_0 = 11$.

$$u_1 = (9 \times 11 + 5)\operatorname{mod}12 = 8, R_1 = \frac{8}{12} = .6667$$

$$u_2 = (9 \times 8 + 5)\operatorname{mod}12 = 5, R_2 = \frac{5}{12} = .4167$$

$$u_3 = (9 \times 5 + 5)\operatorname{mod}12 = 2, R_3 = \frac{2}{12} = .1667$$

Momento de Excel

La plantilla *excelRN.xls* implementa el método congruencial multiplicativo. La figura 19.6 genera la secuencia asociada con los parámetros del ejemplo 19.4-1. Observe que la duración del ciclo es exactamente 4, tras de lo cual la secuencia se repite. El punto aquí es que los valores seleccionados de u_0, b, c y m son críticos para determinar la calidad (estadística) del generador y la duración de su ciclo. Por lo tanto, la implementación "casual" de la fórmula congruencial no se recomienda. En su lugar debemos utilizar un generador confiable y probado. Todos los programas de computadora comerciales están equipados con generadores de números aleatorios confiables.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.4A

*__1.__ Use la plantilla *excelRNxis* con el siguiente conjunto de parámetros, y compare los resultados con los del ejemplo 19.4-1:

$$b = 17, c = 111, m = 103, \text{semilla} = 7$$

FIGURA 19.6

Números aleatorios obtenidos con Excel para los datos del ejemplo 19.4-1 (archivo *excelRN.xls*)

	A	B
1	Multiplicative Congruential Method	
2	Input data(B7<=1000)	
3	b =	9
4	c =	5
5	u0 =	11
6	m =	12
7	How many numbers?	10
8	Output results	
9	Press to Generate Sequence	
10	Generated random numbers:	
11	1	0.66667
12	2	0.41667
13	3	0.16667
14	4	0.91667
15	5	0.66667
16	6	0.41667
17	7	0.16667
18	8	0.91667
19	9	0.66667
20	10	0.41667

2. Encuentre un generador de números aleatorios en su computadora, y utilícelo para generar 500 números aleatorios (0,1). Elabore el histograma de los valores resultantes (por medio de la herramienta histograma de Microsoft, vea la sección 12.5) y convénzase visualmente de que los números obtenidos siguen razonablemente la distribución (0,1). En realidad, para probar adecuadamente la secuencia, necesitaría aplicar las siguientes pruebas: bondad de ajuste de ji cuadrada (vea la sección 14.6), realice la prueba en busca de independencia y la prueba de correlación; para los detalles, vea Law (2007).

19.5 MECÁNICA DE LA SIMULACIÓN DISCRETA

Esta sección detalla cómo se reúnen las estadísticas típicas en un modelo de simulación. El vehículo de explicación es un modelo de una sola cola. La sección 19.5.1 utiliza un ejemplo numérico para detallar las acciones y cálculos que ocurren en modelo de simulación de colas de un solo servidor. Debido a los tediosos cálculos que tipifican la ejecución de un modelo de simulación, la sección 19.5.2 muestra cómo se maneja y ejecuta el modelo de un solo servidor con la hoja de cálculo de Excel.

19.5.1 Simulación manual de un modelo de un solo servidor

El tiempo entre llegadas de los clientes a la peluquería HairKare es exponencial con media de 15 minutos. La peluquería es atendida por sólo un peluquero, y se lleva entre 10 y 15 minutos, distribuidos de manera uniforme, para realizar un corte de pelo. Los clientes son atendidos con base en la disciplina primero en llegar, primero en salir (FIFO). El objetivo de la simulación es calcular las siguientes medidas de desempeño:

1. La utilización promedio de la peluquería.
2. La cantidad promedio de clientes que esperan.
3. El tiempo promedio que un cliente espera en la cola.

La lógica del modelo de simulación se puede describir en función de las acciones asociadas con los eventos de llegada y salida del modelo.

Evento de llegada

1. Genere y guarde cronológicamente el tiempo de ocurrencia del siguiente evento de llegada (= tiempo de simulación actual + tiempo entre llegadas).
2. Si la instalación (peluquero) está ociosa.
   a. Inicie el servicio y declare ocupada la instalación. Actualiza las estadísticas de utilización de la instalación.
   b. Genere y guarde cronológicamente el tiempo del evento de salida del cliente (= tiempo de simulación actual + tiempo de servicio).
3. Si la instalación está ocupada, ponga al cliente en la cola, y actualice las estadísticas de la cola.

Evento de salida

1. Si la cola está vacía, declare ociosa la instalación. Actualice las estadísticas de utilización de la instalación.
2. Si la cola no está vacía
   a. Seleccione un cliente de la cola, póngalo en la instalación. Actualice las estadísticas de utilización de instalación y la cola.

b. Genere y guarde cronológicamente el tiempo de ocurrencia del evento de salida del cliente (= tiempo de simulación actual + tiempo de servicio).

Según los datos del problema, el tiempo entre llegadas es exponencial con media de 15 minutos, y el tiempo de servicio es uniforme entre 10 y 15 minutos. Si p y q representan muestras aleatorias de tiempos entre llegadas y de servicio, entonces, como se explica en la sección 19.3.2, obtenemos

$$p = -15\ \ln(R)\ \text{minutos},\ 0 \leq R \leq 1$$

$$q = 10 + 5R\ \text{minutos},\quad 0 \leq R \leq 1$$

Para el objetivo de este ejemplo, utilizamos R de la tabla 19.1, comenzando con la columna 1. También utilizamos el símbolo T para representar el tiempo del reloj de simulación. Suponemos además que el primer cliente llega en el instante $T = 0$ y que la instalación comienza vacía.

Debido a que los cálculos de simulación suelen ser voluminosos, la simulación se limita sólo a las primeras 5 llegadas. El ejemplo está diseñado para cubrir todas las situaciones posibles que pudieran surgir en el curso de la simulación. Más adelante, en la sección 19.5.2, presentamos la plantilla *excelSingleServer.xls* que permite experimentar con el modelo sin tener que realizar manualmente los cálculos.

Llegada del cliente 1 en el instante $T = 0$. Genere la llegada del cliente 2 en el instante

$$T = 0 + p_1 = 0 + [-15\ln(.0589)] = 42.48\ \text{minutos}$$

Debido a que la instalación está ociosa en el instante $T = 0$, el cliente inicia el servicio de inmediato. Por lo tanto, el tiempo de salida se calcula como

$$T = 0 + q_1 = 0 + (10 + 5 \times .6733) = 13.37\ \text{minutos}$$

La lista *cronológica* de eventos futuros es por lo tanto

Tiempo, T	Evento
13.37	Salida del cliente 1
42.48	Llegada del cliente 2

Salida del cliente 1 en el instante $T = 13.37$. Debido a que la cola está vacía, la instalación se declara ociosa. Al mismo tiempo, registramos que la instalación ha estado ocupada entre $T = 0$ y $T = 13.37$ minutos. La lista actualizada de eventos futuros es

Tiempo, T	Evento
42.48	Llegada del cliente 2

Llegada del cliente 2 en el instante $T = 42.48$. El cliente 3 llegará en el instante

$$T = 42.48 + [-15\ln(.4799)] = 53.49\ \text{minutos}$$

Debido a que la instalación esta ociosa, el cliente 2 inicia el servicio, y la instalación se declara ocupada. El tiempo de salida es

$$T = 42.48 + (10 + 5 \times .9486) = 57.22 \text{ minutos}$$

La lista de eventos futuros se actualiza como

Tiempo, T	Evento
53.49	Llegada del cliente 3
57.22	Salida del cliente 2

Llegada del cliente 3 en el instante *T* = 53.49. El cliente 4 llegará en el instante

$$T = 53.49 + [-15\ln(.6139)] = 60.81 \text{ minutos}$$

Debido a que actualmente la instalación está ocupada (hasta $T = 57.22$), el cliente 3 se coloca en la cola en el instante $T = 53.49$. La lista de eventos futuros actualizada es

Tiempo, T	Evento
57.22	Salida del cliente 2
60.81	Llegada del cliente 4

Salida del cliente 2 en el instante *T* = 57.22. El cliente 3 se retira de la cola para iniciar el servicio. El tiempo de espera es

$$W_3 = 57.22 - 53.49 = 3.73 \text{ minutos}$$

El tiempo de salida es

$$T = 57.22 + (10 + 5 \times .5933) = 70.19 \text{ minutos}$$

La lista actualizada de eventos futuros es

Tiempo, T	Evento
60.81	Llegada del cliente 4
70.19	Salida del cliente 3

Llegada del cliente 4 en el instante *T* = 60.81. El cliente 5 llegará en el instante

$$T = 60.81 + [-15\ln(.9341)] = 61.83 \text{ minutos}$$

Debido a que la instalación está ocupada hasta $T = 70.19$, el cliente 4 se coloca en la cola. La lista actualizada de eventos futuros es

Tiempo, T	Evento
61.83	Llegada del cliente 5
70.19	Salida del cliente 3

Llegada del cliente 5 en el instante $T = 61.83$. La simulación se limita a 5 llegadas, por consiguiente no se genera la llegada del cliente 6. La instalación sigue ocupada, porque el cliente se coloca en la cola en el instante $T = 61.83$. La lista de eventos actualizada es

Tiempo, T	Evento
70.19	Salida del cliente 3

Salida del cliente 3 en el instante $T = 70.19$. El cliente 4 se retira de la cola para iniciar el servicio. El tiempo de espera es

$$W_4 = 70.19 - 60.81 = 9.38 \text{ minutos}$$

El tiempo de salida es

$$T = 70.19 + [10 + 5 \times .1782] = 81.08 \text{ minutos}$$

La lista actualizada de eventos futuros es

Tiempo, T	Evento
81.08	Salida del cliente 4

Salida del cliente 4 en el instante $T = 81.08$. El cliente se retira de la cola para iniciar el servicio. El tiempo de espera es

$$W_5 = 81.08 - 61.83 = 19.25 \text{ minutos}$$

El tiempo de salida es

$$T = 81.08 + (10 + 5 \times .3473) = 92.82 \text{ minutos}$$

La lista de eventos actualizada es

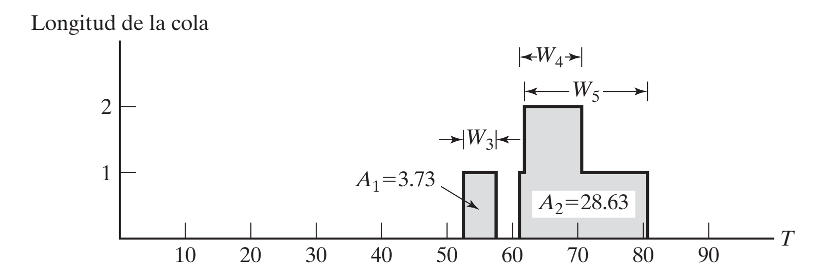
Tiempo, T	Evento
92.82	Salida del cliente 5

Salida del cliente 5 en el instante $T = 92.82$. No hay más clientes en el sistema (cola e instalación) y la simulación termina.

La figura 19.7 resume los cambios de longitud de la cola y la utilización de la instalación como una función del tiempo de simulación.

La longitud de la cola y la utilización de la instalación se conocen como variables **basadas en el tiempo** porque su variación es una función del tiempo. En consecuencia, sus valores promedio se calculan como

$$\left(\begin{array}{c}\text{Valor promedio de una}\\ \text{variable basada en el tiempo}\end{array}\right) = \frac{\text{Área bajo la curva}}{\text{Periodo simulado}}$$



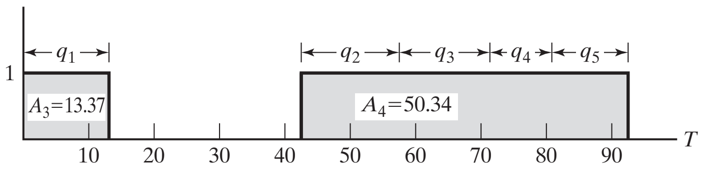


FIGURA 19.7

Cambios de la longitud de la cola y de la utilización de instalación como una función del tiempo de simulación, T

Implementando esta fórmula con los datos que aparecen en la figura 19.7, obtenemos

$$\begin{pmatrix}\text{Longitud promedio}\\ \text{de la cola}\end{pmatrix} = \frac{A_1 + A_2}{92.82} = \frac{32.36}{92.82} = .349 \text{ clientes}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Utilización promedio}\\ \text{de la instalación}\end{pmatrix} = \frac{A_3 + A_4}{92.82} = \frac{63.71}{92.82} = .686 \text{ peluqueros}$$

El tiempo de espera promedio en la cola es una variable **basada en observaciones** cuyo valor se calcula como

$$\begin{pmatrix}\text{Valor promedio de una variable}\\ \text{basada en observaciones}\end{pmatrix} = \frac{\text{Suma de las observaciones}}{\text{Cantidad de observaciones}}$$

El examen de la figura 19.7 revela que el área debajo de la curva de longitud de la cola en realidad es igual a la suma del tiempo de espera de los tres clientes que se unen a la cola, es decir,

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 0 + 0 + 3.73 + 9.38 + 19.25 = 32.36 \text{ minutos}$$

El tiempo de espera promedio en la cola de todos los clientes se calcula por consiguiente como

$$\overline{W}_q = \tfrac{32.36}{5} = 6.47 \text{ minutos}$$

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.5A

1. Suponga que la peluquería de la sección 19.5.1 es atendida por dos peluqueros en base al primero en llegar, primero en ser atendido (FCFS). Suponga además que el tiempo para obtener un corte de pelo está uniformemente distribuido entre 15 y 30 minutos. El tiempo

entre llegadas de los clientes es exponencial con una media de 10 minutos. Simule manualmente el sistema durante 75 unidades de tiempo. Con los resultados de la simulación, determine el tiempo promedio que un cliente espera en la cola, el promedio de clientes que esperan y la utilización promedio de los peluqueros. Use los números aleatorios de la tabla 19.1.

2. Clasifique las siguientes variables como *basadas en observaciones* o *basadas en el tiempo:*

*__(a)__ Tiempo para la falla de un componente electrónico.

*__(b)__ Nivel del inventario de un artículo.

(c) Cantidad de pedido de un artículo de inventario.

(d) Cantidad de artículos defectuosos en un lote.

(e) Tiempo necesario para calificar exámenes.

(f) Cantidad de autos en el lote de estacionamiento de una agencia de renta de autos.

*__3.__ La siguiente tabla representa la variación de la cantidad de clientes que esperan en una cola como una función del tiempo de simulación.

Tiempo de simulación, T (h)	Cantidad de clientes que esperan
$0 \leq T \leq 3$	0
$3 < T \leq 4$	1
$4 < T \leq 6$	2
$6 < T \leq 7$	1
$7 < T \leq 10$	0
$10 < T \leq 12$	2
$12 < T \leq 18$	3
$18 < T \leq 20$	2
$20 < T \leq 25$	1

Calcule las siguientes medidas de desempeño:

(a) La longitud promedio de la cola.

(b) El tiempo de espera promedio en cola de los que deben esperar.

4. Suponga que la peluquería descrita al inicio de la sección 19.5.1 es atendida por tres peluqueros. Suponga, además que la utilización de los servidores (peluqueros) se resume en la siguiente tabla:

Tiempo de simulación, T (h)	Cant. de servidores ocupados
$0 < T \leq 10$	0
$10 < T \leq 20$	1
$20 < T \leq 30$	2
$30 < T \leq 40$	0
$40 < T \leq 60$	1
$60 < T \leq 70$	2
$70 < T \leq 80$	3
$80 < T \leq 90$	1
$90 < T \leq 100$	0

Determine las siguientes medidas de desempeño:

(a) La utilización promedio de la instalación.

(b) Tiempo promedio que permanece ocupada la instalación.

(c) Tiempo ocioso promedio de instalación.

19.5.2 Simulación basada en una hoja de cálculo del modelo de un solo servidor

Esta sección desarrolla una hoja de cálculo basada en el modelo de un solo servidor. El objetivo del desarrollo es reforzar las ideas presentadas en la sección 19.5.1. Desde luego, un modelo de un solo servidor es una situación simple fácil de modelar en un entorno de hoja de cálculo. Otras situaciones requieren un esfuerzo de modelado más complicado, una tarea que se facilita con los paquetes de simulación disponibles (vea la sección 19.7).

La presentación en la sección 19.5.1 muestra que el modelo de simulación de la instalación de un solo servidor requiere dos elementos básicos:

1. Una lista cronológica de los eventos del modelo.
2. Una gráfica que rastree los cambios del uso de la instalación y la longitud de la cola.

Estos dos elementos permanecen esenciales en el desarrollo de un modelo de simulación basado en la hoja de cálculo (en realidad, basado en cualquier computadora). La diferencia es que la implementación se realiza de modo que sea compatible con el uso de la computadora. Como en la sección 19.5.1, a los clientes se les atiende en el orden de llegada (FIFO, primero en llegar, primero en salir).

La figura 19.8 proporciona los resultados obtenidos con *excelSingleServer.xls*. Los datos de entrada permiten representar el tiempo entre llegadas y de servicio en una de cuatro formas: constante, exponencial, uniforme y triangular. La distribución triangular es útil porque se puede utilizar como una estimación inicial aproximada de cualquier distribución, simplemente con tres estimaciones a, b y c que representan los valores

FIGURA 19.8

Resultados de un modelo de simulación de un solo servidor obtenido con Excel (archivo *excelSingle.xls*)

	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L	M	N	O	P	Q
1	Simulation of a Single-Server Queueing Model														
2	Nbr of arrivals =		20 <<Maximum 500												
3	Enter x in column A to select interarrival pdf:								Nbr	InterArrT	ServiceT	ArrvlT	DepartT	Wq	Ws
4		Constant =							1	3.73	12.83	0.00	12.83	0.00	12.83
5	x	Exponential:	λ =	0.067					2	6.37	14.71	3.73	27.66	9.10	23.83
6		Uniform:	a =		b =				3	3.86	12.21	9.09	39.75	18.45	30.66
7		Triangular:	a =		b =		c =		4	14.10	11.18	12.95	50.94	26.80	37.98
8	Enter x in column A to select service time pdf:								5	7.35	14.92	27.05	65.85	23.88	38.80
9		Constant =							6	35.70	14.22	34.41	80.07	31.45	45.67
10		Exponential:	μ =						7	0.60	14.60	70.11	94.68	9.97	24.47
11	x	Uniform:	a =	10	b =	15			8	4.25	13.35	70.71	107.93	23.87	37.22
12		Triangular:	a =		b =		c =		9	4.85	12.45	74.96	120.38	32.97	45.41
13	Output Summary								10	7.43	11.57	79.81	131.94	40.56	52.13
14	Av. facility utilization =			0.98	Press F9 to trigger a new simulation run				11	8.99	14.65	87.24	146.59	44.70	59.34
15	Percent idleness (%) =			1.95					12	49.78	12.85	96.23	159.43	50.36	63.20
16									13	0.42	14.12	146.01	173.55	13.43	27.54
17	Av. queue length, Lq =			1.57					14	8.77	13.69	146.43	187.24	27.13	40.82
18	Av. nbr in system, Ls =			2.55					15	11.19	10.50	155.20	197.75	32.05	42.55
19	Av. queue time, Wq =			21.24					16	42.82	13.78	166.38	211.53	31.36	45.14
20	Av. system time, Ws =			34.47					17	19.87	12.29	209.20	223.82	2.33	14.62
21	Sum(ServiceTime) =			264.65					18	9.25	12.95	229.07	242.03	0.00	12.95
22	Sum(Wq) =			424.80					19	13.98	12.99	238.33	256.02	3.70	16.69
23	Sum(Ws) =			689.44					20	58.46	14.88	252.31	269.90	2.71	17.59

mínimo, el más probable y el máximo del tiempo. La única otra información necesaria para controlar la simulación es la duración de la ejecución de la simulación, la cual en este modelo es especificada por el número de llegadas que se pueden generar en el modelo.

Los cálculos de la hoja de cálculo reservan una fila para cada llegada. Los tiempos entre llegadas y de servicio de cada llegada se generan con los datos de entrada. Se supone que la primera llegada ocurre en el instante $T = 0$. Debido a que la instalación comienza ociosa, el cliente inicia el servicio de inmediato. La hoja de cálculo proporciona suficiente información para demostrar los cálculos internos dados en la sección 19.5.1.

Se desarrolló otra hoja de cálculo para simular modelos de varios servidores (*excelMultiServer.xls*). El diseño de la plantilla se basa en las mismas ideas utilizadas en caso de un solo servidor. Sin embargo, la determinación del tiempo de salida no es tan simple y requiere el uso de macros VBA.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.5B

1. Con los datos de la sección 19.5.1, ejecute el simulador Excel para 10 llegadas y trace la gráfica de los cambios del uso de la instalación y la longitud de la cola como una función del tiempo de simulación. Compruebe que las áreas bajo las curvas son iguales a la suma de los tiempos de servicio y la suma de los tiempos de espera, respectivamente.
2. Simule el modelo $M/M/1$ para 500 llegadas, con la tasa de llegadas $\lambda = 4$ clientes por hora y la tasa de servicios $\mu = 6$ salidas por hora. Ejecute 5 aplicaciones (refrescando la hoja de cálculo, oprimiendo F9) y determine un intervalo de 95% de confianza con todas las medidas de desempeño del modelo. Compare los resultados con los valores teóricos de estado estable del modelo $M/M/1$.
3. Cada 15 minutos llegan televisores sobre una banda transportadora para ser inspeccionados por un solo operador. No están disponibles los datos detallados de la estación de inspección. Sin embargo, el operador estima emplear 10 minutos "en promedio" para inspeccionar una unidad. En las peores condiciones, el tiempo de inspección no excede de 13 minutos, y para ciertas unidades el tiempo de inspección puede ser tan bajo como 9 minutos.
   (a) Use el simulador de Excel para simular la inspección de 200 televisores.
   (b) Basado en 5 réplicas, estime la cantidad promedio de unidades en espera de ser inspeccionadas y el uso promedio de la estación de inspección.

19.6 MÉTODOS PARA REUNIR OBSERVACIONES ESTADÍSTICAS

La simulación es un experimento estadístico y sus resultados deben interpretarse por medio de herramientas de inferencia estadística apropiadas (por ejemplo, intervalos de confianza y pruebas de hipótesis). Para realizar esta tarea, un experimento de simulación debe satisfacer tres condiciones:

1. Las observaciones se extraen de distribuciones estacionarias (idénticas).
2. Las observaciones se muestrean a partir de una población normal.
3. Las observaciones son independientes.

En un sentido estricto, el experimento de simulación no satisface ninguna de estas condiciones. No obstante, podemos garantizar que estas condiciones permanecen estadísticamente aceptables al restringir la forma de reunir las observaciones.

En primer lugar consideremos el tema de las distribuciones estacionarias. Los resultados de una simulación son una función de la duración del periodo simulado. El periodo inicial produce un comportamiento errático conocido en general como **periodo transitorio** o de **calentamiento**. Cuando los resultados de la simulación se estabilizan, el sistema opera en **estado estable**. Desafortunadamente, no hay una forma definitiva de predecir de antemano el punto de inicio del estado estable. Por lo general, una ejecución más larga de la simulación tiene una mejor probabilidad de alcanzar el estado estable; es decir que el problema se aborda con un tamaño de muestra suficientemente grande.

Luego consideramos el requerimiento de que las observaciones para la simulación se extraen de una población normal. Este requisito se cumple utilizando el *teorema del límite central* (vea la sección 14.4.4) el cual confirma que la distribución del promedio de una muestra es asintóticamente normal, de manera independiente de la población padre. Por consiguiente, el teorema del límite central es la herramienta principal que utilizamos para satisfacer la suposición de distribución normal.

La tercera condición tiene que ver con la independencia de las observaciones. En una simulación, una observación se puede basar en una sola ejecución independiente o en la subdivisión de una sola ejecución en subintervalos donde cada uno representa una observación. Cada método presenta desventajas y ventajas. El primero alivia la cuestión de independencia pero tiene la desventaja de incluir el periodo transitorio en cada observación. En el segundo método, el efecto del periodo transitorio no es tan pronunciado, pero empeora de manera inherente el tema de la independencia. Como se explicará más adelante en esta sección, un posible remedio consiste en prolongar el tiempo de la ejecución de la simulación.

Los métodos más comunes para reunir observaciones en una simulación son

1. Método de subintervalos.
2. Método de réplica.
3. Método regenerativo (o de ciclos).

Los dos primeros son fáciles de automatizar en todos los lenguajes de simulación ampliamente utilizados (vea la sección 19.7). Por otra parte, el tercer método, aun cuando aborda directamente el tema de la independencia al buscar condiciones iniciales idénticas para las diferentes observaciones, puede ser difícil de implementar en la práctica.

Las secciones 19.6.1 y 19.6.2 presentan los primeros dos métodos. Los detalles del tercer método se hallan en Law (2007).

19.6.1 Método de subintervalos

La figura 19.9 ilustra la idea del método de subintervalos. Supongamos que la duración de la simulación es de T unidades de tiempo. El método de subintervalos primero trunca un periodo transitorio inicial y luego subdivide el resto de la ejecución de la simulación en n subintervalos (o lotes) iguales. El promedio de una medida de desempeño deseada (por ejemplo, longitud de la cola o tiempo de espera en la cola) dentro de cada subintervalo se utiliza entonces para representar una sola observación. El truncamiento del periodo transitorio inicial significa que durante ese periodo no se reúnen datos estadísticos.

La ventaja del método de subintervalos es que el efecto de las condiciones transitorias (no estacionarias) se mitiga, en particular para las observaciones que se reúnen al final de la ejecución de la simulación. La desventaja es que los lotes sucesivos con condiciones restrictivas comunes no son necesariamente independientes. El problema puede aliviarse incrementando el tiempo de cada observación.

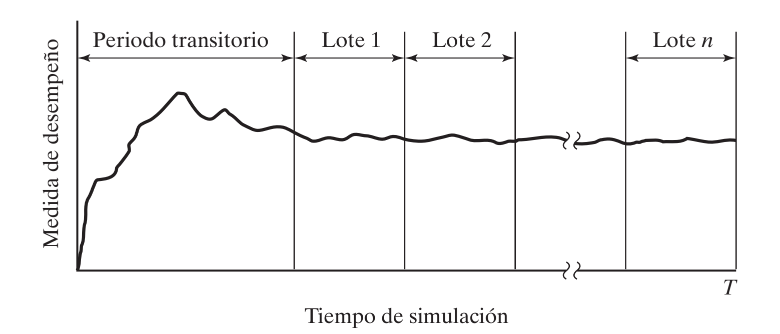


FIGURA 19.9

Recolección de datos de simulación utilizando el método de subintervalos

Ejemplo 19.6-1

La figura 19.10 muestra el cambio de longitud de la cola en un modelo de una sola cola como una función del tiempo de simulación. La longitud de la ejecución de la simulación es $T = 35$ horas, y la longitud del periodo transitorio es de 5 horas. La base de tiempo para una observación es de 5 horas, lo que produce $n = 5$ observaciones.

Sea $\overline{Q}_i$ la longitud promedio de la cola en el lote i. Debido a que la longitud de la cola es una variable basada en el tiempo, tenemos

$$\overline{Q}_i = \frac{A_i}{t}, i = 1, 2, \ldots, 5$$

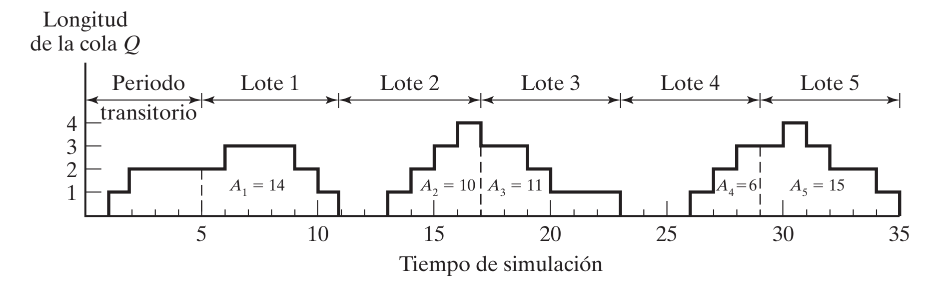
donde A_i es el área bajo la curva de la longitud de la cola asociada con el lote (observación) i, y $t(= 6)$ es la base de tiempo por lote.

Los datos que aparecen en la figura 19.10 producen las siguientes observaciones:

Observación i	1	2	3	4	5
A_i	14	10	11	6	15
$\overline{Q}_i$	2.33	1.67	1.83	1.00	2.50
Media muestral = 1.87	Desviación estándar muestral = .59				

FIGURA 19.10

Cambio de longitud de la cola con el tiempo de simulación en el ejemplo 19.6-1



La media y varianza muestrales pueden usarse para calcular un intervalo de confianza, si se desea. El cálculo de varianza muestral en el ejemplo 19.6-1 se basa en la siguiente fórmula conocida:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n - 1}}$$

Esta fórmula es sólo una aproximación de la desviación estándar verdadera porque ignora el efecto de la autocorrelación entre los lotes sucesivos. La fórmula exacta se encuentra en Law (2007).

19.6.2 Método de réplica

En este método cada observación está representada por una ejecución de simulación independiente en la cual el periodo transitorio se trunca, como se ilustra en la figura 19.11. El cálculo de los promedios de observación para cada lote es el mismo que en el método de subintervalos. La única diferencia es que la fórmula de la varianza estándar es aplicable porque los lotes no son independientes.

La ventaja del método de réplica es que a cada ejecución de simulación la controla una corriente de números aleatorios 0-1 distinta, la cual produce observaciones estadísticamente independientes. La desventaja es que cada observación puede ser influida por el efecto inicial de las condiciones transitorias. Dicho problema puede atenuarse si se prolonga lo suficiente la duración de la ejecución.

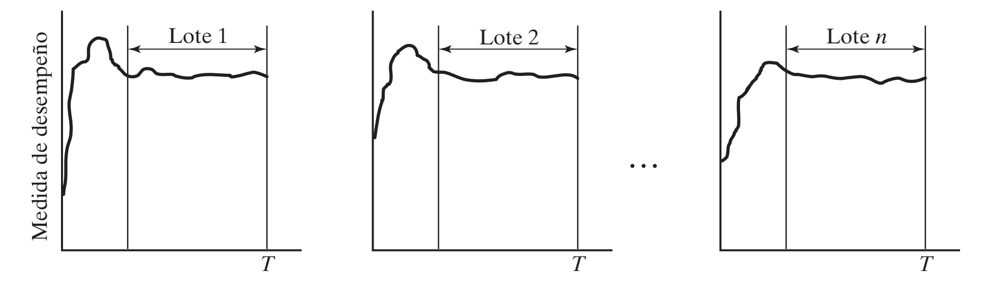
CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.6A

1. En el ejemplo 19.6-1, use el método de subintervalos para calcular el tiempo de espera promedio en la cola para los que deben esperar.

***2.** En un modelo de simulación se utiliza el método de subintervalos para calcular promedios de lotes. Se estima que el periodo transitorio es de 100, y cada lote también tiene una base de tiempo de 100 unidades de tiempo. Aplicando los siguientes datos, los cuales proporcionan los tiempos de espera de los clientes como una función del tiempo de simulación, estime el intervalo de 95% de confianza para el tiempo medio de espera.

FIGURA 19.11

Recolección de datos de simulación siguiendo el método de réplica



Intervalo de tiempo	Tiempos de espera
0–100	10, 20, 13, 14, 8, 15, 6, 8
100–200	12, 30, 10, 14, 16
200–300	15, 17, 20, 22
300–400	10, 20, 30, 15, 25, 31
400–500	15, 17, 20, 14, 13
500–600	25, 30, 15

19.7 LENGUAJES DE SIMULACIÓN

La ejecución de modelos de simulación implica dos tipos distintos de cálculos: (1) manejo de archivos que tienen que ver con el almacenamiento y procesamiento cronológicos de los eventos del modelo, y (2) cálculos aritméticos y de contabilidad asociados con la generación de muestras aleatorias y recolección de estadísticas del modelo. El primer tipo de cálculo implica una lógica extensa en el desarrollo del procesamiento de listas, y el segundo tipo implica cálculos tediosos que requieren mucho tiempo. La naturaleza de estos cálculos hace que la computadora sea una herramienta esencial para ejecutar modelos de simulación y, a su vez, promueve el desarrollo de lenguajes de simulación especiales para computadora para realizar estos cálculos de una forma conveniente y eficiente.

Los lenguajes de simulación discretos quedan comprendidos en dos amplias categorías:

1. Programación del evento
2. Orientado al proceso

En los lenguajes de programación del evento, el usuario detalla las acciones asociadas con la ocurrencia de cada evento, como en el ejemplo 19.5-1. El rol principal del lenguaje en este caso es (1) la automatización del muestreo a partir de las distribuciones, (2) el almacenamiento y recuperación de los eventos en orden cronológico, y (3) la recolección de estadísticas del modelo.

Los lenguajes orientados al proceso utilizan bloques o nodos que pueden vincularse entre sí para formar una red que describe los movimiento de **transacciones** o **entidades** (es decir, clientes) en el sistema. Por ejemplo, los tres bloques/nodos más prominentes en cualquier lenguaje de simulación orientado al proceso son una *fuente* de la cual se crean las transacciones, una *cola* donde pueden esperar si es necesario, y una *instalación*, en la que se realiza el servicio. Cada uno estos bloques/nodos se define con toda la información necesaria para controlar automáticamente la simulación. Por ejemplo, una vez que se especifica el tiempo entre llegadas, un programa orientado al proceso “sabe” de manera automática cuándo ocurrirán los eventos de llegada. De hecho, cada bloque/nodo del modelo cuenta con instrucciones permanentes que definen *cómo* y *cuándo* se mueven las transacciones en la red de simulación.

Los lenguajes orientados al proceso están controlados internamente por las mismas acciones que se utilizan en los lenguajes de programación de evento. La diferencia es que estas acciones se automatizan para liberar al usuario de los tediosos detalles de cálculo y lógicos. En cierto modo podemos considerar a los lenguajes orientados al proceso como basados en el concepto de entrada y salida del método de la “caja negra”. Esto en esencia significa que los lenguajes orientados al proceso intercambian la flexibilidad del modelo por la sencillez y facilidad de uso.

Los lenguajes de programación de evento (como SIMSCRIPT, SLAM y SIMAN) son anticuados y rara vez se utilizan en la práctica. Recientemente, un nuevo lenguaje llamado DEEDS (Elizandro y Taha, 2008) se basa en el uso de la hoja de cálculo de Excel para controlar la programación del evento. DEEDS permite la flexibilidad de modelado de los lenguajes de simulación orientados al evento al mismo tiempo que logra la naturaleza intuitiva de un lenguaje orientado al proceso.

El paquete comercial predominante orientado al proceso es Arena. Utiliza una extensa interfaz de usuario para simplificar el proceso de crear un modelo de simulación. También cuenta con capacidades de animación donde pueden observarse visualmente los cambios del sistema. Sin embargo, para un profesional experimentado en la simulación, estas interfaces parecen reducir el desarrollo de un modelo de simulación a un paso de "cámara lenta". No sorprende que algunos usuarios prefieran seguir escribiendo modelos de simulación en lenguajes de programación de alto nivel.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 19.7A[2]

1. Los clientes llegan al azar a una oficina de correos atendida por tres empleados con media de 5 minutos. El tiempo que un empleado pasa con un cliente es exponencial con media de 10 minutos. Todos los clientes que llegan hacen cola y esperan al primer empleado libre disponible. Ejecute un modelo de simulación del sistema durante 480 minutos para determinar lo siguiente:

(a) El promedio de clientes que esperan en la cola.

(b) El uso promedio de los empleados.

(c) Compare los resultados de la simulación con los del modelo de colas $M/M/c$ (capítulo 18) y con la hoja de cálculo *MultiServerSimulator.xls.*

2. En una banda transportadora llegan televisores para ser inspeccionados a una velocidad constante de 5 unidades por hora. El tiempo de inspección requiere entre 10 y 15 minutos distribuidos uniformemente. La experiencia pasada muestra que 20% de las unidades deben ser ajustadas y enviadas de nuevo para reinspección. El tiempo de ajuste también está distribuido uniformemente entre 6 y 8 minutos. Ejecute un modelo de simulación durante 480 minutos para calcular lo siguiente:

(a) El tiempo promedio que una unidad requiere hasta que pasa la inspección.

(b) El promedio de veces que una unidad debe ser reinspeccionada antes de que salga del sistema.

3. Un ratón se encuentra atrapado en un laberinto y "desea salir" desesperadamente. Después de tratar entre 1 y 3 minutos, distribuidos de manera uniforme, hay 30% de probabilidades de que encuentre la ruta correcta. De lo contario, vagará sin rumbo entre 2 y 3 minutos, distribuidos de manera uniforme, y a la larga terminará donde comenzó, sólo para intentarlo una vez más. El ratón puede "tratar de liberarse" las veces que le plazca, pero hay un límite para todo. Con tanta energía consumida al intentarlo una y otra vez, es seguro que el ratón muera si no logra liberarse dentro de un periodo normalmente distribuido, con una media de 10 minutos y una desviación estándar de 2 minutos. Escriba un modelo de simulación para estimar la probabilidad de que el ratón se libere. Para estimar la probabilidad, suponga que el modelo procesará 100 ratones.

4. En la etapa final de fabricación, un auto que se desplaza sobre un transportador se sitúa entre dos estaciones de trabajo paralelas para que se le realicen trabajos en los lados iz-

[2]Resuelva estos problemas con un lenguaje de simulación de su predilección, o un lenguaje de programación de alto grado.

quierdo y derecho al mismo tiempo. Los tiempos de operación en los lados izquierdo y derecho son uniformes entre 15 y 20 minutos, y entre 18 y 22 minutos, respectivamente. El transportador llega al área de las estaciones cada 20 minutos. Simule el proceso durante 480 minutos para determinar la utilización de las estaciones izquierda y derecha.

5. A una instalación de lavado de autos de una bahía donde el tiempo entre llegadas es exponencial, los autos llegan con una media de 10 minutos. Los autos que llegan se forman en un solo carril que tiene espacio a lo sumo para cinco autos. Si el carril está lleno, los autos que llegan se van a otra parte. Se requieren entre 10 y 15 minutos distribuidos uniformemente para lavar un auto. Simule el sistema durante 960 minutos, y estime el tiempo que el auto pasa en la instalación.

BIBLIOGRAFÍA

Banks, J., J. Carson, B. Nelson, y D. Nicol, *Discrete-Event System Simulation,* 4a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2005.

Box, G., y M. Muller, "A Note on the Generation of Random Normal Deviates", *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 29, págs. 610-611, 1958.

Elizandro, D., y H. Taha, *Simulation of Industrial Systems: Discrete Event Simulation Using Excel/VBA,* Taylor and Francis, Nueva York, 2008.

Law, A., *Simulation Modeling & Analysis*, 4a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 2007.

Rubenstein, R., B. Melamed, y A. Shapiro, *Modern Simulation and Modeling*, Wiley, Nueva York,1998.

Taha, *H.*, *Simulation Modeling and SIMNET,* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1988.

CAPÍTULO 20

Teoría de optimización clásica

20.1 PROBLEMAS NO RESTRINGIDOS

Un punto extremo de una función $f(\mathbf{X})$ define o un máximo o un mínimo de la función. Matemáticamente, un punto $\mathbf{X}_0 = (x_1^0, \ldots, x_j^0, \ldots, x_n^0)$ es un máximo si

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \leq f(\mathbf{X}_0)$$

para todas las $\mathbf{h} = (h_1,\ldots, h_j,\ldots, h_n)$ donde $|h_j|$ es suficientemente pequeña para todas las j. Asimismo, $\mathbf{X}_0$ es un mínimo si

$$f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \geq f(\mathbf{X}_0)$$

La figura 20.1 ilustra los máximos y mínimos de una función de una sola variable $f(x)$ definida en el intervalo $a \leq x \leq b$. Los puntos x_1, x_2, x_3, x_4 y x_6 son los extremos de $f(x)$, con x_1, x_3 y x_6 como máximos, y x_2 y x_4 como mínimos. El valor $f(x_6) = \text{máx}[f(x_1), f(x_3), f(x_6)]$es un máximo **global** o **absoluto**, y $f(x_1)$ y $f(x_3)$ son máximos **locales** o **relativos**. Asimismo, $f(x_4)$ es un mínimo local y $f(x_2)$ es un mínimo global.

Aunque x_1 (en la figura 20.1) es un punto máximo (local), difiere de los máximos locales restantes en que el valor de f correspondiente al menos un punto en la vecindad de x_1 es igual a $f(x_1)$. A este respecto, x_1 es un **máximo débil**, en tanto que x_3 y x_6 son **máximo fuertes**. En general, para $\mathbf{h}$ como se definió antes, $\mathbf{X}_0$ es un máximo débil si $f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) \leq f(\mathbf{X}_0)$ y un máximo fuerte si $f(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) < f(\mathbf{X}_0)$.

En la figura 20.1, la primera derivada (pendiente) de f es igual a cero en todos los extremos. Esta propiedad también se satisface en puntos de **inflexión** o **silla**, como es el caso de x_5. Si un punto con pendiente (gradiente) cero no es un extremo (máximo o mínimo), entonces debe ser un punto de inflexión o silla.

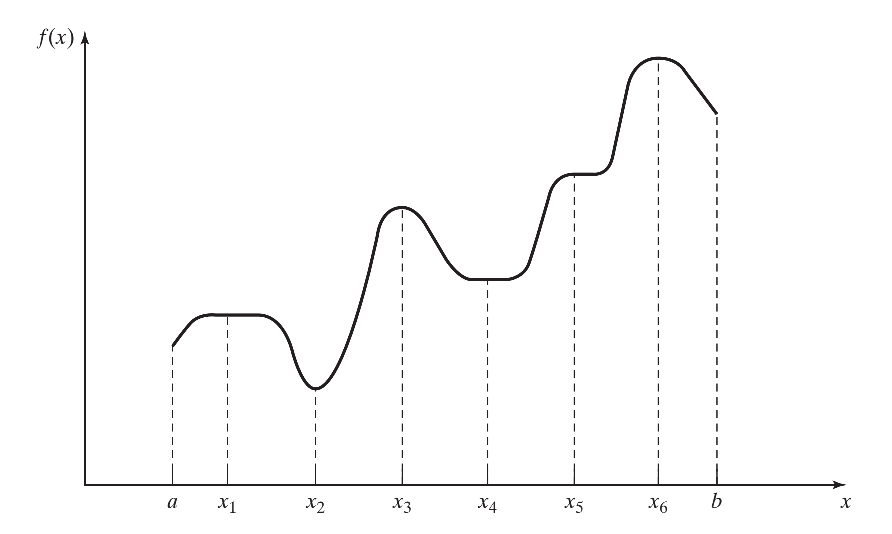


FIGURA 20.1
Ejemplos de puntos extremos de una función de una sola variable

20.1.1 Condiciones necesarias y suficientes

Esta sección desarrolla las condiciones necesarias y suficientes para que una función $f(\mathbf{X})$ de n variables tenga extremos. Se supone que la primera y segunda derivadas parciales de $f(\mathbf{X})$ son continuas para todas las $\mathbf{X}$.

Teorema 20.1-1 *Una condición necesaria para que* $\mathbf{X}_0$ *sea un punto extremo de* $f(\mathbf{X})$ *es que*

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = 0$$

Debido a que la condición necesaria también se satisface en puntos de inflexión o silla, es más apropiado referirse a estos puntos obtenidos con la solución de $\nabla f(\mathbf{X}_0) = 0$ como puntos **estacionarios**. El teorema siguiente establece las condiciones de suficiencia para que $\mathbf{X}_0$ sea un punto extremo.

Teorema 20.1-2 *Una condición suficiente para que un punto estacionario* $\mathbf{X}_0$ *sea un extremo es que la matriz Hessiana* $\mathbf{H}$ *evaluada en* $\mathbf{X}_0$ *satisfaga las siguientes condiciones:*

(i) $\mathbf{H}$ *se define positiva si* $\mathbf{X}_0$ *es un punto mínimo.*
(ii) $\mathbf{H}$ *se define negativa si* $\mathbf{X}_0$ *es un punto máximo.*

Ejemplo 20.1-1

Considere la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

La condición necesaria $\nabla f(\mathbf{X}_0) = 0$ da

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 = 0$$

La solución de estas ecuaciones simultáneas es

$$\mathbf{X}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Para determinar el tipo de punto estacionario, considere

$$\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}_{\mathbf{X}_0} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Los determinantes menores principales de $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ tienen los valores $-2, 4$ y -6, respectivamente. Por lo tanto, como se muestra en la sección D.3, $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ se define negativa y $\mathbf{X}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ representa un punto máximo.

Por lo común, si $\mathbf{H}|_{\mathbf{X}_0}$ es indefinida, $\mathbf{X}_0$ debe ser un punto silla. En casos no concluyentes, $\mathbf{X}_0$ puede o no ser un extremo, y la condición de suficiencia se hace algo complicada, porque en la expansión de Taylor se deben considerar términos de mayor orden.

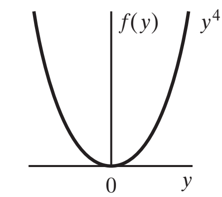
La condición de suficiencia establecida por el teorema 20.1-2 aplica funciones de una sola variable como sigue. Dado que y_0 es un punto estacionario, entonces

(i) y_0 es un máximo si $f''(y_0) < 0$.
(ii) y_0 es un mínimo si $f''(y_0) > 0$.

Si $f''(y_0) = 0$, deben investigarse las derivadas de mayor orden como lo requiere el siguiente teorema.

Teorema 20.1-3 *Dado y_0, un punto estacionario de $f(y)$, si las primeras $(n - 1)$ derivadas son cero y $f^n(y_0) \neq 0$, entonces*

(i) *Si n es impar, y_0 es un punto de inflexión.*
(ii) *Si n es par, entonces y_0 es un mínimo si $f^n(y_0) > 0$ y un máximo si $f^n(y_0) < 0$.*



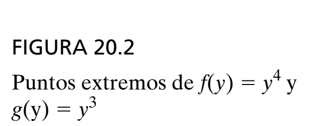
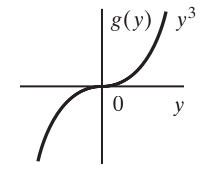


FIGURA 20.2
Puntos extremos de $f(y) = y^4$ y $g(y) = y^3$



Ejemplo 20.1-2

La figura 20.2 muestra las gráficas de las siguientes funciones

$$f(y) = y^4$$

$$g(y) = y^3$$

Con $f(y) = y^4, f'(y) = 4y^3 = 0$, la cual da el punto estacionario $y_0 = 0$. Ahora

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 24 > 0$$

Por consiguiente, $y_0 = 0$ es un punto mínimo (vea la figura 20.2).

Para $g(y) = y^3, g'(y) = 3y^2 = 0$, la cual da $y_0 = 0$, como un punto estacionario. Además

$$g'(0) = g''(0), g^{(3)}(0) = 6 \neq 0$$

Por consiguiente, $y_0 = 0$ es un punto de inflexión.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.1A

1. Determine los puntos extremos de las siguientes funciones:

*(a) $f(x) = x^3 + x$
*(b) $f(x) = x^4 + x^2$
(c) $f(x) = 4x^4 - x^2 + 5$
(d) $f(x) = (3x - 2)^2(2x - 3)^2$
(e) $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 10$

2. Determine los puntos extremos de las siguientes funciones.

(a) $f(\mathbf{X}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$
(b) $f(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6(x_1 + x_2 + x_3) + 2x_1x_2x_3$

3. Verifique que la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2x_3 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 4x_2 + 4x_3$$

tiene los puntos estacionarios (0,3,1), (0,1,−1), (1,2,0), (2,1,1) y (2,3,−1). Utilice la condición de suficiencia para identificar los puntos extremos.

***4.** Resuelva las siguientes ecuaciones simultáneas convirtiendo el sistema en una función objetivo no lineal sin restricciones.

$$x_2 - x_1^2 = 0$$

$$x_2 - x_1 = 2$$

[*Sugerencia: mín* $f^2(x_1, x_2)$ ocurre en $f'(x_1, x_2) = 0$]

20.1.2 Método de Newton-Raphson

Por lo general, la condición necesaria $\nabla f(x) \neq 0$ puede ser extremadamente no lineal y, en consecuencia, difícil de resolver. El método de Newton-Raphson es un algoritmo iterativo para resolver ecuaciones no lineales.

Considere las ecuaciones simultáneas

$$f_i(\mathbf{X}) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

Sea $\mathbf{X}^k$ un punto dado. Luego, mediante la expansión de Taylor,

$$f_i(\mathbf{X}) \approx f_i(\mathbf{X}_k) + \nabla f_i(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k),\ i = 1, 2, \ldots, m$$

Por lo tanto, las ecuaciones originales $f_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2,\ldots, m$ pueden representarse de forma aproximada como

$$f_i(\mathbf{X}_k) + \nabla f_i(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en notación matricial como

$$\mathbf{A}_k + \mathbf{B}_k(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = \mathbf{0}$$

Si $\mathbf{B}_k$ es no singular, entonces

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_k - \mathbf{B}_k^{-1}\mathbf{A}_k$$

La idea del método es iniciar desde un punto inicial $\mathbf{X}_0$ y luego utilizar la ecuación anterior para determinar un nuevo punto. El proceso puede o no converger dependiendo de la selección del punto de inicio. La convergencia ocurre cuando dos puntos sucesivos $\mathbf{X}_k$ y $\mathbf{X}_{k+1}$, son aproximadamente iguales (dentro de una tolerancia especificada aceptable).

En la figura 20.3 una interpretación geométrica del método se ilustra mediante una función de una sola variable. La relación entre x_k y x_{k+1} para una función $f(x)$ de una sola variable se reduce a

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Los términos se pueden acomodar como $f'(x_k) = \dfrac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$ lo que significa que x_{k+1} se determina a partir de la pendiente de $f(x)$ en x_k, donde $\tan \theta = f'(x_k)$ como lo muestra la figura.

La figura 20.3 demuestra que la convergencia no siempre es posible. Si el punto inicial es a, el método divergirá. Por lo común, podría requerirse intentar varios puntos de inicio antes de que se logre la convergencia.

Ejemplo 20.1-3

Para demostrar el uso del método de Newton-Raphson, considere la función

$$g(x) = (3x - 2)^2 (2x - 3)^2$$

Para determinar los puntos estacionarios de $g(x)$, tenemos que resolver

$$f(x) \equiv g'(x) = 72x^3 - 234x^2 + 241x - 78 = 0$$

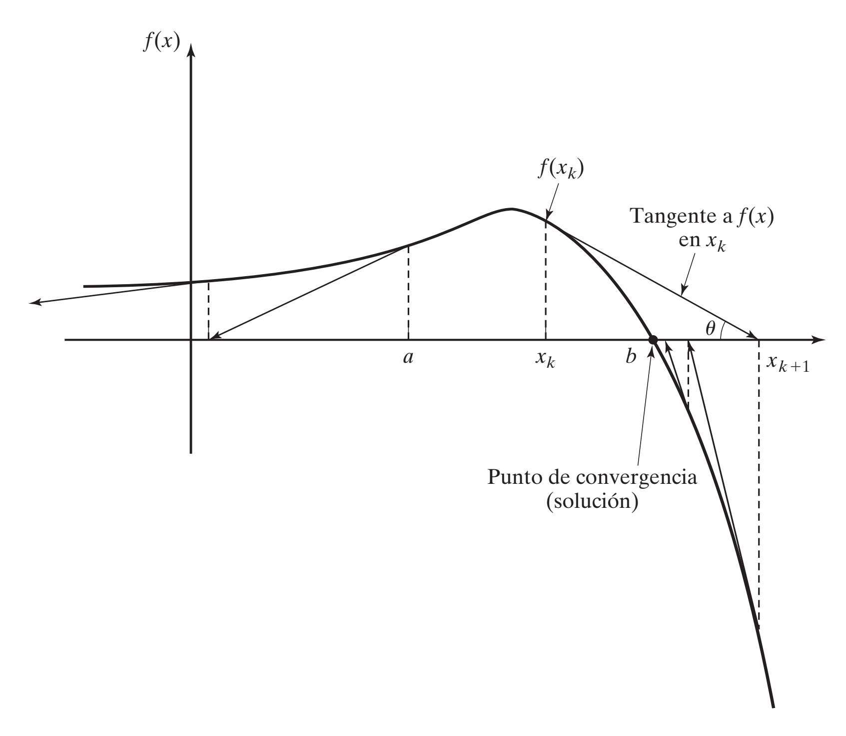


FIGURA 20.3
Ilustración del proceso iterativo en el método de Newton-Raphson

Por lo tanto, para el método de Newton-Raphson, tenemos

$$f'(x) = 216x^2 - 468x + 241$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{72x^3 - 234x^2 + 241x - 78}{216x^2 - 468x + 24}$$

Iniciando con $x_0 = 10$, la siguiente tabla proporciona las iteraciones sucesivas:

k	x_k	$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	x_{k+1}
0	10.000000	2.978923	7.032108
1	7.032108	1.976429	5.055679
2	5.055679	1.314367	3.741312
3	3.741312	0.871358	2.869995
4	2.869995	0.573547	2.296405
5	2.296405	0.371252	1.925154
6	1.925154	0.230702	1.694452
7	1.694452	0.128999	1.565453
8	1.565453	0.054156	1.511296
9	1.511296	.0108641	1.500432
10	1.500432	.00043131	1.500001

El método converge a $x = 1.5$. En realidad, $f(x)$ tiene tres puntos estacionarios en $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{13}{12}$ y $x = \frac{3}{2}$. Los dos puntos restantes se determinan intentando diferentes valores para x_0 inicial. De hecho, $x_0 = .5$ y $x_0 = 1$, deberían dar por resultado los puntos estacionarios (¡compruébelo!).

Momento de Excel

Se puede utilizar la plantilla *excelNewtonRaphson.xls* para resolver cualquier ecuación de una sola variable. Requiere que se ingrese $\frac{f(x)}{f'(x)}$ en la celda C3. Para el ejemplo 20.1-3, ingresamos

```
=(72*A3^3−234*A3^2+241*A3−78)/(216*A3^2−468*A3+241)
```

La variable x se reemplaza con A3. La plantilla permite establecer un límite de tolerancia Δ, el cual especifica la diferencia permisible entre x_k y x_{k+1} que señala la terminación de las iteraciones. Se le pide que utilice puntos iniciales diferentes, x_0, para que tenga una idea de cómo funciona el método.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.1B

1. Use la plantilla *NewtonRaphson.xls* para resolver el problema 1(c), conjunto 20.1a.
2. Resuelva el problema 2(b), conjunto 20.1a, por medio del método de Newton-Raphson.

20.2 PROBLEMAS RESTRINGIDOS

Esta sección se ocupa de la optimización de funciones continuas restringidas. La sección 20.2.1 presenta el caso de restricciones de igualdad, y la sección 20.2.2 se ocupa de las restricciones de desigualdad. La presentación en la sección 20.2.1 se cubre en su mayor parte en Beightler and Associates (1979, págs. 45-55).

20.2.1 Restricciones de igualdad

Esta sección presenta dos métodos: el **Jacobiano** y el **Lagrangiano**. El método Lagrangiano se puede desarrollar lógicamente a partir del Jacobiano. Esta relación proporciona una interpretación interesante económica del método Lagrangiano.

Método de derivadas restringidas (Jacobiano) Considere el problema

$$\text{Minimizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

donde

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)^T$$

Las funciones $f(\mathbf{X})$ y $g(\mathbf{X})$, $i = 1, 2,\ldots, m$, son dos veces continuamente diferenciables.

La idea de utilizar derivadas restringidas es desarrollar una expresión de forma cerrada para las primeras derivadas parciales de $f(\mathbf{X})$ en todos los puntos que satisfacen $\mathbf{g(X)} = \mathbf{0}$. Los puntos estacionarios correspondientes se identifican como los puntos donde estas derivadas parciales se desvanecen. De este modo, las condiciones de suficiencia presentadas en la sección 20.1 pueden utilizarse para verificar la identidad de los puntos estacionarios.

Para aclarar el concepto propuesto, considere $f(x_1, x_2)$ ilustrada en la figura 20.4. Esta función se tiene que minimizar sujeta a la restricción

$$g_1(x_1, x_2) = x_2 - b = 0$$

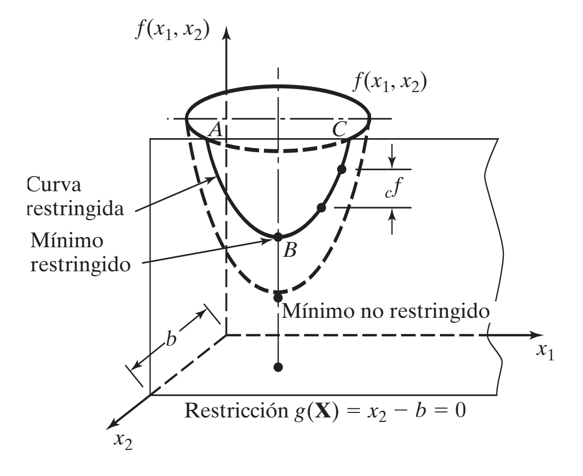
donde b es una constante. En la figura 20.4, la curva designada por los tres puntos A, B y C representa los valores de $f(x_1,x_2)$ que satisfacen la restricción dada. El método de derivadas restringidas define el gradiente de $f(x_1,x_2)$ en cualquier punto de la curva ABC. El punto B donde la derivada restringida se desvanece es un punto estacionario para el problema restringido.

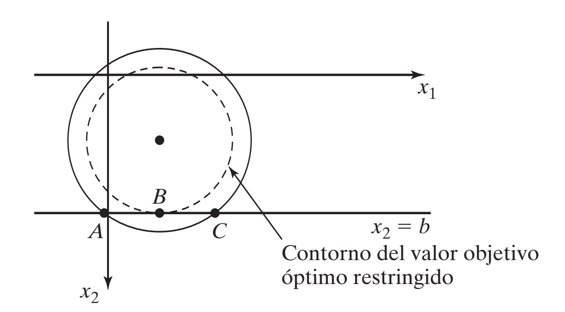
Ahora se desarrolla el método matemáticamente. De acuerdo con el teorema de Taylor, para $\mathbf{X} + \mathbf{\Delta X}$ en la vecindad factible de $\mathbf{X}$, tenemos

$$f(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X})\Delta\mathbf{X} + O(\Delta x_j^2)$$

FIGURA 20.4

Demostración de la idea del método Jacobiano





y

$$\mathbf{g}(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}) - \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \nabla\mathbf{g}(\mathbf{X})\Delta\mathbf{X} + O(\Delta x_j^2)$$

A medida que $\Delta x_j \rightarrow 0$, las ecuaciones se reducen a

$$\partial f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X})\, \partial\mathbf{X}$$

y

$$\partial\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \nabla\mathbf{g}(\mathbf{X})\, \partial\mathbf{X}$$

Para factibilidad, debemos tener $\mathbf{g(X)} = \mathbf{0}$, $\partial\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$. Por consiguiente

$$\partial f(\mathbf{X}) - \nabla f(\mathbf{X})\, \partial\mathbf{X} = 0$$
$$\nabla\mathbf{g}(\mathbf{X})\, \partial\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Así se obtienen $(m + 1)$ ecuaciones en $(n + 1)$ incógnitas, $\partial f(\mathbf{X})$ y $\partial\mathbf{X}$. Observe que si $\partial f(\mathbf{X})$ es un variable dependiente cuyo valor se determina una vez que se conoce $\partial\mathbf{X}$. Esto significa que, de hecho, tenemos m ecuaciones en n incógnitas.

Si $m > n$, al menos $(m - n)$ ecuaciones son redundantes. Si se elimina la redundancia, el sistema se reduce a $m \leq n$. Si $m = n$ la solución es $\partial\mathbf{X} = \mathbf{0}$, y $\mathbf{X}$ no tiene ninguna vecindad factible, lo que significa que el espacio de soluciones se compone de sólo un punto. El caso restante $(m < n)$ es más elaborado.

Definamos

$$\mathbf{X} = (\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$$

de modo que

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m), \mathbf{Z} = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-m})$$

Los vectores $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$ representan las variables *dependientes* e *independientes*, respectivamente. Rescribiendo los vectores gradiente de f y g en función de $\mathbf{Y}$ y $\mathbf{Z}$, obtenemos

$$\nabla f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Y}} f, \nabla_{\mathbf{Z}} f)$$
$$\nabla g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{g}, \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{g})$$

Definamos

$$\mathbf{J} = \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{Y}} g_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{Y}} g_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{Z}} g_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\mathbf{Z}} g_m \end{pmatrix}$$

$\mathbf{J}_{m \times m}$ se conoce como la **matriz Jacobiana** y $\mathbf{C}_{m \times m}$ como la **matriz de control**. Se supone que la Jacobiana $\mathbf{J}$ es no singular. Esto siempre es posible debido a que las m ecuaciones dadas son independientes por definición. Los componentes del vector $\mathbf{Y}$ deben seleccionarse por lo tanto, de modo que $\mathbf{J}$ sea no singular.

El conjunto original de ecuaciones en $\partial f(\mathbf{X})$ y $\partial \mathbf{X}$ se puede escribir como

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{Y}} f \partial \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{Z}} f \partial \mathbf{Z}$$

y

$$\mathbf{J} \partial \mathbf{Y} = -\mathbf{C} \partial \mathbf{Z}$$

Dado que $\mathbf{J}$ es no singular, se deduce que

$$\partial \mathbf{Y} = -\mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} \partial \mathbf{Z}$$

Sustituyendo $\partial \mathbf{Y}$ en la ecuación para $\partial f(\mathbf{X})$ se obtiene ∂f como una función de $\partial \mathbf{Z}$, es decir,

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = (\nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}) \partial \mathbf{Z}$$

Según esta ecuación, la derivada restringida con respecto al vector independiente $\mathbf{Z}$ es

$$\nabla_c f = \frac{\partial_c f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})}{\partial_c \mathbf{Z}} = \nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C}$$

donde $\nabla_c f$ es el vector **gradiente restringido** de f con respecto a $\mathbf{Z}$. Por lo tanto $\nabla_c f(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ debe ser nulo en los puntos estacionarios.

Las condiciones de suficiencia son similares a las desarrolladas en la sección 20.1. La matriz Hessiana (restringida) corresponde al vector independiente $\mathbf{Z}$, y los elementos de la matriz Hessiana deben ser las segundas derivadas *restringidas*.

Ejemplo 20.2-1

Considere el siguiente problema:

$$f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1 x_3^2$$
$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 x_3 + 2x_2 + x_2^2 - 11 = 0$$
$$g_2(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_3^2 - 14 = 0$$

Dado el punto factible $\mathbf{X}^0 = (1, 2, 3)$, deseamos estudiar la variación de $f(= \partial_c f)$ en la vecindad factible de $\mathbf{X}^0$.

Sean

$$\mathbf{Y} = (x_1, x_3) \quad \text{y} \quad \mathbf{Z} = x_2$$

Por lo tanto,

$$\nabla_{\mathbf{Y}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right) = (2x_1 + 5x_3^2, 10x_1 x_3)$$

$$\nabla_{\mathbf{Z}} f = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_2$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 \\ 2x_1 + 2x_2 & 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 + 2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Supongamos que tenemos que estimar $\partial_c f$ en la vecindad factible del punto factible $\mathbf{X}_0 = (1, 2, 3)$, dado un pequeño cambio $\partial x_2 = .01$ de la variable independiente x_2. Tenemos

$$\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{6}{12} & \frac{3}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.83 \\ -2.50 \end{pmatrix}$$

De ahí que el valor incremental de f restringida se da como

$$\partial_c f = (\nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f \mathbf{J}^{-1}\mathbf{C})\partial\mathbf{Z} = \left(6(2) - (47, 30)\begin{pmatrix} 2.83 \\ -2.50 \end{pmatrix}\right)\partial x_2 = -46.01\partial x_2$$

Especificando el valor de ∂x_2 para la variable *independiente* x_2, los valores factibles de ∂x_1 y ∂x_2 se determinan para las variables dependientes x_1 y x_3 aplicando la fórmula

$$\partial\mathbf{Y} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}\partial\mathbf{Z}$$

Por lo tanto, para $\partial x_2 = .01$,

$$\begin{pmatrix} \partial x_1 \\ \partial x_3 \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}\partial x_2 = \begin{pmatrix} -.0283 \\ .0250 \end{pmatrix}$$

Ahora comparamos el valor de $\partial_c f$ antes calculado con la diferencia $f(\mathbf{X}_0 + \partial\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_0)$, dada $\partial x_2 = .01$.

$$\mathbf{X}_0 + \partial\mathbf{X} = (1 - .0283, 2 + .01, 3 + .025) = (.9717, 2.01, 3.025)$$

Se obtiene

$$f(\mathbf{X}_0) = 58, f(\mathbf{X}_0 + \partial\mathbf{X}) = 57.523$$

o

$$f(\mathbf{X}_0 + \partial\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_0) = -.477$$

La cantidad $-.477$ se compara favorablemente con $\partial_c f = -46.01\partial x_2 = -.4601$. La diferencia entre los dos valores es el resultado de la aproximación lineal al calcular $\partial_c f$ en $\mathbf{X}_0$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2A

1. Considere el ejemplo 20.2-1.

(a) Calcule $\partial_c f$ por medio de los dos métodos presentados, utilizando $\partial x_2 = .001$ en lugar de $\partial x_2 = .01$. ¿Se hace el efecto de la aproximación lineal más insignificante con la reducción del valor de ∂x_2?

*__(b)__ Especifique una relación entre los elementos de $\partial \mathbf{X} = (\partial x_1, \partial x_2\ \partial x_3)$ en el punto factible $\mathbf{X}_0 = (1,2,3)$ que mantendrá factible al punto $\mathbf{X}_0 + \partial \mathbf{X}$.

(c) Si $\mathbf{Y} = (x_2, x_3)$ y $\mathbf{Z} = x_1$, ¿cuál es el valor de ∂x_1 que producirá el mismo valor de $\partial_c f$ dado en el ejemplo?

Ejemplo 20.2-2

Este ejemplo ilustra el uso de derivadas restringidas. Considere el problema

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 + 3x_3 - 2 = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 = 0$$

Determinamos los puntos extremos restringidos como sigue. Sean

$$\mathbf{Y} = (x_1, x_2) \text{ y } \mathbf{Z} = x_3$$

Por lo tanto,

$$\nabla_{\mathbf{Y}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (2x_1, 2x_2),\ \nabla_{\mathbf{Z}} f = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\nabla_c f = \frac{\partial_c f}{\partial_c x_3} = 2x_3 - (2x_1, 2x_2)\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{10}{3}x_1 - \tfrac{28}{3}x_2 + 2x_3$$

Las ecuaciones para determinar los puntos estacionarios se dan por lo tanto como

$$\nabla_c f = 0$$

$$g_1(\mathbf{X}) = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = 0$$

o

$$\begin{pmatrix} 10 & -28 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

La solución es

$$\mathbf{X}_0 \approx (.81, .35, .28)$$

La identidad de este punto estacionario se verifica mediante la condición de suficiencia. Dado que x_3 es la variable independiente, de $\nabla_c f$ se desprende que

$$\frac{\partial_c^2 f}{\partial_c x_3^2} = \frac{10}{3}\left(\frac{dx_1}{dx_3}\right) - \frac{28}{3}\left(\frac{dx_2}{dx_3}\right) + 2 = \left(\frac{10}{3}, -\frac{28}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dx_3} \\ \frac{dx_2}{dx_3} \end{pmatrix} + 2$$

Por el método Jacobiano,

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dx_3} \\ \frac{dx_2}{dx_3} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$$

La sustitución da $\frac{\partial_c^2 f}{\partial_c x_3^2} = \frac{460}{9} > 0$. De ahí que, $\mathbf{X}_0$ sea el punto mínimo.

Análisis de sensibilidad en el método Jacobiano. El método Jacobiano se puede utilizar para estudiar el efecto de pequeños cambios en el lado derecho de las restricciones en el valor óptimo de f. Específicamente, ¿cuál es el efecto de cambiar $g_i(\mathbf{X}) = 0$ a $g_i(\mathbf{X}) = \partial g_i$ en el valor de f? Este tipo de investigación se llama **análisis de sensibilidad** y es similar al realizado en la programación lineal (vea los capítulos 3 y 4). Sin embargo, el análisis de sensibilidad en programación no lineal es válido sólo en la pequeña proximidad del punto extremo. El desarrollo será útil al estudiar el método Lagrangiano.

Anteriormente demostramos que

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{Y}} f \partial \mathbf{Y} + \nabla_{\mathbf{Z}} f \partial \mathbf{Z}$$

$$\partial \mathbf{g} = \mathbf{J}\partial \mathbf{Y} + \mathbf{C}\partial \mathbf{Z}$$

Dada $\partial \mathbf{g} \neq \mathbf{0}$, entonces

$$\partial \mathbf{Y} = \mathbf{J}^{-1}\partial \mathbf{g} - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}\partial \mathbf{Z}$$

Sustituyendo en la ecuación para $\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ se obtiene

$$\partial f(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{Y}} f\, \mathbf{J}^{-1}\partial \mathbf{g} + \nabla_c f \partial \mathbf{Z}$$

donde

$$\nabla_c f = \nabla_{\mathbf{Z}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} f\, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{C}$$

como ya antes se definió. La expresión para $\partial f(\mathbf{Y},\mathbf{Z})$ se puede utilizar para estudiar la variación de f en la vecindad factible de un punto factible $\mathbf{X}_0$ producida por los pequeños cambios $\partial \mathbf{g}$ y $\partial \mathbf{Z}$.

En el punto extremo (de hecho en cualquier punto estacionario) $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{Y}_0,\mathbf{Z}_0)$, el gradiente restringido $\nabla_c f$ debe desvanecerse. Por lo tanto

$$\partial f(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0) = \nabla_{\mathbf{Y}_0} f\, \mathbf{J}^{-1}\partial \mathbf{g}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0)$$

o

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}} = \nabla_{\mathbf{Y}_0} f\, \mathbf{J}^{-1}$$

El efecto del pequeño cambio $\partial \mathbf{g}$ en el valor *óptimo* de f se puede estudiar evaluando la razón de cambio de f con respecto a $\mathbf{g}$. Por lo común, estas razones se conocen como **coeficientes de sensibilidad**.

Ejemplo 20.2-3

Considere el mismo problema del ejemplo 20.2-2. $\mathbf{X}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (.81, .35, .28)$ da el punto óptimo. Dado $\mathbf{Y}_0 = (x_{01}, x_{02})$, entonces

$$\nabla_{\mathbf{Y}_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (2x_{01}, 2x_{02}) = (1.62, .70)$$

Por consiguiente

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g_1}, \frac{\partial f}{\partial g_2}\right) = \nabla_{\mathbf{Y}_0} f \mathbf{J}^{-1} = (1.62, .7)\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (.0876, .3067)$$

Esto quiere decir que para $\partial g_1 = 1$, f se incrementará *aproximadamente* en .0867. Asimismo, para $\partial g_2 = 1$, f se incrementará *aproximadamente* en .3067.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2B

1. Suponga que el ejemplo 20.2-2 se resuelve de la siguiente manera. Primero, utilice las restricciones para expresar x_1 y x_2 en función de x_3; luego utilice las ecuaciones resultantes para expresar la función objetivo sólo en función de x_3. Calculando la derivada de la nueva función objetivo con respecto a x_3, podemos determinar los puntos de máximos y mínimos.

(a) ¿Sería diferente la derivada de la nueva función objetivo (expresada en función de x_3) de la obtenida por medio del método Jacobiano?

(b) ¿Cómo difiere el método sugerido del método Jacobiano?

2. Aplique el método Jacobiano al ejemplo 20.2-1 seleccionando $\mathbf{Y} = (x_2, x_3)$ y $\mathbf{Z} = (x_1)$.

***3.** Resuelva por medio del método Jacobiano:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

sujeto a

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = C$$

donde C es una constante positiva. Suponga que el lado derecho de la restricción se cambia a $C + \delta$, donde δ es una pequeña cantidad positiva. Determine el cambio correspondiente del valor óptimo de f.

4. Resuelva por medio del método Jacobiano:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = 5x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

sujeto a

$$g(\mathbf{X}) = x_1x_2 - 10 = 0$$

(a) Encuentre el cambio del valor óptimo de $f(\mathbf{X})$ si $x_1x_2 - 9.99 = 0$ reemplaza a la restricción.

(b) Encuentre el cambio del valor de $f(\mathbf{X})$ en la vecindad del punto factible (2,5), dado que $x_1x_2 = 9.99$ y $\partial x_1 = .01$.

5. Considere el problema:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + 5x_1x_2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + x_2^2 + 3x_2x_3 - 5 = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = x_1^2 + 5x_1x_2 + x_3^2 - 7 = 0$$

Aplique el método Jacobiano para hallar $\partial f(\mathbf{X})$ en la vecindad del punto factible $(1, 1, 1)$. Suponga que $\partial g_1 = -.01$, $\partial g_2 = .02$ y $\partial x_1 = .01$ se especifican en esta vecindad.

6. Considere el problema

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 10 = 0$$

$$g_2(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 - 15 = 0$$

(a) Demuestre que seleccionando x_3 y x_4 como variables independientes, el método Jacobiano no proporciona una solución ni establece la razón.

*__(b)__ Resuelva el problema utilizando x_1 y x_3 como variables independientes, y aplique la condición de suficiencia para determinar el tipo de punto estacionario resultante.

(c) Determine los coeficientes de sensibilidad, dada la solución en (b).

Método Lagrangiano. En el método Jacobiano, si el vector λ representa los coeficientes de sensibilidad, es decir

$$\boldsymbol{\lambda} = \nabla_{\mathbf{Y}_0}\mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$$

Por lo tanto,

$$\partial f - \boldsymbol{\lambda}\,\partial \mathbf{g} = 0$$

Esta ecuación satisface las condiciones necesarias para puntos estacionarios porque $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$ se calcula de modo que $\nabla_c f = \mathbf{0}$. Una forma más conveniente para representar estas ecuaciones es calcular sus derivadas parciales con respecto a todas las x_j. Esto da por resultado

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{g}) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Las ecuaciones resultantes junto con la ecuaciones de restricción $\mathbf{g(X)} = \mathbf{0}$ producen los valores factibles de $\mathbf{X}$ y $\boldsymbol{\lambda}$ que satisfacen las condiciones *necesarias* para los puntos estacionarios.

El procedimiento define el *método Lagrangiano* para identificar los puntos estacionarios de problemas de optimización con restricciones de *igualdad*. Sea

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}\, \mathbf{g}(\mathbf{X})$$

La función L se llama **función Lagrangiana** y los elementos del vector $\boldsymbol{\lambda}$ constituyen los **multiplicadores Lagrange**. Por definición, estos multiplicadores tienen la misma interpretación que los coeficientes de sensibilidad del método Jacobiano

Las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0, \frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} = 0$$

proporcionan las condiciones necesarias para determinar los puntos estacionarios de $f(\mathbf{X})$ sujeta a $\mathbf{g(X)} = \mathbf{0}$. Existen condiciones de suficiencia para el método Lagrangiano, pero en general son difíciles de calcular.

Ejemplo 20.2-4

Considere el problema del ejemplo 20.2-2. La función Lagrangiana es

$$L(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \lambda_1(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) - \lambda_2(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5)$$

Resultan las siguientes condiciones necesarias:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 5\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x_1 + x_2 + 3x_3 - 2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(5x_1 + 2x_2 + x_3 - 5) = 0$$

La solución de estas ecuaciones simultáneas produce

$$\mathbf{X}_0 = (x_1, x_2, x_3) = (.8043, .3478, .2826)$$
$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2) = (.0870, .3043)$$

Esta solución combina los resultados de los ejemplos 20.2-2 y 20.2-3. Los valores de los multiplicadores **Lagrange**, dados por el vector $\boldsymbol{\lambda}$, son iguales a los coeficientes de sensibilidad obtenidos en el ejemplo 20.2-3. El resultado muestra que estos coeficientes son independientes de la selección específica del vector $\mathbf{Y}$ dependiente en el método Jacobiano.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2C

1. Resuelva el siguiente problema de programación lineal mediante los métodos Jacobiano y Lagrangiano:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = 5x_1 + 3x_2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$$
$$g_2(\mathbf{X}) = 3x_1 + x_2 + x_4 - 9 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

***2.** Determine la solución óptima del problema

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) = x_1 + x_2^2 + x_3 - 5 = 0$$
$$g_2(\mathbf{X}) = x_1 + 5x_2 + x_3 - 7 = 0$$

Suponga que $g_1(\mathbf{X}) = .01$ y $g_2(\mathbf{X}) = .02$. Determine el cambio correspondiente del valor óptimo de $f(\mathbf{X})$.

3. Resuelva el problema 6, conjunto 20.2b, por medio del método Lagrangiano, y verifique que los valores de los multiplicadores de Lagrange son los mismos que los coeficientes de sensibilidad obtenidos en el problema 6, conjunto 20.2b.

20.2.2 Restricciones de desigualdad. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)[1]

Esta sección amplía el método Lagrangiano a problemas con restricciones de desigualdad. La contribución principal de la sección es el desarrollo de las condiciones *necesarias* de Karush-Kuhm-Tucker para determinar los puntos estacionarios. Estas condiciones también son suficientes conforme a ciertas reglas que más adelante se formularán.

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

Las restricciones de desigualdad se pueden convertir en ecuaciones por medio de variables de holgura *no negativas*. Sea $S_i^2 (\geq 0)$ la cantidad de holgura agregada a la restricción i-ésima $\mathbf{g}_i(\mathbf{X}) \leq 0$ y definamos

$$\mathbf{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_m)^T, \ \mathbf{S}^2 = (S_1^2, S_2^2, \ldots, S_m^2)^T$$

---

[1]W. Karush fue el primero en desarrollar las condiciones KKT en 1939 como parte de una tesis de maestría en la Universidad de Chicago. Las mismas condiciones fueron desarrolladas de forma independiente en 1951 por W. Khun y A. Tucker.

donde m es el total de restricciones de desigualdad. La función Lagrangiana es por consiguiente

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}\left[\mathbf{g}(\mathbf{X}) + \mathbf{S}^2\right]$$

Dadas las restricciones $\mathbf{g(X)} \leq \mathbf{0}$, una condición necesaria para optimalidad es que $\boldsymbol{\lambda}$ sea no negativo (no positivo) para problemas de maximización (minimización). El resultado se justifica observando que el vector $\boldsymbol{\lambda}$ mide la razón de variación de f con respecto a $\mathbf{g}$, es decir,

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{g}}$$

En el caso de maximización, a medida que se incrementa el lado derecho de la restricción $\mathbf{g(X)} \leq \mathbf{0}$ desde 0 hasta el vector $\partial\mathbf{g}$, el espacio de soluciones se hace menos restringido y por consiguiente f no puede disminuir, lo que significa que $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$. Igualmente para minimización, a medida que se incrementa el lado derecho de las restricciones, f no puede incrementarse, lo cual implica que $\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$. Si las restricciones son igualdades, esto es, $\mathbf{g(X)} = \mathbf{0}$, entonces $\boldsymbol{\lambda}$ se hace no restringido en cuanto a signo (vea el problema 2, conjunto 20.2d).

Las restricciones en $\boldsymbol{\lambda}$ se mantienen como parte de las condiciones KKT necesarias. Ahora se desarrollarán las condiciones restantes.

Calculando las derivadas parciales de L con respecto a $\mathbf{X}$, $\mathbf{S}$ y $\boldsymbol{\lambda}$, obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{X}} = \nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}\nabla\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = -2\lambda_i S_i = 0, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = -(\mathbf{g}(\mathbf{X}) + \mathbf{S}^2) = \mathbf{0}$$

El segundo conjunto de ecuaciones revela los siguientes resultados:

1. Si $\lambda_i \neq 0$, entonces $S_i^2 = 0$. Este resultado indica que el recurso correspondiente está escaso (es decir, agotado por completo).
2. Si $S_i^2 > 0$, entonces $\lambda_i = 0$. Esto indica que el recurso i no está escaso y, por consiguiente, no tiene ningún efecto en el valor de f (es decir, $\lambda_i = \frac{\partial f}{\partial g_i} = 0$).

Del segundo y tercer conjuntos de ecuaciones, obtenemos

$$\lambda_i g_i(\mathbf{X}) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

Esta nueva condición repite en esencia el argumento anterior, porque si $\lambda_i > 0$, $g_i(\mathbf{X}) = 0$ o $S_i^2 = 0$; y si $g_i(\mathbf{X}) < 0$, $S_i^2 > 0$, y $\lambda_i = 0$.

Las condiciones KKT necesarias para problemas de maximización se resumen como sigue:

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

$$\nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}\nabla\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\lambda_i g_i(\mathbf{X}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

TABLA 20.1 Suficiencia de las condiciones KKT

Sentido de la optimización	Condiciones requeridas	
	Función objetivo	*Espacio de soluciones*
Maximización	Cóncava	Conjunto convexo
Minimización	Convexa	Conjunto convexo

Estas condiciones también aplican al caso de minimización, excepto que $\boldsymbol{\lambda}$ debe ser no positivo (¡compruébelo!). Tanto en maximización como en minimización, los multiplicadores de Lagrange correspondientes a restricciones de igualdad no están restringidos en cuanto a signo.

Suficiencia de las condiciones KKT. Las condiciones KKT necesarias también son suficientes si la función objetivo y el espacio de soluciones satisfacen las condiciones que aparecen en la tabla 20.1.

Es más fácil verificar que una función sea convexa o cóncava que demostrar que un espacio de soluciones es convexo. Por esta razón, ofrecemos un *subconjunto* de las condiciones de suficiencia, que, aunque no tan general como los de la Tabla 20.1, son más fáciles de aplicar en la práctica. Para proporcionar estas condiciones, definimos los problemas no lineales generalizados como

$$\text{Maximizar o minimizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$g_i(\mathbf{X}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$
$$g_i(\mathbf{X}) \geq 0, \quad i = r + 1, \ldots, p$$
$$g_i(\mathbf{X}) = 0, \quad i = p + 1, \ldots, m$$

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i[g_i(\mathbf{X}) + S_i^2] - \sum_{i=r+1}^{p} \lambda_i[g_i(\mathbf{X}) - S_i^2] - \sum_{i=p+1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{X})$$

El parámetro λ_i es el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción i. Las condiciones para establecer la suficiencia de las condiciones KKT se resumen en la tabla 20.2.

TABLA 20.2 Subconjunto de condiciones KKT suficientes

Sentido de la optimización	Condiciones requeridas			
	$f(\mathbf{X})$	$g_i(\mathbf{X})$	λ_i	
Maximización	Cóncava	Convexa	≥ 0	$(1 \leq i \leq r)$
		Cóncava	≤ 0	$(r + 1 \leq i \leq p)$
		Lineal	No restringida	$(p + 1 \leq i \leq m)$
Minimización	Convexa	Convexa	≤ 0	$(1 \leq i \leq r)$
		Cóncava	≥ 0	$(r + 1 \leq i \leq p)$
		Lineal	No restringida	$(p + 1 \leq i \leq m)$

Las condiciones que aparecen en la tabla 20.2 son un subconjunto de las condiciones que aparecen en la tabla 20.1 porque un espacio de soluciones puede ser convexo sin que satisfaga las condiciones que aparecen en la tabla 20.2

La tabla 20.2 es válida porque las condiciones dadas producen una función Lagrangiana $L(\mathbf{X},\mathbf{S},\boldsymbol{\lambda})$ en el caso de maximización y convexa $L(\mathbf{X},\mathbf{S},\boldsymbol{\lambda})$ en el caso de minimización. Este resultado se verifica observando que si $g(x)$ es convexa, entonces $\lambda_i g_i(x)$ es convexa si $\lambda_i \geq 0$ y cóncava si $\lambda_i \leq 0$. Se pueden establecer interpretaciones similares para todas las condiciones restantes. Observe que una función lineal es tanto convexa como cóncava. Además, si una función f es cóncava, entonces $(-f)$ es convexa, y viceversa.

Ejemplo 20.2-5

Considere el siguiente problema de minimización:

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{X}) &= 2x_1 + x_2 - 5 \leq 0 \\ g_2(\mathbf{X}) &= x_1 + x_3 - 2 \leq 0 \\ g_3(\mathbf{X}) &= 1 - x_1 \leq 0 \\ g_4(\mathbf{X}) &= 2 - x_2 \leq 0 \\ g_5(\mathbf{X}) &= -x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Éste es un problema de minimización, de ahí que $\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$. Las condiciones KKT se dan por lo tanto como

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \leq \mathbf{0}$$

$$(2x_1, 2x_2, 2x_3) - (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\lambda_1 g_1 = \lambda_2 g_2 = \cdots = \lambda_5 g_5 = 0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

Estas condiciones se reducen a

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 &\leq 0 \\ 2x_1 - 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_4 &= 0 \\ 2x_3 - \lambda_2 + \lambda_5 &= 0 \\ \lambda_1(2x_1 + x_2 - 5) &= 0 \\ \lambda_2(x_1 + x_3 - 2) &= 0 \\ \lambda_3(1 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_4(2 - x_2) = 0$$
$$\lambda_5 x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 + x_3 \leq 2$$
$$x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 0$$

La solución es $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = -4$. Debido a que tanto $f(\mathbf{X})$ como el espacio de soluciones $\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq 0$ son convexos, $L(\mathbf{X},\mathbf{S},\mathbf{l})$ debe ser convexa, y el punto estacionario resultante da un mínimo restringido global. Las condiciones KKT son fundamentales para el desarrollo de los algoritmos de programación no lineal del capítulo 21.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 20.2D

1. Considere el problema:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \geq 0$$

Demuestre que las condiciones KKT son las mismas que en la sección 20.2.2, excepto que $\boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{0}$.

2. Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = 0$$

Demuestre que las condiciones KKT son

$$\nabla f(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\lambda}\nabla \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{\lambda} \text{ sin restricción de signo}$$

3. Escriba las condiciones KKT necesarias para los siguientes problemas.

(a) Maximizar $f(\mathbf{X}) = x_1^3 - x_2^2 + x_1x_3^2$
sujeto a

$$x_1 + x_2^2 + x_3 = 5$$
$$5x_1^2 - x_2^2 - x_3 \geq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(b) Minimizar $f(\mathbf{X}) = x_1^4 + x_2^2 + 5x_1x_2x_3$
sujeto a

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 \leq 10$$
$$x_1^3 + x_2^2 + 4x_3^2 \geq 20$$

4. Considere el problema

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

Dado que $f(\mathbf{X})$ es cóncava y $g_i(\mathbf{X})(i = 1, 2, \ldots, m)$ es una función *lineal,* demuestre que las condiciones KKT necesarias también son suficientes. ¿Es cierto este resultado si $g_i(\mathbf{X})$ es una función *no lineal* convexa para todas las i? ¿Por qué?

5. Considere el problema

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$g_1(\mathbf{X}) \geq 0,\ g_2(\mathbf{X}) = 0,\ g_3(\mathbf{X}) \leq 0$$

Desarrolle las condiciones KKT, y proporcione las estipulaciones conforme a las cuales las condiciones son suficientes.

BIBLIOGRAFÍA

Bazarra, M., H. Sherali, y C. Shetty, *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*, 3a. ed., Wiley, Nueva York, 2006.

Beightler, C., D. Phillips, y D. Wilde, *Foundations of Optimization*, 2a. ed., Prentice Hall, NJ, 1979.

Fletcher, *R., Practical Methods of Optimization*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 2000.

CAPÍTULO 21

Algoritmos de programación no lineal

21.1 ALGORITMOS NO RESTRINGIDOS

Esta sección presenta dos tipos de algoritmos para el problema no restringido: de *búsqueda directa* y del *gradiente*.

21.1.1 Método de búsqueda directa

Los métodos de búsqueda directa se aplican sobre todo a funciones de una sola variable estrictamente unimodales. Aunque el caso parezca trivial, la sección 21.1.2 demuestra que la optimización de funciones de una sola variable es clave en el desarrollo del algoritmo general de múltiples variables.

La idea de los métodos de búsqueda directa es identificar el **intervalo de incertidumbre** que se sabe incluye el punto de solución óptima. El procedimiento localiza el óptimo estrechando de manera interactiva el intervalo de incertidumbre a un nivel de exactitud deseada.

En esta sección se presentan dos algoritmos de búsqueda estrechamente relacionados; el **dicótomo** y el de la **sección dorada**. Ambos buscan la maximización de una función unimodal $f(x)$ a lo largo del intervalo $a \leq x \leq b$ que incluye el punto óptimo x^*. Los dos métodos se inician con el intervalo inicial de incertidumbre $I_0 = (a,b)$.

Paso general *i*. Sea $I_{i-1} = (x_L, x_R)$ el intervalo actual de incertidumbre (en la iteración 0, $x_L = a$ y $x_R = b$). La siguiente tabla muestra cómo se determinan x_1 y x_2:

Método dicótomo	Método de la sección dorada
$x_1 = \frac{1}{2}(x_R + x_L - \Delta)$	$x_1 = x_R - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(x_R - x_L)$
$x_2 = \frac{1}{2}(x_R + x_L + \Delta)$	$x_2 = x_L + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)(x_R - x_L)$

La selección de x_1 y x_2 garantiza que $x_L < x_1 < x_2 < x_R$.

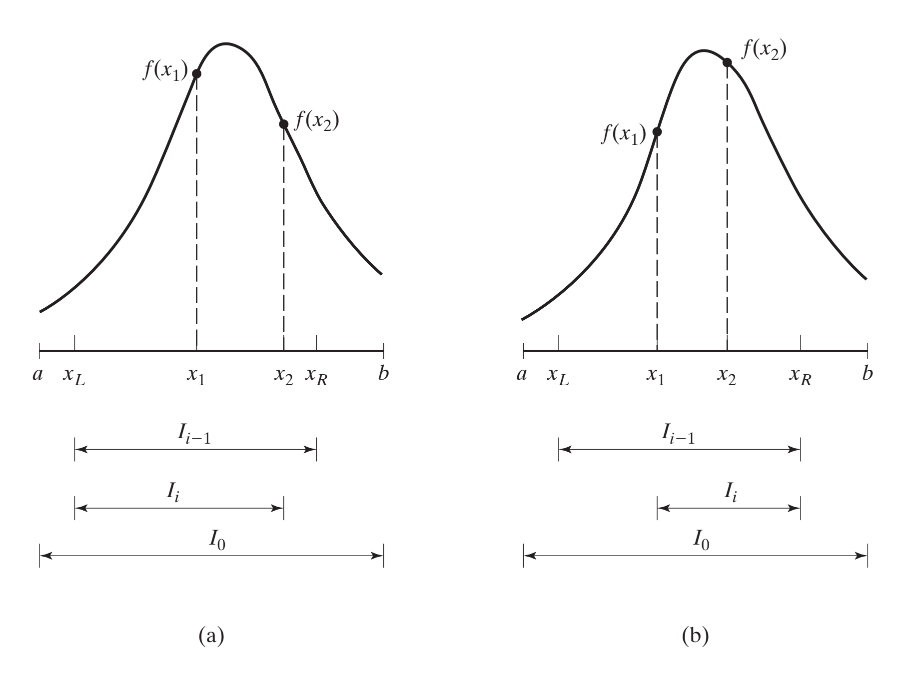


FIGURA 21.1

Ilustración del paso general de los métodos de búsqueda, dicótomo y de la sección dorada

El siguiente intervalo de incertidumbre, I_i, se determina de la siguiente manera:

1. Si $f(x_1) > f(x_2)$, entonces $x_L < x^* < x_2$. Sea $x_R = x_2$ y establezca $I_i = (x_L,x_2)$ [vea la figura 21.1(a)].
2. Si $f(x_1) < f(x_2)$, entonces $x_I < x^* < x_R$. Sea $x_L = x_1$ y establezca $I_i = (x_I, x_R)$ [vea la figura 21.1(b)].
3. Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 < x^* < x_2$. Sea $x_L = x_1$ y $x_\mathrm{R} = x_2$; establezca $I_i = (x_1,x_2)$.

La manera de determinar x_1 y x_2 garantiza que $I_{i+1} < I_i$, como se demostrará en breve. El algoritmo termina en la iteración k si $I_k \leq \Delta$, donde Δ es un nivel de exactitud especificado por el usuario.

En el método dicótomo, los valores x_1 y x_2 se sitúan simétricamente alrededor del punto medio del intervalo de incertidumbre actual. Esto significa que

$$I_{i+1} = .5(I_i + \Delta)$$

La aplicación repetida del algoritmo garantiza que la longitud del intervalo de incertidumbre se aproxime a la exactitud deseada, Δ.

En el método de la sección dorada, la idea es más elaborada. Observamos que cada intervalo del método dicótomo requiere calcular los dos valores $f(x_1)$ y $f(x_2)$, pero al final se descarta uno de ellos. Lo que el método de la sección dorada propone es ahorrar cálculos al reutilizar el valor desechado en la iteración inmediatamente subsiguiente.

Definamos

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_R - \alpha(x_R - x_L) \\ x_2 &= x_L + \alpha(x_R - x_L) \end{aligned}\right\} 0 < \alpha < 1$$

Entonces el intervalo de incertidumbre I_i en la iteración i es igual a (x_L, x_2) o (x_1, x_R). Considere el caso $I_i = (x_L, x_2)$, lo que significa que x_1 está incluida en I_i. En la iteración $i + 1$, seleccionamos x_2 igual a x_1 en la iteración i, lo cual conduce a la siguiente ecuación:

$$x_2(\text{iteración } i + 1) = x_1(\text{iteración } i)$$

La sustitución produce

$$x_L + \text{a}[x_2(\text{iteración } i) - x_L] = x_R - \text{a}(x_R - x_L)$$

o

$$x_L + \alpha[x_L + \alpha(x_R - x_L) - x_L] = x_R - \alpha(x_R - x_L)$$

la cual se simplifica como

$$\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

Esta ecuación da por resultado $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Se selecciona la raíz positiva $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx .681$ porque $0 < \alpha < 1$.

El diseño de los cálculos de la sección dorada garantiza una reducción α en los intervalos de incertidumbre sucesivos, es decir

$$I_{i+1} = \alpha I_i$$

El método de la sección dorada converge con más rapidez que el método dicótomo porque, en éste, el estrechamiento del intervalo de incertidumbre se desacelera apreciablemente a medida que $I \rightarrow \Delta$. Además, el método de la sección dorada requiere la mitad de los cálculos porque recicla un conjunto de cálculos de iteración inmediata anterior.

Ejemplo 21.1-1

$$\text{Maximizar } f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{3}(-x + 20), & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

El valor máximo de $f(x)$ ocurre en $x = 2$. La tabla siguiente demuestra los cálculos para las iteraciones 1 y 2 siguiendo los métodos dicótomo y de la sección dorada, con $\Delta = .1$. Continuando

Método dicótomo	Método de la sección dorada
Iteración 1	*Iteración 1*
$I_0 = (0, 3) \equiv (x_L, x_R)$	$I_0 = (0, 3) \equiv (x_L, x_R)$
$x_1 = 0 + .5(3 - 0 - .1) = 1.45, f(x_1) = 4.35$	$x_1 = 3 - .618(3 - 0) = 1.146, f(x_1) = 3.438$
$x_2 = 0 + .5(3 - 0 + .1) = 1.55, f(x_2) = 4.65$	$x_2 = 0 + .618(3 - 0) = 1.854, f(x_2) = 5.562$
$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.45, I_1 = (1.45, 3)$	$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.146, I_1 = (1.146, 3)$
Iteración 2	*Iteración 2*
$I_1 = (1.45, 3) \equiv (x_L, x_R)$	$I_1 = (1.146, 3) \equiv (x_L, x_R)$
$x_1 = 1.45 + .5(3 - 1.45 - .1) = 2.175, f(x_1) = 5.942$	$x_1 = x_2$ en iteración $0 = 1.854, f(x_1) = 5.562$
$x_2 = \frac{3 + 1.45 + .1}{2} = 2.275, f(x_2) = 5.908$	$x_2 = 1.146 + .618(3 - 1.146) = 2.292, f(x_2) = 5.903$
$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_R = 2.275, I_2 = (1.45, 2.275)$	$f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow x_L = 1.854, I_2 = (1.854, 3)$

de la misma manera, a fin de cuentas el intervalo de incertidumbre se estrechará a la tolerancia Δ deseada.

Momento de Excel

La plantilla *excelDiGold.xls* maneja ambos métodos ingresando la letra X en D5 (dicótomo) o F5 (sección dorada). Los datos de entrada incluyen $f(x)$, a, b y Δ. La función $f(x)$ se ingresa en la celda E3 como

```
=IF(C3<=2,3*C3,(-C3+20)/3)
```

La celda C3 desempeña el papel de x en $f(x)$.

La figura 21.2 compara los dos métodos. El método de la sección dorada requiere menos de la mitad de las iteraciones del método dicótomo, además la mitad de los cálculos en cada iteración.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.1A

1. Use la plantilla *excelDiGold.xls* para resolver el ejemplo 21.1-1 suponiendo que $\Delta = .01$. Compare la cantidad de cálculos y la exactitud de los resultados con los de la figura 21.2.

2. Determine el máximo de cada una de las siguientes funciones mediante la búsqueda dicótoma. Suponga que $\Delta = .05$.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{|(x - 3)^3|}, \quad 2 \leq x \leq 4$

(b) $f(x) = x \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

***(c)** $f(x) = x \operatorname{sen} \pi x, \quad 1.5 \leq x \leq 2.5$

(d) $f(x) = -(x - 3)^2, \quad 2 \leq x \leq 4$

***(e)** $f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

	A	B	C	D	E	F
1	Dichotomous/Golden Section Search					
2	**Input data:** Type f(C3) in E3, where C3 represents x in f(x)					
3	Δ =	0.1	C3		#VALUE!	Clear Calculations
4	Minimum x =	0	Maximum x =	3		
5	**Solution:**	Enter x to select>	Dichotomous:	X	GoldenSection:	
6	x* =	2.04001	f(x*) =	5.97002		
7	**Clalculations:**				Perform calculation	
8	xL	xR	x1	x2	f(x1)	f(x2)
9	0.000000	3.000000	1.450000	1.550000	4.350000	4.650000
10	1.450000	3.000000	2.175000	2.275000	5.941667	5.908333
11	1.450000	2.275000	1.812500	1.912500	5.437500	5.737500
12	1.812500	2.275000	1.993750	2.093750	5.981250	5.968750
13	1.812500	2.093750	1.903125	2.003125	5.709375	5.998958
14	1.903125	2.093750	1.948438	2.048438	5.845313	5.983854
15	1.948438	2.093750	1.971094	2.071094	5.913281	5.976302
16	1.971094	2.093750	1.982422	2.082422	5.947266	5.972526
17	1.982422	2.093750	1.988086	2.088086	5.964258	5.970638
18	1.988086	2.093750	1.990918	2.090918	5.972754	5.969694
19	1.988086	2.090918	1.989502	2.089502	5.968506	5.970166
20	1.989502	2.090918	1.990210	2.090210	5.970630	5.969930
21	1.989502	2.090210	1.989856	2.089856	5.969568	5.970048
22	1.989856	2.090210	1.990033	2.090033	5.970099	5.969989
23	1.989856	2.090033	1.989944	2.089944	5.969833	5.970019
24	1.989944	2.090033	1.989989	2.089989	5.969966	5.970004
25	1.989989	2.090033	1.990011	2.090011	5.970033	5.969996
26	1.989989	2.090011	1.990000	2.090000	5.969999	5.970000
27	1.990000	2.090011	1.990005	2.090005	5.970016	5.969998
28	1.990000	2.090005	1.990003	2.090003	5.970008	5.969999
5	**Solution:**	Enter x to select>	Dichotomous:		GoldenSection:	X
6	x* =	2.00909	f(x*) =	5.99290		
7	**Clalculations:**				Perform calculation	
8	xL	xR	x1	x2	f(x1)	f(x2)
9	0.000000	3.000000	1.145898	1.854102	3.437694	5.562306
10	1.145898	3.000000	1.854102	2.291796	5.562306	5.902735
11	1.854102	3.000000	2.291796	2.562306	5.902735	5.812565
12	1.854102	2.562306	2.124612	2.291796	5.958463	5.902735
13	1.854102	2.291796	2.021286	2.124612	5.992905	5.958463
14	1.854102	2.124612	1.957428	2.021286	5.872283	5.992905
15	1.957428	2.124612	2.021286	2.060753	5.992905	5.979749
16	1.957428	2.060753	1.996894	2.021286	5.990683	5.992905
17	1.996894	2.060753	2.021286	2.036361	5.992905	5.987880

FIGURA 21.2

Resultados de los métodos dicótomo y de la sección dorada aplicados al ejemplo 21.1-1 obtenidos con Excel (archivo *excelDiGold.xls*)

21.1.2 Método del gradiente

Esta sección desarrolla un método para optimizar dos veces funciones continuamente diferenciables, llamado método del **ascenso más pronunciado** (o de mayor pendiente). La idea es generar puntos sucesivos en la dirección del gradiente de la función.[1] La ter-

[1]El método de Newton-Raphson en la sección 20.1.2 también es un método de gradiente que localiza el óptimo de forma directa resolviendo las ecuaciones de condiciones necesarias.

minación del método de gradiente se da en el punto donde el vector gradiente se vuelve nulo. Ésta es la única condición necesaria para la optimalidad.

Suponga que $f(\mathbf{X})$ se maximiza. Sea X_0 el punto inicial desde donde se inicia el procedimiento, y defina $\nabla f(\mathbf{X}_k)$ como el gradiente de f en el punto $\mathbf{X}_k$. La idea es determinar una ruta particular p a lo largo de la cual $\frac{\partial f}{\partial p}$ se maximice en un punto dado. Este resultado se logra si se seleccionan los puntos sucesivos $\mathbf{X}_k$ y $\mathbf{X}_{k+1}$ de modo que

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + r_k \nabla f(\mathbf{X}_k)$$

donde r_k es el **tamaño del paso** óptimo en $\mathbf{X}_k$.

El tamaño del paso se determina de modo que el siguiente punto $\mathbf{X}_{k+1}$ conduzca al mejoramiento máximo de f. Esto equivale a determinar $r = r_k$ que maximiza la función

$$h(r) = f[\mathbf{X}_k + r\nabla f(\mathbf{X}_k)]$$

Debido a que $h(r)$ es una función de una sola variable, se puede utilizar el método de búsqueda de la sección 21.1.1 para determinar el óptimo, siempre que $h(r)$ sea unimodal.

El procedimiento propuesto termina cuando dos puntos de prueba sucesivos $\mathbf{X}_k$ y $\mathbf{X}_{k+1}$ son aproximadamente iguales. Esto equivale a tener $r_k\nabla f(\mathbf{X}_k) \approx \mathbf{0}$, o de forma equivalente $\nabla f(\mathbf{X}_k) \approx \mathbf{0}$.

Ejemplo 21.1-2

Considere el siguiente problema:

$$\text{Maximizar } f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

El óptimo exacto ocurre en $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

El gradiente de f es

$$\nabla f(\mathbf{X}) = (4 - 4x_1 - 2x_2, 6 - 2x_1 - 4x_2)$$

La naturaleza cuadrática de la función indica que los gradientes en dos puntos sucesivos son ortogonales (perpendiculares entre sí).

Supongamos que comenzamos en el punto inicial $\mathbf{X}_0 = (1,1)$. La figura 21.3 muestra los puntos de solución sucesivos.

Iteración 1

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = (-2, 0)$$

El siguiente punto $\mathbf{X}_1$ se obtiene considerando

$$\mathbf{X} = (1, 1) + r(-2, 0) = (1 - 2r, 1)$$

Por lo tanto ,

$$h(r) = f(1 - 2r, 1) = -2(1 - 2r)^2 + 2(1 - 2r) + 4$$

El tamaño óptimo del paso se obtiene aplicando las condiciones clásicas necesarias expuestas en el capítulo 20 (también se pueden utilizar los algoritmos de búsqueda dados en la sección 21.1.1 para determinar el óptimo). El valor máximo de $h(r)$ es $r_1 = \frac{1}{4}$, el cual da el siguiente punto de solución $\mathbf{X}_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

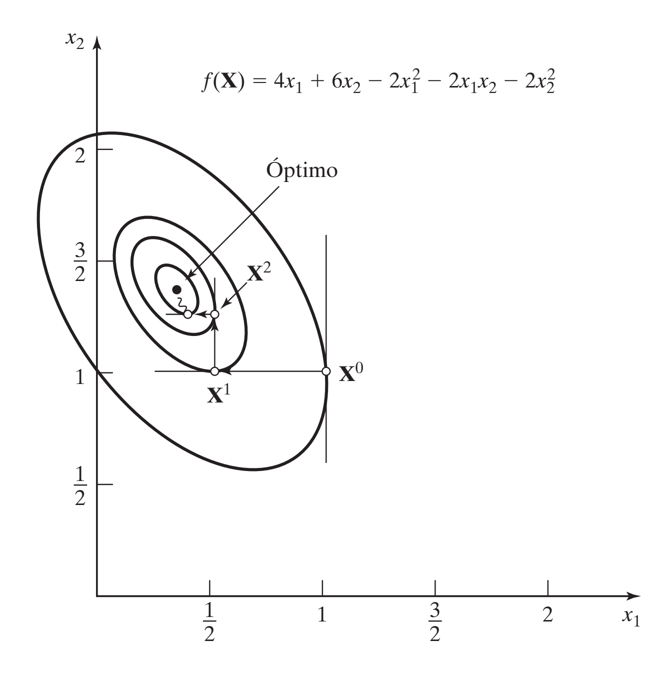


FIGURA 21.3
Maximización de $f(x_1, x_2) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$ por el método del ascenso más pronunciado

Iteración 2

$$\nabla f(\mathbf{X}_1) = (0, 1)$$
$$\mathbf{X} = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) + r(0, 1) = \left(\tfrac{1}{2}, 1 + r\right)$$
$$h(r) = -2(1 + r)^2 + 5(1 + r) + \tfrac{3}{2}$$

Por lo tanto, $r_2 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Iteración 3

$$\nabla f(\mathbf{X}_2) = \left(-\tfrac{1}{2}, 0\right)$$
$$\mathbf{X} = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) + r\left(-\tfrac{1}{2}, 0\right) = \left(\tfrac{1 - r}{2}, \tfrac{5}{4}\right)$$
$$h(r) = -\tfrac{1}{2}(1 - r)^2 + \tfrac{3}{4}(1 - r) + \tfrac{35}{8}$$

Por consiguiente, $r_3 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_3 = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{4}\right)$.

Iteración 4

$$\nabla f(\mathbf{X}_3) = \left(0, \tfrac{1}{4}\right)$$
$$\mathbf{X} = \left(\tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{4}\right) + r\left(0, \tfrac{1}{4}\right) = \left(\tfrac{3}{8}, \tfrac{5 + r}{4}\right)$$
$$h(r) = -\tfrac{1}{8}(5 + r)^2 + \tfrac{21}{16}(5 + r) + \tfrac{39}{32}$$

Por lo tanto, $r_4 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_4 = \left(\frac{3}{8}, \frac{21}{16}\right)$.

Iteración 5

$$\nabla f(\mathbf{X}_4) = \left(-\tfrac{1}{8}, 0\right)$$

$$\mathbf{X} = \left(\tfrac{3}{8}, \tfrac{21}{16}\right) + r\left(-\tfrac{1}{8}, 0\right) = \left(\tfrac{3-r}{8}, \tfrac{21}{16}\right)$$

$$h(r) = -\tfrac{1}{32}(3-r)^2 + \tfrac{11}{64}(3-r) + \tfrac{567}{128}$$

Se obtiene $r_5 = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{X}_5 = \left(\frac{11}{32}, \frac{21}{16}\right)$.

Iteración 6

$$\nabla f(\mathbf{X}_5) = \left(0, \tfrac{1}{16}\right)$$

El proceso se puede terminar en este punto porque $\nabla f(\mathbf{X}_5) \approx \mathbf{0}$. El punto *aproximado* máximo lo da $\mathbf{X}_5 = (.3438, 1.3125)$. El óptimo exacto es $\mathbf{X}^* = (.3333, 1.3333)$.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.1B

*1. Demuestre que, por lo común, cuando se aplica el método de Newton-Raphson (sección 20.1.2) a una función cuadrática estrictamente cóncava convergerá en exactamente un paso. Aplique el método a la maximización de

$$f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

2. Realice cinco iteraciones para cada uno de los siguientes problemas con el método del descenso (ascenso) más pronunciado. Suponga que $\mathbf{X}^0 = 0$ en cada caso.

(a) mín $f(\mathbf{X})$ = mín $f(\mathbf{X}) = (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)$

(b) máx $f(\mathbf{X}) = \mathbf{cX} + \mathbf{X}^T\mathbf{AX}$

donde

$$\mathbf{c} = (1, 3, 5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -\frac{1}{2} \\ -3 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) mín $f(\mathbf{X}) = x_1 - x_2 + {x_1}^2 - x_1x_2$

21.2 ALGORITMOS RESTRINGIDOS

El problema de programación no lineal general restringido se define como

$$\text{Maximizar (o minimizar) } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \leq \mathbf{0}$$

Las condiciones de no negatividad $\mathbf{X} \geq \mathbf{0}$, son parte de las restricciones. Incluso, al menos una de las funciones $f(\mathbf{X})$ y $\mathbf{g}(\mathbf{X})$ es no lineal, y todas las funciones son continuamente diferenciables.

El comportamiento errático de las funciones no lineales impide el desarrollo de un solo algoritmo para el modelo no lineal general. Quizás el resultado más general aplicable al problema sean las condiciones KKT (sección 20.2.2). La tabla 20.2 muestra que las condiciones sólo son necesarias, a menos que $f(\mathbf{X})$ y $\mathbf{g(X)}$ sean funciones de buen comportamiento.

Esta sección presenta varios algoritmos que se pueden clasificar en general como métodos *indirectos* y *directos*. Los métodos indirectos resuelven el problema no lineal valiéndose de uno o más programas *lineales* derivados del programa original. Los métodos directos se valen del programa original.

Los algoritmos indirectos presentados en esta sección incluyen las programaciones separable, cuadrática y estocástica. Los algoritmos directos incluyen el método de combinación lineal y un breve análisis del algoritmo SUMT, la técnica de maximización secuencial sin restricciones. En la lista de referencias al final del capítulo se hallan otras importantes técnicas no lineales.

21.2.1 Programación separable

Una función $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ es **separable** si se puede expresar como la suma de n funciones de una sola variable $f_1(x_1), f_2(x_2),\ldots, f_n(x_n)$, es decir,

$$f(x_1, x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)$$

Por ejemplo, cualquier función lineal es separable. Por otra parte, la función

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 \text{ sen } (x_2 + x_3) + x_2 e^{x3}$$

no es separable.

Algunas funciones no lineales (convolucionadas) se pueden hacer separables mediante sustituciones apropiadas. Considere, por ejemplo, el caso de maximizar $z = x_1x_2$. Sea $y = x_1x_2$, entonces $\ln y = \ln x_1 + \ln x_2$, y el problema separable es

$$\text{Maximizar } z = y$$

sujeto a

$$\ln y = \ln x_1 + \ln x_2$$

La sustitución asume que x_1 y x_2 son variables *positivas* porque la función logarítmica es indefinida con valores no positivos. Podemos tener en cuenta el caso en que x_1 y x_2 pueden asumir valores cero por medio de las aproximaciones

$$w_1 = x_1 + \delta_1 > 0$$

$$w_2 = x_2 + \delta_2 > 0$$

Las constantes δ_1 y δ_2 son valores positivos muy pequeños.

Esta sección muestra cómo se puede obtener una solución aproximada de *cualquier* problema separable utilizando aproximación lineal y el método simplex de programación lineal. La función de una sola variable puede ser representada por una función lineal definida por intervalos por medio de programación entera combinada (capítulo 9). Suponga que $f(x)$ se representa de forma aproximada en el intervalo $[a,b]$,

y se define $a_k, k = 1, 2,\dots, K,$ como el punto de ruptura k-ésimo sobre el eje x de modo que $a_1 < a_2 < \dots < a_K$. Los puntos a_1 y a_K coinciden con los puntos extremos a y b del intervalo designado. Por lo tanto, $f(x)$ se representa de forma aproximada como

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{K} f(a_k)w_k$$

$$x = \sum_{k=1}^{K} a_k w_k$$

Los pesos no negativos w_k deben satisfacer la condición

$$\sum_{k=1}^{K} w_k = 1, w_k \geq 0, k = 1, 2,\dots, K$$

La programación entera combinada (o mixta) garantiza la validez de la aproximación al imponer dos condiciones adicionales:

1. A lo sumo dos w_k son positivos.
2. Si w_k es positivo, entonces sólo un w_{k-1} o w_{k+1} adyacente puede asumir un valor positivo.

Para demostrar cómo se satisfacen estas condiciones, considere el problema separable

$$\text{Maximizar (o minimizar) } z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

Este problema se puede representar de forma aproximada por medio de un programa entero combinado como sigue. Sean[2]

$$\left.\begin{aligned} a_{jk} &= \text{punto de ruptura } k \text{ de la variable } x_j \\ w_{jk} &= \text{peso con punto de ruptura } k \text{ de la variable } x_j \end{aligned}\right\} k = 1, 2, \dots, K_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Entonces el problema combinado equivalente es

$$\text{Maximizar (o minimizar) } z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} f_j(a_{jk})w_{jk}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K_j} g_{jk}(a_{jk})w_{jk} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$0 \leq w_{j1} \leq y_{j1}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

[2]Es más preciso reemplazar el índice k con k_j de modo que corresponda de forma única a la variable j. En este instante vamos a renunciar a la precisión matemática en favor de una notación más simple.

$$0 \le w_{jk} \le y_{j,k-1} + y_{jk}, \quad k = 2, 3, \ldots, K_j - 1, \; j = 1, 2, \ldots, n$$

$$0 \le w_{jK_j} \le y_{j,K_j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{k=1}^{K_j-1} y_{jk} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{k=1}^{K_j} w_{jk} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_{jk} = (0, 1), \quad k = 1, 2, \ldots, K_j, j = 1, 2, \ldots, n$$

Las variables en el problema de aproximación son w_{jk} y y_{jk}.

La formulación muestra cómo se puede resolver cualquier problema separable, en principio, mediante programación entera combinada. La dificultad es que las restricciones se incrementan con rapidez con la cantidad de puntos de ruptura. En particular, la factibilidad computacional del procedimiento es cuestionable porque no hay códigos de computadora consistentemente confiables para resolver grandes problemas de programación entera combinados.

Otro método para resolver el modelo de aproximación es el método simplex regular (capítulo 3) utilizando una **base restringida**. En este caso se eliminan las restricciones adicionales que implican y_{jk}. La base restringida modifica la condición de optimalidad del método simplex al seleccionar la variable de entrada w_j con la *mejor* $(z_{jk} - c_{jk})$ que no viole el requisito de adyacencia de las variables w con valores positivos. El proceso se repite hasta que se satisfaga la condición de optimalidad o hasta que sea imposible satisfacer la condición de base restringida, lo que ocurra primero.

El método de programación entera combinada da un óptimo global al problema aproximado, en tanto que el método de base restringida sólo puede garantizar un óptimo local. Además, en los dos métodos, la solución aproximada puede no ser factible para el problema original, en cuyo caso quizá sea necesario refinar la aproximación incrementando la cantidad de puntos de ruptura.

Ejemplo 21.2-1

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2^4$$

sujeto a

$$3x_1 + 2x_2^2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

La solución óptima exacta de este problema, obtenida por AMPL o Solver, es $x_1 = 0, x_2 = 2.1232$, y $z^* = 20.25$. Para demostrar cómo se utiliza el método de aproximación, considere las funciones separables

$$f_1(x_1) = x_1$$
$$f_2(x_2) = x_2^4$$
$$g_1(x_1) = 3x_1$$
$$g_2(x_2) = 2x_2^2$$

La variable x_1 no es aproximada porque las funciones $f_1(x_1)$ y $g_1(x_1)$ ya son lineales. Considerando $f_2(x_2)$ y $g_2(x_2)$, suponemos cuatro puntos de ruptura $a_{2k} = 0,1,2$ y 3 para $k = 1,2,3$ y 4, respectivamente. Dado que $x_2 \leq 3$, entonces

k	a_{2k}	$f_2(a_{2k}) = a_{2k}^4$	$g_2(a_{2k}) = 2a_{2k}^2$
1	0	0	0
2	1	1	2
3	2	16	8
4	3	81	18

Por lo tanto

$$f_2(x_2) \approx w_{21}f_2(a_{21}) + w_{22}f_2(a_{22}) + w_{23}f_2(a_{23}) + w_{24}f_2(a_{24})$$
$$\approx 0w_{21} + 1w_{22} + 16w_{23} + 81w_{24} = w_{22} + 16w_{23} + 81w_{24}$$

Asimismo,

$$g_2(x_2) \approx 2w_{22} + 8w_{23} + 18w_{24}$$

El problema de aproximación es por lo tanto

$$\text{Maximizar } z = x_1 + w_{22} + 16w_{23} + 81w_{24}$$

sujeto a

$$3x_1 + 2w_{22} + 8w_{23} + 18w_{24} \leq 9$$
$$w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{24} = 1$$
$$x_1 \geq 0, w_{2k} \geq 0, k = 1, 2, 3, 4$$

Los valores de $w_{2k}, k = 1,2,3,4$, deben satisfacer la condición de base restringida.

La tabla simplex inicial (con las columnas reacomodadas para proporcionar una solución inicial) se da como

Básica	x_1	w_{22}	w_{23}	w_{24}	s_1	w_{21}	Solución
z	−1	−1	−16	−81	0	0	0
s_1	3	2	8	18	1	0	9
w_{21}	0	1	1	1	0	1	1

La variable s_1 (≥ 0) es una holgura. (El problema resultó tener una solución inicial obvia. En general se pueden utilizar variables artificiales, sección 3.4.)

En la fila z, w_{24} es la variable de entrada. Debido a que w_{21} en este momento es básico y positivo, la condición de base restringida dicta que debe salir antes de que w_{24} pueda entrar a la solución. Sin embargo, de acuerdo con la condición de factibilidad, s_1 debe ser la variable de salida, lo que significa que w_{24} no puede entrar a la solución. La siguiente mejor variable de entrada, w_{23}, requiere que w_{21} salga de la solución básica, una condición que da la casualidad de ser satisfecha por la condición de factibilidad. La nueva tabla es por tanto

Básica	x_1	w_{22}	w_{23}	w_{24}	s_1	w_{21}	Solución
z	−1	15	0	−65	0	16	16
s_1	3	−6	0	10	1	−8	1
w_{23}	0	1	1	1	0	1	1

Luego, w_{24} es la variable de entrada, lo cual es admisible porque w_{23} es positivo. El método simplex muestra que s_1 saldrá. Entonces,

Básica	x_1	w_{22}	w_{23}	w_{24}	s_1	w_{21}	Solución
z	$\frac{37}{2}$	-24	0	0	$\frac{13}{2}$	-36	$22\frac{1}{2}$
w_{24}	$\frac{3}{10}$	$-\frac{6}{10}$	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{8}{10}$	$\frac{1}{10}$
w_{23}	$-\frac{3}{10}$	$\frac{16}{10}$	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{18}{10}$	$\frac{9}{10}$

La tabla muestra que w_{21} y w_{22} son candidatas para la variable de entrada. La variable w_{21} no está adyacente a la básica w_{23} o w_{24}, por consiguiente no puede volverse básica. Asimismo, w_{22} no puede entrar porque w_{24} no puede salir. En consecuencia, la última tabla es la solución de base mejor restringida para el problema aproximado.

La solución óptima al problema original es

$$x_1 = 0$$

$$x_2 \approx 2w_{23} + 3w_{24} = 2\left(\tfrac{9}{10}\right) + 3\left(\tfrac{1}{10}\right) = 2.1$$

$$z = 0 + 2.1^4 = 19.45$$

El valor $x_2 = 2.1$ es aproximadamente igual al valor óptimo verdadero (= 2.12132).

Programación separable convexa. Un caso de programación separable ocurre cuando $g_{ij}(x_j)$ es convexa para todas las i y j, lo cual garantiza un espacio de soluciones convexo. Además, si $f_j(x_j)$ es convexa (minimización) o cóncava (maximización) para todas las j, entonces el problema tiene un óptimo global (vea la tabla 20.2, sección 20.2.2). En tales condiciones, se puede utilizar la siguiente aproximación simplificada.

Considere un problema de minimización y sea $f_j(x_j)$ como se muestra en la figura 21.4. Los puntos de ruptura de la función $f_j(x_j)$ son $x_j = a_{jk}$, $k = 0, 1,\ldots, K_j$. Si x_{jk} define el incremento de la variable x_j en el intervalo $(a_{j,k-1}, a_{jk})$, $k = 1,2,\ldots, K_j$ y si r_{jk} es el coeficiente de cambio correspondiente (pendiente del segmento de línea) en el mismo intervalo. Entonces

$$f_j(x_j) \approx \sum_{k=1}^{K_j} r_{jk}x_{jk} + f_j(a_{j0})$$

$$x_j = \sum_{k=1}^{K_j} x_{jk}$$

$$0 \le x_{jk} \le a_{jk} - a_{j,k-1},\ k = 1, 2, \ldots, K_j$$

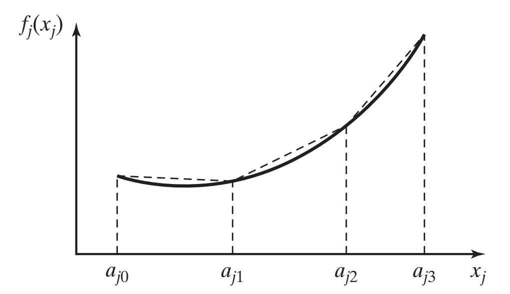


FIGURA 21.4

Aproximación lineal por segmentos de una función convexa

El hecho de que $f_j(x_j)$ sea convexa garantiza que $r_{j1} < r_{j2} \ldots < r_{jk}$. Esto significa que en el problema de minimización la variable x_{jp} es más atractiva que j_{jq} con $p < q$. En consecuencia, x_{jp} siempre alcanzará su límite máximo antes de que x_{jq} pueda asumir un valor positivo.

Las funciones de restricción convexas $g_{ij}(x_j)$ se representan de forma aproximada en esencia de la misma manera. Sea r_{ijk} la pendiente del k-ésimo segmento de línea correspondiente a $g_j(x_j)$. Se deduce que

$$g_{ij}(x_j) \approx \sum_{k=1}^{K_j} r_{ijk} x_{jk} + g_{ij}(a_{j0})$$

El problema completo es por consiguiente

$$\text{Minimizar } z = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{K_j} r_{jk} x_{jk} + f_j(a_{j0}) \right)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{K_j} r_{ijk} x_{jk} + g_{ij}(a_{j0}) \right) \leq b_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$0 \leq x_{jk} \leq a_{jk} - a_{j,k-1}, k = 1, 2, \ldots, K_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

donde

$$r_{jk} = \frac{f_j(a_{jk}) - f_j(a_{j,\,k-1})}{a_{jk} - a_{j,\,k-1}}$$

$$r_{ijk} = \frac{g_{ij}(a_{jk}) - g_{ij}(a_{j,\,k-1})}{a_{jk} - a_{j,\,k-1}}$$

El problema de maximización se trata en esencia del mismo modo. En este caso, $r_{j1} > r_{j2} > \ldots > r_{jK}$, lo que significa que, para $p < q$, la variable x_{jp} siempre alcanzará su valor máximo antes de que x_{jq} asuma un valor positivo (vea el problema 7, conjunto 21.2a, para la comprobación).

El nuevo problema se puede resolver con el método simplex con variables de cota superior (sección 7.3). El concepto de base restringida no se requiere porque la convexidad (concavidad) de las funciones garantiza la selección correcta de las variables básicas.

Ejemplo 21.2-2

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1 - x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1^4 + \quad x_2 &\leq 243 \\ x_1 + 2x_2^2 &\leq 32 \\ x_1 \qquad &\geq 2.1 \\ x_2 &\geq 3.5 \end{aligned}$$

Las funciones separables de este problema son

$$f_1(x_1) = x_1, \qquad f_2(x_2) = -x_2$$
$$g_{11}(x_1) = 3x_1^4, \quad g_{12}(x_2) = x_2$$
$$g_{21}(x_1) = x_1, \qquad g_{22}(x_2) = 2x_2^2$$

Estas funciones satisfacen la condición de convexidad requerida para los problemas de minimización. Las funciones $f_1(x_1), f_2(x_2)$, $g_{12}(x_2)$ y $g_{21}(x_1)$ ya son lineales.

Los intervalos de las variables x_1 y x_2 (estimados con las restricciones) son $a \leq x_1 \leq 3$ y $0 \leq x_2 \leq 4$. Sean $K_1 = 3$ y $K_2 = 4$. Las pendientes correspondientes a las funciones separables se determinan como sigue.

Para $j = 1$,

k	a_{1k}	$g_{11}(a_{1k}) = 3a_{1k}^4$	r_{11k}	x_{1k}
0	0	0	—	—
1	1	3	3	x_{11}
2	2	48	45	x_{12}
3	3	243	195	x_{13}

Para $j = 2$,

k	a_{2k}	$g_{22}(a_{2k}) = 2a_{2k}^2$	r_{22k}	x_{2k}
0	0	0	—	—
1	1	2	2	x_{21}
2	2	8	6	x_{22}
3	3	18	10	x_{23}
4	4	32	14	x_{24}

El problema completo se convierte entonces en

$$\text{Maximizar } z = x_1 - x_2$$

sujeto a

$$3x_{11} + 45x_{12} + 195x_{13} + x_2 \leq 243 \quad (1)$$
$$x_1 + 2x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23} + 14x_{24} \leq 32 \quad (2)$$
$$x_1 \geq 2.1 \quad (3)$$
$$x_2 \geq 3.5 \quad (4)$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} - x_1 = 0 \quad (5)$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} - x_2 = 0 \quad (6)$$
$$0 \leq x_{1k} \leq 1, \quad k = 1, 2, 3 \quad (7)$$
$$0 \leq x_{2k} \leq 1, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (8)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Las restricciones 5 y 6 son necesarias para mantener la relación entre las variables originales y las nuevas. La solución óptima es

$$z = -.52, x_1 = 2.98, x_2 = 3.5, x_{11} = x_{12} = 1, x_{13} = .98, x_{21} = x_{22} = x_{23} = 1, x_{24} = .5$$

Momento de AMPL

El modelado con AMPL del problema no lineal *original* del ejemplo 21.2-2 es muy parecido al de los problemas lineales. La obtención de la solución es un asunto totalmente diferente debido al comportamiento "impredecible" de las funciones no lineales. El archivo *amplEx21.2-2.txt* proporciona el modelo. El modelo se explica en el apéndice C en el sitio web (vea la figura C.17).

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2A

1. Aproxime el siguiente problema como un programa combinado entero.

$$\text{Maximizar } z = e^{-x_1} + x_1 + (x_2 + 1)^2$$

sujeto a

$$x_1^2 + x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

***2.** Repita el problema 1 siguiendo el método de base restringida. Luego determine la solución óptima.

3. Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = x_1x_2x_3$$

sujeto a

$$x_1^2 + x_2 + x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Aproxime el problema como un programa lineal para usarlo con el método de base restringida.

***4.** Demuestre cómo se puede hacer separable el siguiente problema.

$$\text{Maximizar } z = x_1x_2 + x_3 + x_1x_3$$

sujeto a

$$x_1x_2 + x_2 + x_1x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2x_3 \geq 0$$

5. Demuestre cómo se puede hacer separable el siguiente problema.

$$\text{Minimizar } z = e^{2x_1+x_2^2} + (x_3 - 2)^2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$
$$x_1, x_2 x_3 \geq 0$$

6. Demuestre cómo se puede hacer separable el siguiente problema.

$$\text{Maximizar } z = e^{x_1 x_2} + x_2^2 x_3 + x_4$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 x_3 + x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_4 \text{ no restringida en cuanto a signo}$$

7. Demuestre que en la programación convexa separable nunca es óptimo tener $x_{ki} > 0$ cuando $x_{k-1,i}$ no se encuentra en su cota superior.
8. Resuelva como un problema de programación convexa separable.

$$\text{Minimizar } z = x_1^4 + x_2 + x_3^2$$

sujeto a

$$x_1^2 + x_2 + x_3^2 \leq 4$$
$$|x_1 + x_2| \leq 0$$
$$x_1, x_3 \geq 0$$
$$x_2 \text{ no restringida en cuanto a signo}$$

9. Resuelva lo siguiente como un problema de programación convexa distinto

$$\text{Minimizar } z = (x_1 - 2)^2 + 4(x_2 - 6)^2$$

sujeto a

$$6x_1 + 3(x_2 + 1)^2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

21.2.2 Programación cuadrática

Un modelo de programación cuadrática se define como

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX} + \mathbf{X}^T\mathbf{DX}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

donde

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$
$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$
$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

La función $\mathbf{X^TDX}$ define una forma cuadrática (vea la sección D.3 en el sitio web). Se supone que la matriz $\mathbf{D}$ es simétrica y definida negativa, es decir que z es estrictamente cóncava. Las restricciones son lineales, lo que garantiza un espacio de soluciones convexo.

La solución de este problema se basa en las condiciones KKT necesarias. Estas condiciones (como se muestra en la tabla 20.2, sección 20.2.2) también son suficientes porque z es cóncava y el espacio de soluciones es un conjunto convexo.

El problema de programación cuadrática se tratará para el caso de maximización. La conversión a minimización es simple. El problema puede escribirse como

$$\text{Maximizar } z = \mathbf{CX} + \mathbf{X}^T\mathbf{DX}$$

sujeto a

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}\mathbf{X} - \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \leq \mathbf{0}$$

Sean

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)^T$$
$$\mathbf{U} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$$

los multiplicadores de Lagrange correspondientes a las restricciones $\mathbf{AX} - \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$ y $-\mathbf{X} \leq \mathbf{0}$, respectivamente. La aplicación de las condiciones KKT produce

$$\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \mathbf{U} \geq \mathbf{0}$$
$$\nabla z - (\boldsymbol{\lambda}^T, \mathbf{U}^T)\nabla\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$
$$\lambda_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = 0, i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\mu_j x_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$
$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}$$
$$-\mathbf{X} \leq \mathbf{0}$$

Ahora

$$\nabla z = \mathbf{C} + \mathbf{2X}^T\mathbf{D}$$
$$\nabla\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Sean $\mathbf{S} = \mathbf{b} - \mathbf{AX} \geq \mathbf{0}$ las variables de holgura de las restricciones. Las condiciones se reducen a

$$-2\mathbf{X}^T\mathbf{D} + \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{A} - \mathbf{U}^T = \mathbf{C}$$
$$\mathbf{AX} + \mathbf{S} = \mathbf{b}$$
$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i \quad \text{para todas las } i \text{ y } j$$
$$\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{S} \geq \mathbf{0}$$

Debido a que $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$, la transpuesta del primer conjunto de ecuaciones puede escribirse como

$$-2\mathbf{DX} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{U} = \mathbf{C}^T$$

Por consiguiente, las condiciones necesarias pueden combinarse como

$$\begin{pmatrix} -2\mathbf{D} & \mathbf{A}^T & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$
$$\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i, \quad \text{para todas las } i \text{ y } j$$
$$\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{S} \geq \mathbf{0}$$

Excepto para las condiciones $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$, las ecuaciones restantes son lineales en $\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{U}$ y $\mathbf{S}$. Por lo tanto, el problema equivale a resolver un conjunto de ecuaciones lineales con las condiciones adicionales $\mu_j x_j = 0 = \lambda_i S_i$.

La solución del sistema se obtiene con la fase I del método de dos fases (sección 3.4.2) con las restricciones agregadas $\lambda_i S_i = 0$ y $\mu_i x_j = 0$. Esto significa que λ_i y s_i no pueden ser positivas al mismo tiempo, ni tampoco μ_j y x_j. Ésta es la misma idea de **base restringida** que se utilizó en la sección 21.2.1.

La fase I hace que todas las variables artificiales sean iguales a cero siempre que el problema tenga un espacio de soluciones factible.

Ejemplo 21.2-3

Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Este problema puede ponerse en la siguiente forma matricial:

$$\text{Maximizar } z = (4, 6)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sujeto a

$$(1,2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Las condiciones KKT se dan como

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu_1 x_1 = \mu_2 x_2 = \lambda_1 s_1 = 0$$

La tabla inicial correspondiente a la fase 1 se obtiene introduciendo las variables artificiales R_1 y R_2 y actualizando la fila objetivo.

Básica	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
r	6	6	3	−1	−1	0	0	0	10
R_1	4	2	1	−1	0	1	0	0	4
R_2	2	4	2	0	−1	0	1	0	6
s_1	1	2	0	0	0	0	0	1	2

Iteración 1. La variable de entrada más promisoria x_1 puede hacerse básica porque $\mu_1 = 0$.

Básica	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
R	0	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{3}{2}$	0	0	4
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0	1
R_2	0	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	$-\frac{1}{2}$	1	0	4
s_1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	1

Iteración 2. La variable de entrada más promisoria x_2 puede hacerse básica porque $\mu_2 = 0$.

Básica	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
r	0	0	2	0	−1	−1	0	−2	2
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
R_1	0	0	2	0	−1	0	1	−2	2
x_1	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Iteración 3. El multiplicador λ_1 puede hacerse básico porque $s_1 = 0$.

Básica	x_1	x_2	λ_1	μ_1	μ_2	R_1	R_2	s_1	Solución
r	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
λ_1	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	1
x_2	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$

La última tabla da la solución factible óptima ($x_1^* = \frac{1}{3}, x_2^* = \frac{5}{6}$). El valor óptimo asociado de $z = 4.16$.

Momento de Solver

La plantilla de Solver, *excelQP.xls*, resuelve el ejemplo 21.2-3. Los datos se ingresan de una manera similar a la programación lineal (vea la sección 2.3.1). La diferencia principal radica en la forma de ingresar las funciones no lineales. Específicamente, la función objetivo no lineal se ingresa en la celda destino D5 como

```
=4*B10+6*C10-2*B10^2-2*B10*C10-2*C10^2
```

Las celdas que cambian son B10:C10[$\equiv (x_1, x_2)$]. Observe que las celdas B5:C5 no se utilizan para nada en el modelo. Por legibilidad, ingresamos el símbolo NL para indicar que la restricción asociada es no lineal. También podemos especificar la no negatividad de las variables o en el cuadro de diálogo Options o agregando restricciones explícitas de no negatividad.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2B

*__1.__ Considere el problema

$$\text{Maximizar } z = 6x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Demuestre que z es estrictamente cóncava, y luego resuelva el problema utilizando el algoritmo de programación cuadrática.

*__2.__ Considere el problema:

$$\text{Minimizar } z = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_1 - 3x_2 - 5x_3$$

sujeto a

$$x_1 + \quad x_2 + x_3 \geq 1$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Demuestre que z es estrictamente convexa, y luego resuélvala con el algoritmo de programación cuadrática.

21.2.3 Programación estocástica

La programación estocástica maneja situaciones en las que los parámetros de las restricciones son variables aleatorias y las restricciones se llevan a cabo con una probabilidad mínima. Matemáticamente, el problema se define como

$$\text{Maximizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

sujeto a

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i\right\} \geq 1 - \alpha_i, i = 1, 2, \ldots, m, x_j \geq 0, \text{ para todas las } j$$

Los parámetros a_{ij} y b_i son variables aleatorias, y la restricción i se lleva a cabo con una probabilidad mínima de $1 - \alpha_i, 0 < \alpha_i < 1$.

Se consideran tres casos:

1. Sólo a_{ij} es aleatoria para todas las i y j.
2. Sólo b_i es aleatoria para todas las i.
3. Tanto a_{ij} como b_i son aleatorias para todas las i y j.

En los tres casos se supone que los parámetros están normalmente distribuidos con medias y varianzas conocidas.

Caso 1. Cada a_{ij} está normalmente distribuida con media $E\{a_{ij}\}$, varianza var$\{a_{ij}\}$ y cov$\{a_{ij}, a_{i'j'}\}$ de a_{ij} y $a_{i'j'}$.

Considere

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i\right\} \geq 1 - \alpha_i$$

Defina

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

La variable aleatoria h_i está normalmente distribuida con

$$E\{h_i\} = \sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\}x_j$$

$$\text{var}\{h_i\} = \mathbf{X}^T\mathbf{D}_i\mathbf{X}$$

donde

$$\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

$$\mathbf{D}_i = \text{Matriz de covarianza } i = \text{ésima}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{var}\{a_{i1}\} & \ldots & \text{cov}\{a_{i1}, a_{in}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}\{a_{in}, a_{i1}\} & \ldots & \text{var}\{a_{in}\} \end{pmatrix}$$

Ahora

$$P\{h_i \leq b_i\} = P\left\{\frac{h_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}} \leq \frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}}\right\} \geq 1 - \alpha_i$$

Si F es la FDA de la función de distribución normal estándar, se deduce que

$$P\{h_i \leq b_i\} = F\left(\frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}}\right)$$

Sea K_{α_i} el valor normal estándar de modo que

$$F(K_{\alpha_i}) = 1 - \alpha_i$$

Entonces el enunciado $P\{h_i \leq b_i\} \geq 1 - \alpha_i$ se cumple, si, y sólo si,

$$\frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\text{var}\{h_i\}}} \geq K_{\alpha_i}$$

Esta produce la siguiente restricción determinística no lineal:

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha_i}\sqrt{\mathbf{X}^T\mathbf{D}_i\mathbf{X}} \leq b_i$$

Para el caso especial en que los parámetros a_{ij} son independientes, $\text{cov}\{a_{ij}, a_{i'j'}\} = 0$, y la última restricción se reduce a

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \text{var}\{a_{ij}\}x_j^2} \leq b_i$$

Esta restricción puede ponerse en la forma de programación lineal separable (sección 21.2.1) mediante la sustitución

$$y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \text{var}\{a_{ij}\}x_j^2}, \text{ para todas las } i$$

Por lo tanto, la restricción original es equivalente a

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\}x_j + K_{\alpha_i}y_i \leq b_i$$

y

$$\sum_{j=1}^{n} \text{var}\{a_{ij}\}x_j^2 - y_i^2 = 0$$

Caso 2. Sólo b_i es normal con media $E\{b_i\}$ y varianza $\text{var}\{b_i\}$.
Considere la restricción estocástica

$$P\left\{b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right\} \geq \alpha_i$$

Como en el caso 1,

$$P\left\{\frac{b_i - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}}\right\} \geq \alpha_i$$

Esto puede mantenerse cierto sólo si

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{\text{var}\{b_i\}}} \leq K_{\alpha_i}$$

Por lo tanto, la restricción estocástica es equivalente a la restricción lineal determinística

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq E\{b_i\} + K_{\alpha_i}\sqrt{\text{var}\{b_i\}}$$

Caso 3. Todas las a_{ij} y b_i son variables normales aleatorias.
Considere la restricción

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$$

Ésta puede escribirse

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \leq 0$$

Debido a que todas las a_{ij} y b_i son normales, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$ también es normal. Esto demuestra que la estocástica se reduce a la situación del caso 1 y se trata de una manera similar.

Ejemplo 21.2-4

Considere el problema de estocástica

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$P\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq 8\} \geq .95$$
$$P\{5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq b_2\} \geq .10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Suponga que los parámetros $a_{1jj}, j = 1,2,3$, son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con las siguientes medias y varianzas:

$$E\{a_{11}\} = 1, E\{a_{12}\} = 3, E\{a_{13}\} = 9$$
$$\text{var}\{a_{11}\} = 25, \text{var}\{a_{12}\} = 16, \text{var}\{a_{13}\} = 4$$

El parámetro b_2 está normalmente distribuido con media 7 y varianza 9.

De las tablas normales estándar en el apéndice B (o *excelStatTables.xls*),

$$K_{\alpha_1} = K_{.05} \approx 1.645, \quad K_{\alpha_2} = K_{.10} \approx 1.285$$

Para la primera restricción, la restricción determinística equivalente es

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1.645\sqrt{25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2} \leq 8$$

y para la segunda restricción

$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 7 + 1.285(3) = 10.855$$

El problema resultante puede resolverse como un programa no lineal (utilizando AMPL o Solver), o convertirse en un programa separable como sigue:

$$y^2 = 25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2$$

El problema se vuelve

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

sujeto a

$$x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 1.645y \leq 8$$
$$25x_1^2 + 16x_2^2 + 4x_3^2 - y^2 = 0$$
$$5x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 10.855$$
$$x_1, x_2, x_3, y \geq 0$$

El problema puede resolverse mediante programación separable. Incluso, puede utilizarse el archivo *excelCCP.xls* para resolver el problema no lineal de forma directa.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2C

*__1.__ Convierta el siguiente problema estocástico en un modelo determinístico equivalente

$$\text{Maximizar } z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

sujeto a

$$P\{a_1x_1 + 3x_2 + a_3x_3 \leq 10\} \geq 0.9$$
$$P\{7x_1 + 5x_2 + x_3 \leq b_2\} \geq 0.1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Suponga que a_1 y a_3 son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con medias $E\{a_1\} = 2$ y $E\{a_3\} = 5$ y varianzas $\text{var}\{a_1\} = 9$ y $\text{var}\{a_3\} = 16$, y b_2 está normalmente distribuida con media 15 y varianza 25.

2. Considere el siguiente modelo de programación estocástica:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2^2 + x_3$$

sujeto a

$$P\{x_1^2 + a_2x_2^3 + a_3\sqrt{x_3} \leq 10\} \geq 0.9$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Los parámetros a_2 y a_3 son variables aleatorias independientes y normalmente distribuidas con medias de 5 y 2, y varianza de 16 y 25, respectivamente. Convierta el problema en una forma de programación de programación separable (determinística).

21.2.4 Método de combinaciones lineales

Este método tiene que ver con el siguiente problema en el cual todas las restricciones son lineales:

$$\text{Maximizar } z = f(\mathbf{X})$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

El procedimiento se basa en el método del ascenso más pronunciado (gradiente) (sección 21.1.2). Sin embargo, la dirección especificada por el vector gradiente puede no dar una solución factible para el problema restringido. Además, el vector gradiente no necesariamente será nulo en el punto óptimo (restringido). Por tanto el método del ascenso más pronunciado debe modificarse para manejar el caso restringido.

Sea $\mathbf{X}_k$ el punto de prueba *factible* en la iteración k. La función objetivo $f(\mathbf{X})$ puede ampliarse en la proximidad de $\mathbf{X}_k$, mediante la serie de Taylor. Esto da

$$f(\mathbf{X}) \approx f(\mathbf{X}_k) + \nabla f(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k) = (f(\mathbf{X}_k) - \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}_k) + \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}$$

El procedimiento requiere determinar un punto factible $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ de modo que $f(\mathbf{X})$ se maximice sujeta a la restricciones (lineales) del problema. Debido a que $f(\mathbf{X}_k) - \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}_k$ es una constante, el problema $\mathbf{X}^*$ se reduce a resolver el siguiente programa lineal:

$$\text{Maximizar } w_k(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}_k)\mathbf{X}$$

sujeto a

$$\mathbf{AX} \leq \mathbf{b}, \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

Dado que w_k se construye a partir del gradiente de $f(\mathbf{X})$ en $\mathbf{X}_k$, se puede tener una mejor solución si y sólo si $w_k(\mathbf{X}^*) > w_k(\mathbf{X}_k)$. De acuerdo con la expansión de Taylor, la condición no garantiza que $f(\mathbf{X}^*) > f(\mathbf{X}_k)$ a menos que $\mathbf{X}^*$ se encuentre vecina a $\mathbf{X}_k$. Sin embargo, dado que $w_k(\mathbf{X}^*) > w_k(\mathbf{X}_k)$, debe existir un punto $\mathbf{X}_{k+1}$ en el segmento de línea $(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}^*)$ de modo que $f(\mathbf{X}_{k+1}) > f(\mathbf{X}_k)$. El objetivo es determinar $\mathbf{X}_{k+1}$. Defina

$$\mathbf{X}_{k+1} = (1 - r)\mathbf{X}_k + r\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^k + r(\mathbf{X}^* - \mathbf{X}_k), 0 < r \leq 1$$

Esto significa que $\mathbf{X}_{k+1}$ es una **combinación lineal** de $\mathbf{X}_k$ y $\mathbf{X}^*$. Debido que $\mathbf{X}_k$ y $\mathbf{X}^*$ son dos puntos factibles en un espacio de soluciones convexo, $\mathbf{X}_{k+1}$ también es factible. En términos del método del ascenso más pronunciado (sección 21.1.2), el parámetro r representa el tamaño del paso.

El punto $\mathbf{X}_{k+1}$ se determina de modo que $f(\mathbf{X})$ se maximice. Debido a que $\mathbf{X}_{k+1}$ es una función sólo de r, $\mathbf{X}_{k+1}$ se determina maximizando

$$h(r) = f(\mathbf{X}_k + r(\mathbf{X}^* - \mathbf{X}_k))$$

El procedimiento se repite hasta que, en la iteración k-ésima, se tenga $w_k(\mathbf{X}^*) \leq w_k(\mathbf{X}_k)$. En este punto ya son posibles más mejoras y el proceso termina con $\mathbf{X}_k$ como el mejor punto de solución.

Los problemas de programación lineal generados en las iteraciones sucesivas difieren sólo en los coeficientes de la función objetivo. Por tanto los procedimientos de análisis postóptimo presentados en la sección 4.5 pueden utilizarse para realizar cálculos de forma eficiente.

Ejemplo 21.2-5

Considere la programación cuadrática del ejemplo 21.2-3.

$$\text{Maximizar } f(\mathbf{X}) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$

sujeto a

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Sea $\mathbf{X}_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, el punto inicial, el cual es factible. Ahora

$$\nabla f(\mathbf{X}) = (4 - 4x_1 - 2x_2, 6 - 2x_1 - 4x_2)$$

Iteración 1

$$\nabla f(\mathbf{X}_0) = (1, 3)$$

El programa lineal asociado maximiza $w_i = x_1 + 3x_2$ sujeta a las restricciones del problema original. Esto da la solución óptima $\mathbf{X}^* = (0,1)$. Los valores de w_1 en $\mathbf{X}_0$ y $\mathbf{X}^*$ son iguales a 2 y 3, respectivamente. Por consiguiente, un nuevo punto de prueba se determina como

$$\mathbf{X}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + r\left[(0, 1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] = \left(\frac{1 - r}{2}, \frac{1 + r}{2}\right)$$

La maximización de

$$h(r) = f\left(\frac{1-r}{2}, \frac{1+r}{2}\right)$$

produce $r_1 = 1$. Por lo tanto $\mathbf{X}_1 = (0,1)$ con $f(\mathbf{X}_1) = 4$.

Iteración 2

$$\nabla f(\mathbf{X}_1) = (2, 2)$$

La función objetivo correspondiente es $w_2 = 2x_1 + 2x_2$. La solución óptima de este problema produce $\mathbf{X}^* = (2,0)$. Debido a que los valores de w_2 en $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}^*$ son 2 y 4, respectivamente, se puede determinar un nuevo punto de prueba. Entonces

$$\mathbf{X}_2 = (0, 1) + r[(2, 0) - (0, 1)] = (2r, 1 - r)$$

La maximización de

$$h(r) = f(2r, 1 - r).$$

produce $r_2 = \frac{1}{6}$. Por lo tanto $\mathbf{X}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$ con $f(\mathbf{X}_2) \approx 4.16$.

Iteración 3

$$\nabla f(\mathbf{X}_2) = (1, 2)$$

La función objetivo correspondiente es $w_3 = x_1 + 2x_2$. La solución óptima de este problema produce las soluciones alternativas $\mathbf{X}^* = (0,1)$ y $\mathbf{X}^* = (2,0)$. El valor de w_3 para ambos puntos es igual a su valor en $\mathbf{X}_2$. En consecuencia no son posibles más mejoras. La solución óptima *aproximada* es $\mathbf{X}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$ con $f(\mathbf{X}_2) \approx 4.16$. Da la casualidad de que ésta es la solución óptima exacta.

CONJUNTO DE PROBLEMAS 21.2D

1. Resuelva el siguiente problema mediante el método de combinaciones lineales.

$$\text{Minimizar } f(\mathbf{X}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$$

sujeto a

$$3x_1 + x_2 \leq 3$$
$$5x_1 - 3x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

21.2.5 Algoritmo SUMT

En esta sección se presenta un método de gradiente más general. Se supone que la función objetivo $f(\mathbf{X})$ es cóncava y cada función de restricción $g_i(\mathbf{X})$ es convexa. Más aún, el espacio de soluciones debe tener un interior. Esto descarta el uso tanto implícito como explícito de las restricciones de *igualdad*.

El algoritmo SUMT (Técnica de Maximización Secuencial No restringida, por sus siglas en inglés) se basa en la transformación del problema restringido a un problema *no* restringido equivalente. El procedimiento es más o menos semejante al método de multiplicadores de Lagrange. El problema transformado se puede resolver entonces siguiendo el método del ascenso más pronunciado (sección 21.1.2).

Para aclarar este concepto consideremos la nueva función

$$p(\mathbf{X},t) = f(\mathbf{X}) + t\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(\mathbf{X})} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\right)$$

donde t es un parámetro no negativo. El segundo signo de suma tiene en cuenta las restricciones de no negatividad, las cuales deben ponerse en la forma $-x_j \leq 0$ para que sean consistentes con las restricciones originales. Debido a que $g_i(\mathbf{X})$ es convexa, $\frac{1}{g_i(\mathbf{X})}$ es cóncava. Esto significa que $p(\mathbf{X}, t)$ es cóncava en $\mathbf{X}$. Por consiguiente, $p(\mathbf{X},t)$ posee un máximo único. La optimización del problema restringido original es equivalente a la optimización de $p(\mathbf{X},t)$.

El algoritmo se inicia seleccionando arbitrariamente un valor *no negativo* inicial para t. Se selecciona un punto inicial $\mathbf{X}_0$ como la primera solución de prueba. Este punto debe ser un punto interior; es decir, no debe quedar en los límites del espacio de soluciones. Dado el valor de t, se utiliza el método del ascenso más pronunciado para determinar la solución óptima correspondiente (máxima) de $p(\mathbf{X},t)$.

El nuevo punto de solución siempre será un punto interior, porque si el punto de solución está cerca de los límites, al menos una de las funciones $\frac{1}{g_i(\mathbf{X})}$ o $-\frac{1}{x_i}$ adquirirá un valor negativo muy grande. Debido a que el objetivo es maximizar $p(\mathbf{X},t)$, tales puntos de solución se descartan de forma automática. El resultado principal es que los puntos de solución sucesivos siempre serán puntos interiores. Por consiguiente, el problema siempre puede tratarse como un caso no restringido.

Una vez que se obtiene la solución óptima correspondiente a un valor dado de t, se genera un nuevo valor de t, y el proceso de optimización (con el método del ascenso más pronunciado) se repite. Si t' es el valor actual de t, el siguiente valor, t'', debe seleccionarse de modo que $0 < t'' < t'$.

El algoritmo SUMT termina cuando, con dos valores sucesivos de t, los valores *óptimos* correspondientes de $\mathbf{X}$ obtenidos maximizando $p(\mathbf{X},t)$ son aproximadamente los mismos. En este punto, más pruebas producirán poca mejora.

La implementación real de SUMT implica más detalles de los que aquí se presentaron. Específicamente, la selección de un valor inicial de t es un factor importante que puede afectar la velocidad de convergencia. Además, la determinación de un punto interior inicial puede requerir técnicas especiales. Estos detalles se hallan en Fiacco y McCormick (1968).

BIBLIOGRAFÍA

Bazaraa, M., H. Sherall, y C. Shetty, *Nonlinear Programming*, *Theory and Algorithms*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 1993.

Beightler, C., D. Phillips, y D. Wilde, *Foundations of Optimization*, 2a. ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1979.

Fiacco, A., y G. McCormick, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques,* Wiley, Nueva York, 1968.

Fletcher, *R.*, *Practical Methods of Optimization*, 2a. ed., Wiley, Nueva York, 2000.

Luenberger, D., *Linear and Nonlinear Programming*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2003.

Rardin, D., *Optimization in Operations Research*, Prentice Hall, NJ, 1998.

APÉNDICE A

Tablas estadísticas[1]

TABLA A.1 Función de distribución normal

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\left(\frac{1}{2}\right)t^2} dt$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

[1] La hoja de cálculo *excelStatTable.xls* reemplaza a las tablas estadísticas (impresas) de 12 distribuciones comunes, incluidas las presentadas en este apéndice.

TABLA A.1 Continuación

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998									
4.0	0.99997									
5.0	0.9999997									
6.0	0.999999999									

Fuente: Miller, I., y J. Freund, *Probability and Statistics for Engineers*, Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ, 1985.

TABLA A.2 Valores de $t_{\alpha,v}$ (t estudiantil)

v	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	v
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20

TABLA A.2 Continuación

v	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	v
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
Inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

Fuente: Compendiada con el permiso de Macmillan Publishing Co. Inc., de *Statistical Methods for Research Workers*, 14a. ed. de R.A. Fisher. Derechos reservados © 1970 Universidad de Adelaida.

TABLA A.3 Valores de $\chi^2_{a,v}$ (Valores de ji cuadrada)

v	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.975$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	v
1	0.0000393	0.000157	0.000982	0.00393	3.841	5.024	6.635	7.879	1
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.056	16.750	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548	6
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955	8
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	11
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	12
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819	13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319	14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801	15
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267	16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156	18
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	20
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401	21
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796	22
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181	23
24	9.886	10.856	12.401	13.484	36.415	39.364	42.980	45.558	24
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928	25
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290	26
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645	27
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993	28
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.772	49.588	52.336	29
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672	30

Fuente: La tabla está basada en la tabla 8 de *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1, con permiso de los fiduciarios de Biometrika.

APÉNDICE B

Respuestas parciales a problemas seleccionados[1]

CAPÍTULO 1

Conjunto 1.2a

4. (c) 17 minutos

5. (a) Alternativas de Jim: Lanzar una curva o una bola rápida.
Alternativas de Joe: Prepararse para lanzar una curva o una bola rápida.
(b) Joe desea incrementar su promedio de bateo.
Jim desea reducir el promedio de bateo de Joe.

CAPÍTULO 2

Conjunto 2.1a

1. (a) $-x_1 + x_2 \geq 1$
(c) $x_1 - x_2 \leq 0$
(e) $.5x_1 - .5x_2 \geq 0$

3. $M1$ no utilizada = 4 toneladas/día

Conjunto 2.2a

1. (a y e) Vea la figura B1.

2. (a y d) Vea la figura B2.

---

[1]Los problemas resueltos en este apéndice aparecen en el texto marcados con un asterisco (*).

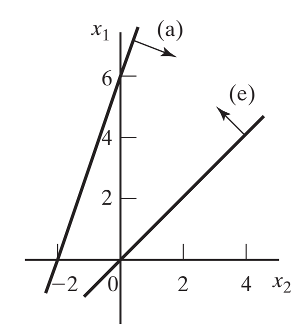


FIGURA B.1

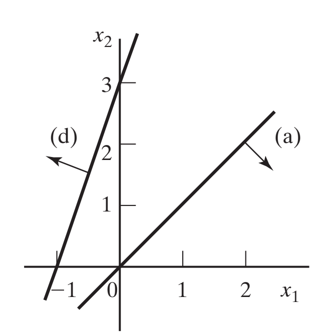


FIGURA B.2

5. Sean

x_1 = Cantidad de unidades de A

x_2 = Cantidad de unidades de B

Maximizar $z = 20x_1 + 50x_2$ sujeto a M

$$-.2x_1 + .8x_2 \leq 0, 2x_1 + 4x_2 \leq 240$$

$$x_1 \leq 100, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1,x_2) = (80, 20)$, $z = \$2{,}600$

7. Sean

x_1 = Dólares invertidos en A

x_2 = Dólares invertidos en B

Maximizar $z = .05x_1 + .08x_2$ sujeto a

$$.75x_1 - .25x_2 \geq 0, .5x_1 - .5x_2 \geq 0,$$

$$x_1 - .5x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 5000, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1,x_2) = (2500, 2500)$ $z = \$325$

14. Sean

x_1 = Toneladas de $C1$ por hora

x_2 = Toneladas de $C2$ por hora

Maximizar $z = 12000x_1 + 9000x_2$ sujeto a

$$-200x_1 + 100x_2 \leq 0, 2.1x_1 + .9x_2 \leq 20, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1,x_2) = (5.13, 10.26)$, $z = 153.846$ lb

(a) Relación óptima de $C1$:$C2$ = .5

(b) La relación óptima es la misma, pero la generación de vapor se incrementará en 7692 lb/h.

18. Sean

x_1 = Cantidad de unidades de HiFi1

x_2 = Cantidad de unidades de HiFi2

Minimizar $z = 1267.2 - (15x_1 + 15x_2)$ sujeto a

$$6x_1 + 4x_2 \leq 432, 5x_1 + 5x_2 \leq 412.8$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 422.4, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $(x_1, x_2) = (50.88, 31.68), z = 28.8$ min ociosos.

Conjunto 2.2b

1. (a) Vea la figura B.3

5. Sean

x_1 = Miles de barriles/día de Irán

x_2 = Miles de barriles/día de Dubai

Minimizar $z = x_1 + x_2$ sujeto a

$$-.6x_1 + .4x_2 \leq 0, .2x_1 + .1x_2 \geq 14$$

$$.25x_1 + .6x_2 \geq 30, .1x_1 + .15x_2 \geq 10$$

$$.15x_1 + .1x_2 \geq 8, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $x_1 = 55, x_2 = 30, z = 85$

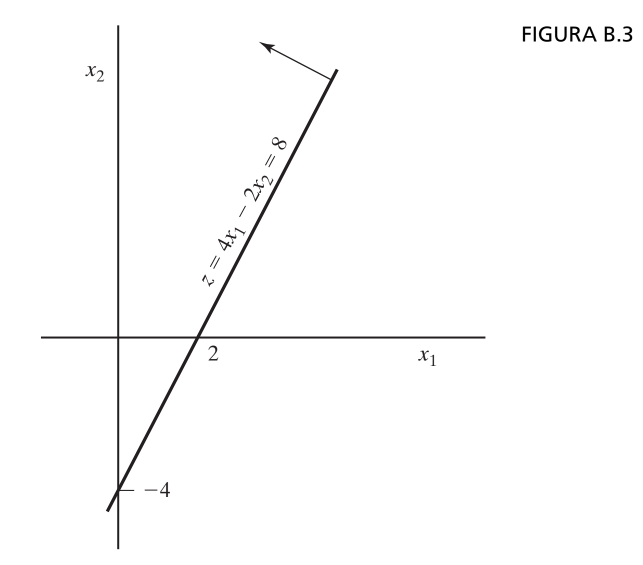


FIGURA B.3

7. Sean

x_1 = Relación de la aleación A de desecho

x_2 = Relación de la aleación B de desecho

Minimizar $z = 100x_1 + 80x_2$ sujeto a

$$.03 \leq .06x_1 + .03x_2 \leq .06, .03 \leq .03x_1 + .06x_2 \leq .05$$

$$.03 \leq .04x_1 + .03x_2 \leq .07, x_1 + x_2 = 1, x_1, x_2 \geq 0$$

Óptima: $x_1 = .33, x_2 = .67, z = \$86.667$

Conjunto 2.4a

2. Sean

x_i = Dólares invertidos en el proyecto $i, i = 1, 2, 3, 4$

y_j = Dólares invertidos en el banco en el año $j, j = 1, 2, 3, 4$

Maximizar $z = y_5$ sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_4 + y_1 \leq 10,000$$

$$.5x_1 + .6x_2 - x_3 + .4x_4 + 1.065y_1 - y_2 = 0$$

$$.3x_1 + .2x_2 + .8x_3 + .6x_4 + 1.065y_2 - y_3 = 0$$

$$1.8x_1 + 1.5x_2 + 1.9x_3 + 1.8x_4 + 1.065y_3 - y_4 = 0$$

$$1.2x_1 + 1.3x_2 + .8x_3 + .95x_4 + 1.065y_4 - y_5 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

Solución óptima:

$$x_1 = 0, x_2 = \$10,000, x_3 = \$6000, x_4 = 0$$

$$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = \$6800, y_4 = \$33,642$$

$$z = \$53,628.73 \text{ al inicio del año 5}$$

5. Sean x_{iA} = cantidad invertida en el año i con el plan $A, i = 1,2,3$
x_{iB} = cantidad invertida en el año i con el plan $B, i = 1,2,3$

Maximizar $z = 3x_{2B} + 1.7x_{3A}$ sujeto a

$$x_{1A} + x_{1B} \leq 100 \text{ (al inicio del año 1)}$$

$$-1.7x_{1A} + x_{2A} + x_{2B} = 0 \quad \text{(al inicio del año 2)}$$

$$-3x_{1B} - 1.7x_{2A} + x_{3A} = 0 \quad \text{(al inicio del año 3)}$$

$$x_{iA}, x_{iB} \geq 0, i = 1, 2, 3$$

Solución óptima: Invertir \$100,000 en el plan A en el año 1 y \$170,000 en el plan B en el año 2. El problema tiene dos soluciones óptimas alternativas.

Conjunto 2.4b

3. Sea x_j = cantidad de unidades del producto $j, j = 1, 2, 3$

Maximizar $z = 30x_1 + 20x_2 + 50x_3$ sujeto a

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 4000$$
$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 6000$$
$$x_1 + .5x_2 + .33x_3 \leq 1500$$
$$2x_1 - 3x_2 = 0$$
$$5x_2 - 2x_3 = 0$$
$$x_1 \geq 200, x_2 \geq 200, x_3 \geq 150$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solución óptima: $x_1 = 324.32, x_2 = 216.22, x_3 = 540.54, z = \$41{,}081.08$

7. Sean x_{ij} = Cantidad producida por la operación i en el mes $j, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$

I_{ij} = Inventario de *entrada* de la operación i en el mes $j, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$

Minimizar $z = \sum_{j=1}^{3}(c_{1j}x_{1j} + c_{2j}x_{2j} + .2I_{1j} + .4I_{2j})$ sujeto a

$$.6x_{11} \leq 800, .6x_{12} \leq 700, .6x_{13} \leq 550$$
$$.8x_{21} \leq 1000, .8x_{22} \leq 850, .8x_{23} \leq 700$$
$$x_{1j} + I_{1,j-1} = x_{2j} + I_{1j}, x_{2j} + I_{2,j-1} = d_j + I_{2j}, j = 1, 2, 3$$
$$I_{1,0} = I_{2,0} = 0, \text{todas las variables} \geq 0$$
$$d_j = 500, 450, 600 \text{ para } j = 1, 2, 3$$
$$c_{1j} = 10, 12, 11 \text{ para } j = 1, 2, 3$$
$$c_{2j} = 15, 18, 16 \text{ para } j = 1, 2, 3$$

Óptima: $x_{11} = 1333.33$ unidades, $x_{13} = 216.67, x_{21} = 1250$ unidades, $x_{23} = 300$ unidades, $z = \$39.720$.

Conjunto 2.4c

1. Sea $x_i(y_i)$ = Cantidad de autobuses en turnos de 8 horas (12 horas) que inician en el periodo i.

Minimizar $z = 2\sum_{i=1}^{6}x_i + 3.5\sum_{i=1}^{6}y_i$ sujeto a

$$x_1 + x_6 + y_1 + y_5 + y_6 \geq 4, x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + y_6 \geq 8,$$
$$x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 \geq 10, x_3 + x_4 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 7,$$
$$x_4 + x_5 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 12, x_5 + x_6 + y_4 + y_5 + y_6 \geq 4$$

Todas las variables son no negativas

Solución $x_1 = 4, x_2 = 4, x_4 = 2, x_5 = 4, y_3 = 6$, todas las demás = 0. $z = 49$. Total de autobuses = 20. En el caso del turno de 8 horas, cantidad de autobuses = 26 y comparable $z = 2 \times 26 = 52$. Por lo tanto, el turno de (8 horas + 12 horas) es mejor.

5. Sea x_i = *Cantidad* de estudiantes que inician en el periodo i ($i = 1$ a las 8:01 A.M., $i = 9$ a las 4:01 P.M.)

Minimizar $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$ sujeto a

$$x_1 \geq 2, x_1 + x_2 \geq 2, x_1 + x_2 + x_3 \geq 3,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 \geq 4, x_3 + x_4 \geq 4, x_4 + x_6 \geq 3,$$
$$x_6 + x_7 \geq 3, x_6 + x_7 + x_8 \geq 3, x_7 + x_8 + x_9 \geq 3$$
$$x_5 = 0, \text{todas las demás variables son no negativas}$$

Solución: Contratar 2 para la 8:01, 1 para las 10:01, 3 para las 11:01, y 3 para las 2:01. Total = 9 estudiantes

Conjunto 2.4d

3. Sean

x_{ij} = Parte del proyecto i que se completa en el año j

Maximizar $z = .05(4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13}) + .07(3x_{22} + 2x_{23} + x_{24}) + .15(4x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + x_{34}) + .02(2x_{43} + x_{44})$

sujeto a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1, x_{43} + x_{44} + x_{25} = 1$$
$$.25 \leq x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 1$$
$$.25 \leq x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 1$$
$$5x_{11} + 15x_{31} \leq 3, 5x_{12} + 8x_{22} + 15x_{32} \leq 6$$
$$5x_{13} + 8x_{23} + 15x_{33} + 1.2x_{43} \leq 7$$
$$8x_{24} + 15x_{34} + 1.2x_{44} \leq 7, 8x_{25} + 15x_{35} \leq 7$$
$$\text{toda } x_{ij} \geq 0$$

Óptima: $x_{11} = .6, x_{12} = .4, x_{24} = .255, x_{25} = .025, x_{32} = .267,$
$x_{33} = .387, x_{34} = .346, x_{43} = 1, z = \$523, 750$

Conjunto 2.4e

2. Sea x_s = lb de tornillos/paquete, x_b = libras de pernos/paquete, x_n = lb de tuercas/paquete, x_w = *lb* de rondanas/paquete

Minimizar $z = 1.1x_s + 1.5x_b + \left(\frac{70}{80}\right)x_n + \left(\frac{20}{30}\right)x_w$ sujeto a

$$y = x_s + x_b + x_n + x_w$$
$$y \geq 1, x_s \geq .1y, x_b \geq .25y, x_n \leq .15y, x_w \leq .1y$$
$$\left(\frac{1}{10}\right)x_b \leq x_n, \left(\frac{1}{50}\right)x_b \leq x_w$$

Todas las variables son no negativas

Solución $z = \$1.12, y = 1, x_s = .5, x_b = .25, x_n = .15, x_w = .1$.

5. Sea $x_A = A$ barriles de crudo/día, $x_B = B$ barriles de crudo/día, x_r = barriles de gasolina regular/día, x_p = barriles de gasolina premium/día, x_j = barriles de gasolina para avión/día.

Maximizar $z = 50(x_r - s_r^+) + 70(x_p - s_p^+) + 120(x_j - s_j^+)$

$- (10s_r^- + 15s_p^- + 20s_j^- + 2s_r^+ + 3s_p^+ + 4s_j^+)$

$- (30x_A + 40x_B)$ sujeto a

$$x_A \leq 2500,\ x_B \leq 3000,\ x_r = .2x_A + .25x_B,\ x_p = .1x_A + .3x_B,\ x_j = .25x_A + .1x_B$$

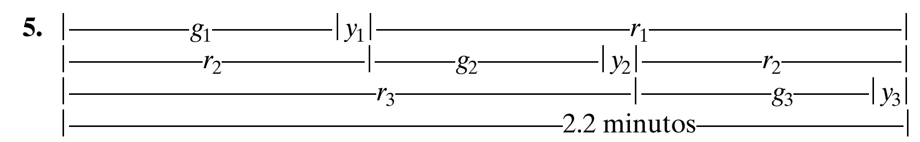
$$x_r + s_r^- - s_r^+ = 500,\ x_p + s_p^- - s_p^+ = 700,\ x_j + s_j^- - s_j^+ = 400, \text{ Todas las variables } \geq 0$$

Solución: $z = \$21,852.94$, $x_A = 1176.47$ barriles/día, $x_B = 1058.82$, $x_r = 500$ barriles/día

$x_p = 435.29$ barriles/día, $x_j = 400$ barriles/día, $s_p^- = 264.71$

Conjunto 2.4f

5.



Sean g_i, y_i y r_i las duraciones de las luces verde, amarilla y roja para los autos que se salen de la carretera i. Todas las unidades están en segundos. Los autos no avanzan con la luz amarilla.

maximizar $z = 3(500/3600)g_1 + 4(600/3600)g_2 + 5(400/3600)g_3$ sujeto a

$$(500/3600)g_1 + (600/3600)g_2 + (400/3600)g_3 \leq (510/3600)(2.2 \times 60 - 3 \times 10)$$

$$g_1 + g_2 + g_3 + 3 \times 10 \leq 2.2 \times 60,\ g_1 \geq 25,\ g_2 \geq 25,\ g_3 \geq 25$$

Solución: $g_1 = 25$ seg, $g_2 = 43.6$ seg, $g_3 = 33.4$ seg. Ingreso de la caseta de cobro $= \$58.04$/hr

CAPÍTULO 3

Conjunto 3.1a

1. 2 toneladas/día y 1 tonelada/día de las materias primas $M1$ y $M2$, respectivamente.

4. Sea x_{ij} = unidades del producto i producido en la máquina j.

Maximizar $z = 10(x_1 + x_{12}) + 15(x_{21} + x_{22})$ sujeto a

$$x_{11} + x_{21} - x_{12} - x_{22} + s_1 = 5$$

$$-x_{11} - x_{21} + x_{12} + x_{22} + s_2 = 5$$

$$x_{11} + x_{21} + s_3 = 200$$

$$x_{12} + x_{22} + s_4 = 250$$

$$s_i, x_{ij} \geq 0, \text{ con todas las } i \text{ y } j$$

Conjunto 3.1b

3. Sea x_j = unidades de producto $j, j = 1, 2, 3$
Maximizar $z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 15x_4^+ - 10x_5^+$
sujeto a

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^- - x_4^+ = 80$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5^- - x_5^+ = 65$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4^-, x_4^+, x_5^-, x_5^+ \geq 0$$

Solución óptima: $x_2 = 65$ unidades, $= 15$ unidades, todas las demás $= 0, z = \$325$.

Conjunto 3.2a

1. (c) $x_1 = \frac{6}{7}, x_2 = \frac{12}{7}, z = \frac{48}{7}$.
(e) Los puntos de esquina ($x_1 = 0, x_2 = 3$) y ($x_1 = 6$ y $x_2 = 0$) son no factibles.

3. Las soluciones básicas no factibles son como sigue:

$$(x_1, x_2) = \left(\tfrac{26}{3}, -\tfrac{4}{3}\right), (x_1, x_3) = (8, -2)$$
$$(x_1, x_4) = (6, -4), (x_2, x_3) = (16, -26)$$
$$(x_2, x_4) = (3, -13), (x_3, x_4) = (6, -16)$$

Conjunto 3.3a

3. (a) Sólo (A, B) representan iteraciones simplex sucesivas porque los puntos de esquina A y B son adyacentes. En todos los demás pares, los puntos de esquina asociados son no adyacentes.
(b) (i) Sí, (ii) No, C e I son no adyacentes. (iii). No, la ruta regresa al punto de esquina anterior, A.

5. (a) x_3 entra con el valor 1, $z = 3$ en el punto de esquina D.

Conjunto 3.3b

3.

Nueva variable básica	x_1	x_2	x_3	x_4
Valor	1.5	1	0	.8
Variable de salida	x_7	x_7	x_8	x_4

6. (b) x_2, x_5 y x_6 pueden incrementar el valor de z. Si x_2 entra, x_8 sale y $\Delta z = 5 \times 4 = 20$. Si x_5 entra, x_1 sale y $\Delta z = 0$ porque x_5 es igual a 0 en la nueva solución. Si x_6 entra, ninguna variable sale porque todos los coeficientes de restricción de x_6 son menores que o iguales a cero, $\Delta z = \infty$ porque x_6 puede incrementarse a un valor infinito sin provocar no factibilidad.

9. El segundo mejor valor de $z = 20$ ocurre cuando s_2 se hace básica.

Conjunto 3.4a

3. (a) Minimizar $z = (8M - 4)x_1 + (6M - 1)x_2 - Ms_2 - Ms_3 = 10M$
(b) Minimizar $z = (3M - 4)x_1 + (M - 1)x_2 = 3M$

6. La tabla de inicio es

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	-1	-12	0	0	-8
x_3	1	1	1	0	4
x_4	1	4	0	1	8

Conjunto 3.4b

1. Siempre minimice la suma de las variables artificiales porque la suma representa la cantidad no factible en el problema.

7. Cualquier variable no básica con coeficientes objetivo no cero al final de la Fase I no puede hacerse positiva en la Fase II porque ello significará que el valor objetivo óptimo en la Fase I será positivo, es decir, una solución no factible en la fase I.

Conjunto 3.5a

1. (a) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$.
(b) 1 en A, 1 en B, $C_2^4 = 6$ en C, y 1 en D.

Conjunto 3.5b

1. Solución óptima básica alternativa: $\left(0, 0, \frac{10}{3}\right)$, $(0, 5, 0)$, $\left(1, 4, \frac{1}{3}\right)$. Solución óptima alternativa no básica.
$\left(\alpha_3, 5\alpha_2 + 4\alpha_3, \frac{10}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_3\right), \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, 0 \leq \alpha_i \leq 1, i = 1, 2, 3.$

Conjunto 3.5c

2. (a) El espacio de soluciones no está acotado en la dirección de x_2.
(b) El valor objetivo no está acotado porque cada unidad de incremento en x_2 incrementa z en 10.

Conjunto 3.5d

1. Lo máximo que se puede producir son 275 unidades.

Conjunto 3.6a

2. Sean
x_1 = Cantidad de sombreros tipo 1 por día.
x_2 = Cantidad de sombreros tipo 2 por día.

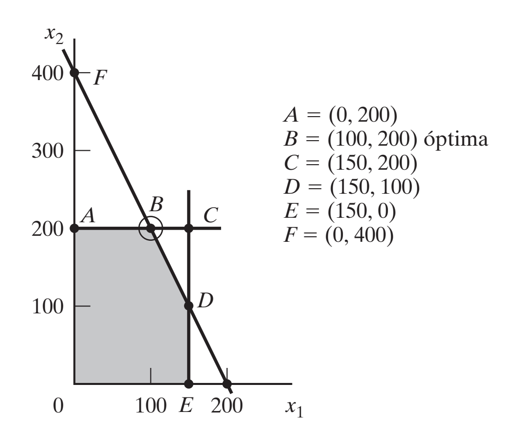


FIGURA B.4

Maximizar $z = 8x_1 + 5x_2$ sujeto a

$$2x_1 + x_2 \leq 400$$
$$x_1 \leq 150, x_2 \leq 200$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(a) Vea la figura B.4: $x_1 = 100, x_2 = 200, z = \$1800$ en el punto B.
(b) $4 por sombrero tipo 2 en el intervalo (200,500).
(c) Ningún cambio porque el precio dual es de $0 por unidad en el intervalo $(100,\infty)$.
(d) $1 por unidad en el intervalo (100, 400). Incremento máximo = 200 de tipo 2.

Conjunto 3.6b

3. (a) $0 \leq \frac{c_1}{c_2} \leq 2$.
(b) Nueva $\frac{c_1}{c_2} = 1$. La solución no cambia.

Conjunto 3.6c

2. (a) Sí, porque el ingreso adicional por min = $1 (hasta por 10 minutos de tiempo extra) excede el costo adicional de $.83/min.
(b) El ingreso adicional es de $2/min (por hasta 400 min de tiempo extra) = $240 por 2 horas. Costo adicional por 2 horas = $110. Ingreso neto = $130.
(c) No, su precio dual es cero porque el recurso ya es abundante.
(d) $D_1 = 10$ min. Precio dual = $1/min para $D_1 \leq 10, x_1 = 0, x_2 = 105, x_3 = 230$, ingreso neto = ($1350 + $1 × 10 min) − ($\frac{\$40}{60}$ × 10 min) = $1353.33.
(e) $D_2 = -15$. Precio dual = $2/min con $D_2 \geq -20$. Reducción del ingreso = $30. Reducción del costo = $7.50. No se recomienda.

6. Sean
x_1 = minutos de radio, x_2 = minutos de TV, x_3 = anuncios en el periódico

Maximizar $z = x_1 + 50x_2 + 10x_3$ sujeto a

$$15x_1 + 300x_2 + 50x_3 + s_1 = 10,000, x_3 - S_2 = 5,$$

$$x_1 + s_3 = 400, \ -x_1 + 2x_2 + s_4 = 0, x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

$$s_1, S_2, s_3, s_4 \geq 0$$

(a) $x_1 = 59.09$ min, $x_2 = 29.55$ min, $x_3 = 5$ anuncios en periódico, $z = 1561.36$.

(b) Con TORA, $z = +.158s_1 + 2.879S_2 + 0s_3 + 1.364s_4 = 156.364$. Los precios duales de las restricciones respectivas son .158, -2.879, 0 y 1.36. El límite inferior impuesto a los anuncios en periódicos puede reducirse porque su precio dual es negativo ($= -2.879$). No hay ninguna ventaja al incrementar el límite superior de los minutos de radio porque su precio dual es cero (el límite actual ya es abundante).

(c) Con TORA, $x_1 = 59.9091 + .00606D_1 \geq 0, x_3 = 5, s_3 = 340.90909 + .00606D_1 \geq 0, x_2 = 29.54545 + .00303D_1 \geq =$. Por lo tanto, el precio dual = .158 en el intervalo $-97.50 \leq D_1 \leq 56{,}250$. Se recomienda un incremento de 50% en el presupuesto ($D_1 = \$5000$) porque el precio dual es positivo.

11. (a) Escaso: Recurso del resistor y capacitor; abundante: recurso del chip.

(b) Los valores por unidad de resistor, capacitor y chips son \$1.25, \$.25 y \$0.

(e) Cambiar $D_3 = 350 - 800 = -450$ queda afuera del intervalo de factibilidad $D_3 \geq -400$. Por consiguiente el problema debe ser resuelto de nuevo.

13. (b) Solución $x_1 = x_2 = 2 + \frac{\Delta}{3}$ es factible para todas las $\Delta > 0$. Para $0 < \Delta \leq 3$, $r_1 + r_2 = \frac{\Delta}{3} \leq 1 \Rightarrow$ factibilidad confirmada. Para $3 \leq \Delta < 6\, r_1 + r_2 = \frac{\Delta}{3} > 1 \Rightarrow$ factibilidad no confirmada. Para $\Delta > 6$, el cambio queda afuera de los intervalos de D_1 y D_2.

Conjunto 3.6d

2. (a) x_1 = latas de A1, x_2 = latas de A_2, x_3 = latas de BK.

Maximizar $z = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3$ sujeto a

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, x_1 \geq 100, 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq 0$$

Óptima: $x_1 = 166.67$, $x_2 = 333.33$, $x_3 = 0$, $z = 36666.67$.

(b) Con TORA, el costo reducido por lata de BK = 10. El precio debe incrementarse más de 10 centavos.

(c) $d_1 = d_2 = d_3 = -5$ centavos. Con TORA, los costos reducidos de las variables no básicas son

$$x_3\text{: } 10 + d_2 - d_3 \geq 0, \text{ satisfecha}$$

$$s_1\text{: } 73.33 + .67d_2 + .33d_1 \geq 0, \text{ satisfecha}$$

$$s_3\text{: } 1.67 - .17d_2 + .17d_1 \geq 0, \text{ satisfecha}$$

La solución no cambia.

5. (a) x_i = unidades de motor $i, i = 1, 2, 3, 4$.

Maximizar $z = 60x_1 + 40x_2 + 25x_3 + 30x_4$, sujeto a

$$8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 8000, x_1 \leq 500, x_2 \leq 500,$$
$$x_3 \leq 800, x_4 \leq 750, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Óptima: $x_1 = 500, x_2 = 500, x_3 = 375, x_4 = 0, z = \$59{,}375$

(b) Con TORA, $8.75 + d_2 \geq 0$. El precio del motor tipo 2 se puede reducir hasta en \$8.75.

(c) $d_1 = -\$15, d_2 = -\$10, d_3 = -\$6.25, d_4 = -\$7.50$. Con TORA,

$$x_4\text{: } 7.5 + 1.5d_3 - d_4 \geq 0, \text{ satisfecha}$$
$$s_1\text{: } 6.25 + .25d_3 \geq 0, \text{ satisfecha}$$
$$s_2\text{: } 10 - 2d_3 + d_1 \geq 0, \text{ satisfecha}$$
$$s_3\text{: } 8.75 - 1.25d_3 + d_2 \geq 0, \text{ satisfecha}$$

La solución no cambia, pero z se reducirá en 25%.

(d) Costo reducido de $x_4 = 7.5$. El precio aumenta más de \$7.50.

Conjunto 3.6e

5. El precio dual para la restricción de inversión $x_{1A} + x_{1B} \leq 100$ es de \$5.10 por dólar invertido para *cualquier* cantidad de inversión.

9. (a) El precio dual de la materia prima A es de \$10.27. El costo de \$12.00 por lb excede el ingreso esperado. Por consiguiente, no se recomienda la compra de materia prima adicional.

(b) El precio dual de la materia prima B es de \$0. El recurso ya es abundante y no se justifica ninguna compra adicional.

CAPÍTULO 4

Conjunto 4.1a

2. Sean y_1, y_2 y y_3 las variables duales.

Maximizar $w = 3y_1 + 5y_2 + 4y_3$ sujeto a

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 15, 2y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 12$$
$$y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \text{ irrestrictas}$$

4. (c) Sean y_1 y y_2 las variables duales.

Minimizar $z = 5y_1 + 6y_2$ sujeto a

$$2y_1 + 3y_2 = 1, y_1 - y_2 = 1$$
$$y_1, y_2 \text{ irrestrictas}$$

5. La restricción dual asociada con las variables artificiales es $y_2 \geq -M$. Matemáticamente, $M \rightarrow \infty \Rightarrow y \geq -\infty$, lo cual equivale a que y_2 no esté restringida.

Conjunto 4.2a

1. (a) $\mathbf{AV}_1$ no está definida

(e) $\mathbf{V}_2\mathbf{A} = (-14 \quad -32)$

Conjunto 4.2b

1. (a) Inversa $= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Conjunto 4.2c

3. Sean y_1 y y_2 las variables duales.
Minimizar $w = 30y_1 + 40y_2$ sujeto a

$$y_1 + y_2 \geq 5, 5y_1 - 5y_2 \geq 2, 2y_1 - 6y_2 \geq 3$$
$$y_1 \geq -M(\Rightarrow y_1 \text{ irrestricta}), y_2 \geq 0$$

Solución: $y_1 = 5, y_2 = 0, w = 150$

6. Sean y_1 y y_2 las variables duales.
Minimizar $w = 3y_1 + 4y_2$ sujeto a

$$y_1 + 2y_2 \geq 1, 2y_1 - y_2 \geq 5, y_1 \geq 3$$
$$y_2 \text{ irrestricta}$$

Solución $y_1 = 3, y_2 = -1, w = 5$

8. (a) $(x_1, x_2) = (3{,}0), z = 15; (y_1{,}y_2) = (3{,}1), w = 14$. Intervalo (14,15)

9. (a) La solución dual no es factible; de ahí que no puede ser óptima aun cuando $z = w = 17$.

Conjunto 4.2d

2. (a) Factibilidad:: $(x_2, x_4) = (3, 15) \Rightarrow$ factible.
Optimalidad: Costos reducidos de $(x_1, x_3) = (0{,}2) \Rightarrow$ óptima.

4.

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solución
z	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{12}{5}$
x_1	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_5	0	0	-1	1	1	0

La solución es óptima y factible.

7. Valor objetivo: A partir de la primal, $z = c_1x_1 + c_2x_2$ y desde la dual $w = b_2y_1 + b_2y_2 + b_3y_3, b_1 = 4, b_2 = 8, c_1 = 2, c_2 = 5 \Rightarrow z = w = 34$.

Conjunto 4.3a

2. (a) Sean (x_1, x_2, x_3, x_4) = unidades diarias SC320, SC325, SC340 y SC370
Maximizar $z = 9.4x_1 + 10.8x_2 + 8.75x_3 + 7.8x_4$ sujeto a

$$10.5x_1 + 9.3x_2 + 11.6x_3 + 8.2x_4 \leq 4800$$

$$20.4x_1 + 24.6x_2 + 17.7x_3 + 26.5x_4 \leq 9600$$

$$3.2x_1 + 2.5x_2 + 3.6x_3 + 5.5x_4 \leq 4700$$

$$5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 4500$$

$$x_1 \geq 100, x_2 \geq 100, x_3 \geq 100, x_4 \geq 100$$

(b) Sólo se puede incrementar la capacidad del estañado porque su precio dual es positivo (= .4944).

(c) Los precios duales correspondientes a las cotas inferiores son ≤ 0 (−.6847, −1.361, 0 y −5.3003), lo que significa que las cotas tienen un efecto adverso en la rentabilidad.

(d) El precio dual del estañado es de $.4944/min válido en el intervalo (8920, 10201.72), el cual corresponde a un incremento máximo de la capacidad de sólo 6.26%.

Conjunto 4.3b

2. El nuevo camión de bomberos es rentable debido a su costo reducido = −2.

3. Las piezas PP3 y PP4 no forman parte de la solución óptima. Los costos reducidos actuales son .1429 y 1.1429. Por consiguiente, la tasa de deterioro del ingreso por unidad es de $.1429 para PP3 y de $1.1429 para PP4.

Conjunto 4.4a

1. (b) No, porque el punto E es factible, y el simplex dual debe permanecer no factible hasta que se alcance el óptimo.

4. (c) Agregue la restricción artificial $x_1 \leq M$. El problema no tiene una solución factible.

Conjunto 4.5a

4. Sea Q la cantidad de alimento semanal en lb (= 5200,9600,15000,20000,26000, 32000,38000,42000, correspondientes a las semanas 1,2,…, y 8). Solución óptima: Piedra caliza (calcio) = .028Q, maíz = .649Q y soya .323Q. Costo =.81221Q.

Conjunto 4.5b

1. (a) La restricción adicional es redundante.

Conjunto 4.5c

2. (a) Nuevos valores duales = $(\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$. La solución actual permanece óptima.

(c) Nuevos valores duales = $\left(-\frac{1}{8}, \frac{11}{4}, 0, 0\right)$. $z - .125s_1 + 2.75s_2 = 13.5$. Nueva solución: $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 4, z = 14$.

Conjunto 4.5d

1. $\frac{p}{100}(y_1 + 3y_2 + y_3) - 3 \geq 0$. Para $y_1 = 1, y_2 = 2$, y $y_3 = 0, p \geq 42.86\%$.

3. (a) Costo reducido de los camiones de bomberos $= 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 - 5 = 2 > 0$. Los camiones de bomberos no son rentables.

CAPÍTULO 5

Conjunto 5.1a

4. Asigne un costo muy alto, M, a la ruta de Detroit al destino ficticio.

6. (a y b) Use $M = 10{,}000$. La solución se muestra en negritas. Costo total = $49,710.

	1	2	3	Oferta
Planta 1	600	700	400 **25**	**25**
Planta 2	320 **23**	300 **17**	350	**40**
Planta 3	500	480 **25**	450 **5**	**30**
Excedente en planta 4	1000 **13**	1000	M	**13**
Demanda	**36**	**42**	**30**	

(c) Costo excedente en la ciudad 1 = $13,000.

9. La solución (en millones de galones) se muestra en negritas. En el área 2 habrá un faltante de 2 millones de galones. Costo total = $304,000.

	A1	A2	A3	Oferta
Refinería 1	12 **4**	18 **2**	M	**6**
Refinería 2	30	10 **4**	8 **1**	**5**
Refinería 3	20	25	12 **6**	**6**
Ficticia	M	50 **2**	50	**2**
Demanda	**4**	**8**	**7**	

Conjunto 5.2a

2. Costo total = \$804. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

		Servicio de afilado			
Día	*Nuevas*	*Durante la noche*	*a 2 días*	*a 3 días*	Desechadas
lunes	24	0	6	18	0
martes	12	12	0	0	0
miércoles	2	14	0	0	0
jueves	0	0	20	0	0
viernes	0	14	0	0	4
sábado	0	2	0	0	12
domingo	0	0	0	0	22

5. Costo total = \$190,040. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

Periodo	Capacidad	Cantidad producida	Entrega
1	500	500	400 para el (periodo) 1 y 100 para el 2
2	600	600	200 para el 2, 220 en el 3 y 180 para el 4
3	200	200	200 para el 3
4	300	200	200 para el 4

Conjunto 5.3a

1. (a) Noroeste: costo = \$42. Costo mínimo = \$37. Vogel: costo = \$37.

Conjunto 5.3b

5. (a) Costo = \$1475. (b) $c_{12} \geq 3, c_{13} \geq 8, c_{23} \geq 13, c_{31} \geq 7$.

Conjunto 5.4a

5. Use el código (ciudad, fecha) para definir las filas y columnas del problema de asignación. Ejemplo: La asignación (D.3)-(A.7) significa salir de Dallas el 3 de enero y regresar de Atlanta el 7 de junio a un costo de \$400. La solución se muestra en negritas. Costo = \$1180. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

	(A, 7)	(A, 12)	(A, 21)	(A, 28)
(D, 3)	400	300	300	**280**
(D, 10)	**300**	400	300	300
(D, 17)	300	**300**	400	300
(D, 25)	300	300	**300**	400

6. Asignación óptima: I-d, II-c, III-a, IV-b.

CAPÍTULO 6

Conjunto 6.1a

1. Para la red (i): (a) 1-3-4-2. (b) 1-5-4-3-1. (c y d) Vea la figura B.5.

5. Nombre los cuadrados en secuencia como A, B,…, H comenzando en el cuadrado superior izquierdo en la primera fila. Cada cuadrado es un nodo con los cuadrados adyacentes conectados por arcos. Cada uno de los nodos D y E tiene el máximo de arcos que emanan y por consiguiente deben ser reemplazados con los dos números que tienen más números no adyacentes, sea saber, los números 1 y 8. Este problema tiene más de una solución. Vea la figura B6.

Conjunto 6.2a

2. (a) 1-2, 2-5, 5-6, 6-4, 4-3. Longitud total = 12 millas.

5. Alta presión: 1-2-3-4-6. Baja presión: 1-5-7 y 5-9-8.

Conjunto 6.3a

1. Compre un auto nuevo en los años 1 y 4. Costo total = \$8900. Vea la figura B.7.

4. Para el arco $(i,v_i) - (i + 1, v_{i+1})$, defina $p(q)$ = valor (número del artículo i). Solución: Seleccione una unidad de cada uno de los artículos 1 y 2. Valor total = \$80. Vea la figura B.8.

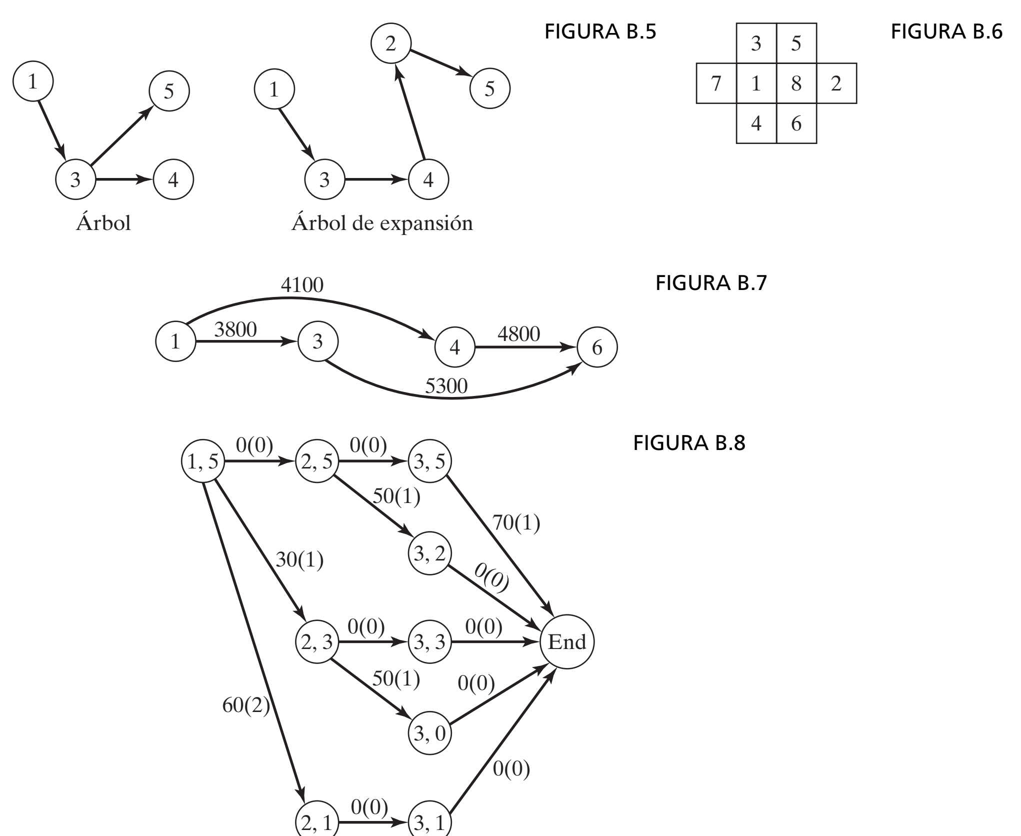


FIGURA B.5

FIGURA B.6

FIGURA B.7

FIGURA B.8

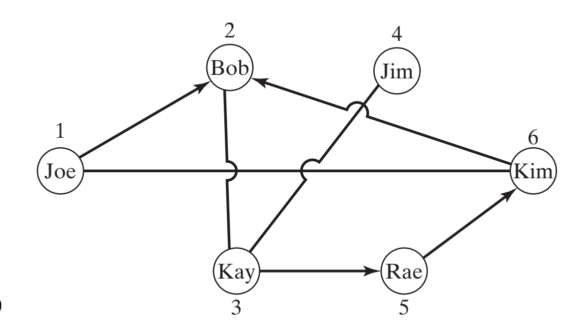


FIGURA B.9

Conjunto 6.3b

1. (c) Elimine todos los nodos excepto 4, 5, 6, 7 y 8. Distancia más corta = 8 asociada con las rutas 4-5-6-8 y 4-6-8.

Conjunto 6.3c

1. (a) 5-4-2-1, distancia = 12.
4. La figura B.9 resume la solución. Cada arco tiene longitud unitaria. Las flechas indican las rutas en una dirección. Solución del ejemplo: Bob a Joe: Bob-Kay-Rae-Kim-Joe. Máximo de contactos = 4.

Conjunto 6.3d

1. (a) El lado derecho de las ecuaciones correspondientes a los nodos 1 y 5 son 1 y −1, respectivamente, todos los demás = 0. Solución óptima: 1-3-5 o 1-3-4-5, distancia = 90.

Conjunto 6.4a

1. Corte 1: 1-2, 1-4, 3-4, 3-5, capacidad = 60.

Conjunto 6.4b

1. (a) Capacidades excedentes: arco (2-3) = 40, arco (2-5) = 10, arco (4-3) = 5.
   (b) Nodo 2: 20 unidades, nodo 3: 30 unidades, nodo 4: 20 unidades.
   (c) No, porque no hay capacidad excedente en el nodo 1.
7. El máximo de tareas es 4. Rif-3, Mai-1, Ben-2, Kim-5. Ken no tiene tarea alguna.

Conjunto 6.5a

3. Vea la figura B.10.

Conjunto 6.5b

1. Ruta crítica: 1-3-4-5-6-7. Duración = 19.

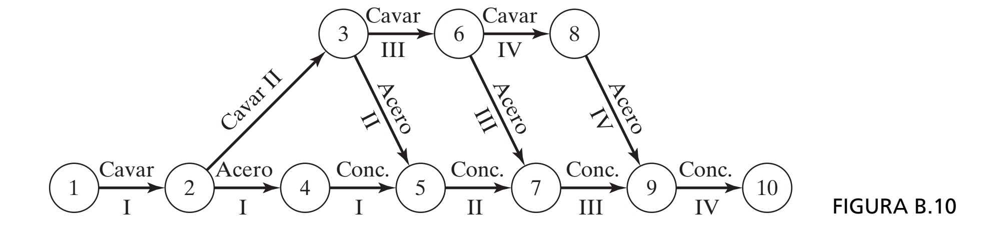


FIGURA B.10

Conjunto 6.5c

3. (a) 10. (b) 5. (c) 0.
5. (a) Ruta crítica: 1-3-6, duración = 45 días.
   (b) A, D y E.
   (c) Cada una de las actividades C, D y G se demorarán 5 días. E no se verá afectada.
   (d) Equipo mínimo = 2 unidades.

CAPÍTULO 7

Conjunto 7.1a

2. Los puntos (1,0) y (0,2) están en Q, pero $\lambda(1,0) + (1 - \lambda)(0,2) = (\lambda, 2 - 2\lambda)$ no quedan en Q para $0 < \lambda < 1$.

Conjunto 7.1b

2. (b) Solución única con $x_1 > 1$ y $0 < x_2 < 1$. Vea la figura B.11.
   (d) Una infinitud de soluciones.
   (f) Ninguna solución.
3. (a) Base porque det $\mathbf{B} = -4$.
   (d) No es una base porque una base debe incluir exactamente 3 vectores independientes.

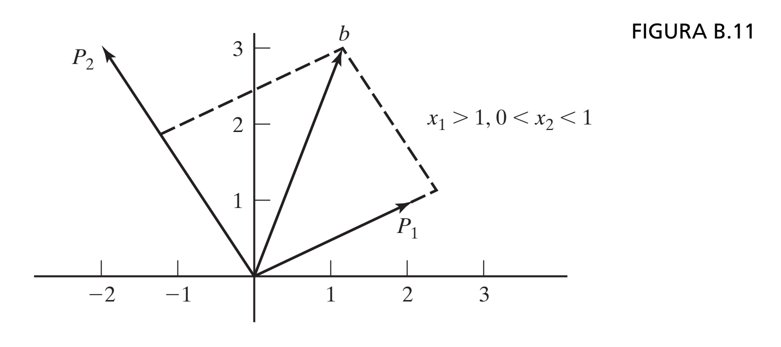


FIGURA B.11

Conjunto 7.1c

1.

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} .3 & -.2 \\ .1 & .1 \end{pmatrix}$$

Básica	x_1	x_2	x_3	x_4	Solución
z	1.5	−.5	0	0	21.5
x_3	0	.5	1	0	2
x_4	.5	0	0	1	1.5

La solución es factible pero no óptima.

4. Óptima $z = 34$.
Maximizar $z = 2x_1 + 5x_2$ sujeto a $x_1 \leq 4, x_2 \leq 6, x_1 + x_2 \leq 8, x_1, x_2 \geq 0$

Conjunto 7.2a

1. (a) $\mathbf{P}_1$ debe salir.
(b) $\mathbf{B} = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_4)$ es una base factible.

2. Para el vector básico $\mathbf{X}_B$, tenemos

$$\{z_j - c_j\} = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{c}_B = \mathbf{c}_B\mathbf{I} - \mathbf{c}_B = \mathbf{c}_B - \mathbf{c}_B = \mathbf{0}$$

7. El número de puntos extremos adyacentes es $n - m$, suponiendo que no hay degeneración.

10. En el caso de degeneración, la cantidad de puntos extremos es menor que la de soluciones básicas, de lo contrario son iguales.

11. (a) nueva $x_j = \frac{1}{\alpha}$ vieja x_j.
(b) nueva $x_j = \frac{\beta}{\alpha}$ vieja x_j.

Conjunto 7.2b

2. (b) $(x_1, x_2, x_3) = (1.5, 2, 0), z = 5$.

Conjunto 7.3a

2. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 1, .75, 1, 0, 1), z = 22$.

Conjunto 7.4a

2. Maximizar $w = \mathbf{Yb}$ sujeto a $\mathbf{YA} \leq \mathbf{c}, \mathbf{Y} \geq \mathbf{0}$.

Conjunto 7.4b

5. Método 1: $(b_1, b_2, b_3) = (4, 6, 8) \Rightarrow$ valor objetivo dual = 34.
Método 2: $(c_1, c_2) = (2, 5) \Rightarrow$ valor objetivo primal = 34.

6. Minimizar $w = \mathbf{Yb}$ sujeto a $\mathbf{YA} = \mathbf{C}, \mathbf{Y}$ no restringida.

Conjunto 7.5a

1. $-\frac{2}{7} \leq t \leq 1$

2. (a)

Solución básica	Intervalo aplicable de t
$(x_2, x_3, x_6) = (5, 30, 10)$	$0 \leq t \leq \frac{1}{3}$
$(x_2, x_3, x_1) = (\frac{25}{4}, \frac{90}{4}, 5)$	$\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{5}{2}$
$(x_2, x_4, x_1) = (\frac{5}{2}, 15, 20)$	$\frac{5}{2} \leq t \leq \infty$

5. $\{z_j - c_j\}_{j=1,4,5} = (4 - \frac{3t}{2} - \frac{3t^2}{2}, 1 - t^2, 2 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2})$. La base permanece óptima en el intervalo $0 \leq t \leq 1$.

Conjunto 7.5b

1. (a) $t_1 = 10, \mathbf{B}_1 = (\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$

2. En $t = 0$ $(x_1, x_2, x_3) = (0.4, 1.8, 1)$. Permanece básica en el intervalo $0 \leq t \leq 1.5$. Ninguna solución factible con $t > 1.5$.

CAPÍTULO 8

Conjunto 8.1a

1. G_5: Minimizar s_5^+, $55x_p + 3.5x_f + 5.5x_s - .0675x_g + s_5^- - s_5^+ = 0$.

3. Sea x_1 = Cantidad de estudiantes del primer año en el estado, x_2 = estudiantes de primer año de fuera del estado, x_3 = estudiantes de primer año internacionales.

G_i: Minimizar s_i^-, $i = 1, 2, \ldots, 5$, sujeto a $x_1 + x_2 + x_3 + s_1^- - s_1^+ = 1200$,

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + s_2^- - s_2^+ = 0, \; -.1x_1 - .1x_2 + .9x_3 + s_3^- - s_3^+ = 0,$$

$$.125x_1 - .05x_2 - .556x_3 + s_4^- - s_4^+ = 0, \; -.2x_1 + .8x_2 - .2x_3 + s_5^- - s_5^+ = 0$$

Todas las variables son no negativas.

5. Sea x_j = Cantidad de corridas de producción en el turno j, $j = 1, 2, 3$.
Minimizar $z = s_1^- + s_1^+$, sujeto a $-100x_1 + 40x_2 - 80x_3 + s_1^- - s_1^+ = 0$,

$$4 \leq x_1 \leq 5, 10 \leq x_2 \leq 20, 3 \leq x_3 \leq 20$$

Conjunto 8.2a

1. Función objetivo: Minimizar $z = s_1^- + s_2^- + s_3^- + s_4^+ + s_5^+$
Solución: $x_p = .0201$, $x_f = .0457$, $x_s = .0582$, $x_g = 2$ centavos, $= 1.45$
El impuesto sobre la gasolina se queda a \$1.45 millones del objetivo.

4. x_1 = lb de piedra caliza/día, x_2 = libra de maíz/día, x_3 = lb de soya/día.
Función objetivo: Minimizar $z = s_1^- + s_2^+ + s_3^- + s_4^- + s_5^+$

Solución: $x_1 = 166.08$ lb, $x_2 = 2778.56$ lb, $x_3 = 3055.36$ lb, $z = 0$. El problema tiene soluciones óptimas alternativas. Todos los objetivos se satisfacen, pero los objetivos 3 y 4 se sobresatisfacen.

7. x_j = Cantidad de unidades del producto j, $j = 1, 2$.
Asigne un peso relativamente alto a las restricciones de cuota.
Función objetivo: Minimizar $z = 100s_1^- + 100s_2^- + s_3^+ + s_4^+$
Solución: $x_1 = 80$, $x_2 = 60$, $s_3^+ = 100$ minutos, $s_4^+ = 120$ minutos.
Las cuotas de producción se pueden satisfacer con 100 minutos de tiempo extra para la máquina 1 y 120 minutos de tiempo extra para la máquina 2.

Conjunto 8.2b

2. Solución de G_1 $x_p = .01745$, $x_f = .0457$, $x_s = .0582$, $x_g = 21.33$, $s_4^+ = 19.33$, todas las demás $= 0$. Los objetivos G_1, G_2 y G_3 satisfacen, G_4 no.
Problema G_4: Las mismas restricciones que G_1 más $s_1^- = 0$, $s_2^- = 0$, $s_3^- = 0$.
Solución de G_4: $x_p = .0201$, $x_f = .0457$, $x_s = .0582$, $x_g = 2$, $s_5^+ = 1.45$. Todas las demás variables $= 0$. El objetivo de G_5 no se satisface.
Problema G_5: Igual que G_4 más $s_4^+ = 0$.
Solución de $G5$: Igual que G_4, lo que significa que el objetivo 5 no se puede satisfacer ($s_5^+ = 1.45$).

CAPÍTULO 9

Conjunto 9.1a

3. x_{ij} = Cantidad de botellas de tipo i asignadas al individuo j, donde $i = 1$ (llena), 2 (medio llena), 3 (vacía).
Restricciones:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 7,\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 7,\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 7$$

$$x_{11} + .5x_{21} = 3.5,\ x_{12} + .5x_{22} = 3.5,\ x_{13} + .5x_{23} = 3.5$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 7,\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 7,\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 7$$

Todas las x_{ij} son enteros no negativos.
Solución: Use una función objetivo ficticia.

	Cantidad de botellas asignadas al individuo		
Estado	*1*	2	3
Llena	1	3	3
Medio llena	5	1	1
Vacía	1	3	3

6. y = Suma original de dinero, x_j = Cantidad tomada en la noche j, $j = 1, 2, 3$.
x_4 = Cantidad entregada a cada marinero por el primer oficial.

Minimizar $z = y$ sujeto a $3x_1 - y = 2, x_1 + 3x_2 - y = 2, x_1 + x_2 + 3x_3 - y = 2, y - x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 1$. Todas las variables son enteros no negativos.

Solución: $y = 79 + 81n, n = 0, 1, 2,\ldots$ y mínima = 79.

10. Lado 1: 5, 6 y 8 (27 minutos). Lado 2: 1, 2, 3, 4 y 7 (28 minutos). El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

12. $x_{ij} = 1$ si el estudiante i selecciona el curso j, y cero de lo contrario, c_{ij} = calificación de preferencia asociada, C_j = capacidad del curso j. Maximizar $z = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{6} c_{ij}x_{ij}$ sujeto a

$$\sum_{j=1}^{6} x_{ij} = 2, i = 1, 2, \ldots, 10, \sum_{i=1}^{10} x_{ij} \leq C_j, j = 1, 2, \ldots, 6$$

Solución: Curso 1:estudiantes (2, 4, 9), 2: (2, 8), 3: (5, 6, 7, 9), 4: (4, 5, 7, 10), 5: (1, 3, 8, 10), 6: (1, 3). Calificación total = 1775.

Conjunto 9.1b

1. Sea $x_j = 1$ si se selecciona la ruta j y 0 si no es así. Distancia total de la ruta ABC, 1, 2, 3, 4, ABC) = 10 + 32 + 4 + 15 + 9 = 80 millas.

Minimizar $z = 80x_1 + 50x_2 + 70x_3 + 52x_4 + 60x_5 + 44x_6$ sujeto a

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 1, x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 1, x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 1,$$

$$x_1 + x_2 + x_5 \geq 1, x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \geq 1, x_j = (0, 1), \text{ para todas las } j.$$

Solución: Seleccione las rutas (1, 4, 2) y (1, 3, 5), $z = 104$. El cliente 1 debe ser saltado en una de las dos rutas.

2. Solución: el comité de 3 miembros se forma con los individuos a, d y f. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

7. $x_t = 1$ si se selecciona el transmisor t, 0 si no es así, $x_c = 1$ si se sirve a la comunidad c, 0 si no es así, c_t = costo del transmisor t. S_c = conjunto de transmisores que sirven a la comunidad c, P_j = población de la comunidad j.

Maximizar $z = \sum_{c=1}^{15} P_c x_c$ sujeto a

$$\sum_{t \in S_c} x_t \geq x_c, c = 1, 2, \ldots, 15, \sum_{t=1}^{7} c_t x_t \leq 15$$

Solución: Construir los transmisores 2, 4, 5, 6 y 7. Se sirve a todas las comunidades excepto a la 1.

Conjunto 9.1c

2. Sea x_j = cantidad de artefactos producidos en la máquina $j, j = 1, 2, 3$. $y_j = 1$ si se utiliza la máquina j y 0 si no es así. Minimizar $z = 2x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 300y_1 + 100y_2 + 200y_3$ sujeto a $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2000, x_1 - 600y_1 \leq 0, x_2 - 800y_2 \leq 0, x_3 - 1200y_3 \leq 0, x_1, x_2, x_3 \geq 500$ y enteros, $y_1, y_2, y_3 = (0, 1)$.
Solución: $x_1 = 600, x_2 = 500, x_3 = 900$, z = \$11,300.

3. Solución: El sitio 1 se asigna a los destinos 1 y 2, y el sitio 2 se asigna a los destinos 3 y 4, $z = 18$.

10. x_e = cantidad de boletos (sencillos) de Eastern, x_u = cantidad de boletos de US Air, x_c = cantidad de boletos de Continental. e_1 y e_2 son variables binarias, u y c son enteros no negativos. Maximizar z = $1000(x_e + 1.5x_u + 1.8x_c + 5e_1 + 5e_2 + 10u + 7c)$ sujeto a $e_1 \le x_e/2, e_2 \le x_e/6, u \le x_u/6$ y $c \le x_c/5, x_e + x_u + x_c = 12$.

Solución: Compre 2 boletos en Eastern y 10 boletos en Continental. Bonificación = 39,000 millas.

Conjunto 9.1d

1. Sea x_{ij} = Cantidad entera asignada al cuadrado (i,j). Use una función objetivo ficticia con todos los coeficientes cero.

Restricciones:

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 15, i = 1, 2, 3, \sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 15, j = 1, 2, 3,$$

$$x_{11} + x_{22} + x_{33} = 15, x_{31} + x_{22} + x_{13} = 15,$$

$$(x_{11} \ge x_{12} + 1 \text{ o } x_{11} \le x_{12} - 1), (x_{11} \ge x_{13} + 1 \text{ o } x_{11} \le x_{13} - 1),$$

$$(x_{12} \ge x_{13} + 1 \text{ o } x_{12} \le x_{13} - 1), (x_{11} \ge x_{21} + 1 \text{ o } x_{11} \le x_{21} - 1),$$

$$(x_{11} \ge x_{31} + 1 \text{ o } x_{11} \le x_{31} - 1), (x_{21} \ge x_{31} + 1 \text{ o } x_{21} \le x_{31} - 1),$$

$$x_{ij} = 1, 2, \ldots, 9, \text{ para todas las } i \text{ y } j$$

Solución:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Soluciones alternativas: Intercambie las filas 1 y 3 o las columnas 1 y 3.

3. x_j = Cantidad de unidades diarias del producto j.

Maximizar $z = 25x_1 + 30x_2 + 22x_3$ sujeto a

$$\begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 100 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 100 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 90 \\ 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \le 120 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \text{ y entero}$$

Solución. Producir 26 unidades del producto 1, 3 del producto 2, ninguna del producto 3, y utilizar la ubicación 2.

12. Defina $v = zw, v \le z, v \le w, v \ge z + w - 1, 0 \le v \le 1$, z y w binarias.

Conjunto 9.2a[2]

2. (a) $z = 6, x_1 = 2, x_2 = 0$.
(b) $z = 12, x_1 = 0, x_2 = 3$.

3. (a) $z = 7.25, x_1 = 1.75, x_2 = 1$.
(d) $z = 10.5, x_1 = .5, x_2 = 2$.

9. PLE equivalente 0-1:

Maximizar $z = 18y_{11} + 36y_{12} + 14y_{21} + 28y_{22} + 8y_{31} + 16y_{32} + 32y_{33}$
sujeto a $15y_{11} + 30y_{12} + 12y_{21} + 24y_{22} + 7y_{31} + 14y_{32} + 28y_{33} \leq 43$.
Todas las variables son binarias.

Solución: $z = 50$, $y_{12} = 1$, $y_{21} = 1$, todas las demás $= 0$. De forma equivalente, $x_1 = 2, x_2 = 1$. La versión 0-1 requirió 41 nodos. La original requiere 29.

Conjunto 9.2b

1. (a) Corte legítimo porque pasa por un punto entero y no elimina a ningún punto entero factible. Puede verificar este resultado trazando el corte en el espacio de soluciones de programación lineal.

2. (a) Solución entera óptima: $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 6), z = 26$.
Solución redondeada: $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 6)$ — no factible.

CAPÍTULO 10

Conjunto 10.2A

6. Maximizar $z = 15(t/100)\ (53 - 100(t/100)), 10 \leq t \leq 60$
La demanda será cero en $t = 53$. Por lo tanto, la búsqueda se puede limitar al intervalo (10,53). Inicie la búsqueda en $t = 10\%$.

Conjunto 10.3C

4. Represente un cromosoma con una cadena de diez elementos binarios generados al azar de modo que la carta $i = 0(1)$ signifique que pertenece a la pila 1 (2).

Aptitud = |36 — suma de cartas en la pila 1| + |36 − producto de cartas en la pila 2|.

Iteración 0:

P1: 1011011010, Pile 1: (2, 5, 8, 10), Pile 2: (1, 3, 4, 6, 7, 9),

$z = |36 - 25| + |36 - 4536| = 11 + 4500 = 4511$

P2: 0011011111, P3: 0100110101, P4: 11001101111

---

[2]Use el módulo de programación entera de TORA para generar el árbol de ramificación y acotamiento.

CAPÍTULO 11

Conjunto 11.1a

3. Cada sitio (más el hotel) representa una ciudad. La tarifa del taxi entre ubicaciones representa la distancia.

Conjunto 11.2a

1. (a) PL para cota inferior:

Minimizar $z = 2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + 2r_4 + 2\,r_5$

sujeto a

$r_1 + r_2 \leq 120, r_1 + r_3 \leq 220, r_1 + r_4 \leq 150, r_1 + r_5 \leq 210$

$r_2 + r_3 \leq 80, r_2 + r_4 \leq 110, r_2 + r_5 \leq 130$

$r_3 + r_4 \leq 160, r_3 + r_5 \leq 185$

$r_4 + r_5 \leq 190$

todas las r_i no negativas

(b) Tanto *amplAssign.txt* como *amplLP.txt* dan una cota inferior de 695 millas. La solución del modelo de asignación incluye subrecorridos (1-4-1, 2-5-3-2), por lo que no es óptima.

6. (a) Cada proyecto representa una ciudad. La tabla siguiente da el número de distintos empleados que entran a y salen de la oficina del gerente cuando se cambia del proyecto i al proyecto j (es decir la cantidad de "x" que no emparejan entre la columna i y la columna j). El objetivo es encontrar un "recorrido" a través de todos los proyectos que minimice el tráfico total.

	1	2	3	4	5	6
1		4	4	6	6	5
2	4		6	4	6	3
3	4	6		4	8	7
4	6	4	4		6	5
5	6	6	8	6		5
6	5	3	7	5	5	

(b) Cota inferior obtenida con *solutionAssign.txt* es 26. Aun cuando la cota inferior resultó ser exactamente igual al recorrido mínimo verdadero, la solución de asignación asociada incluye subrecorridos; es decir, 1-3-1, 2-4-5-6-2. El recorrido óptimo obtenido con *amplCut.txt* es 1-2-6-5-4-3-1.

Conjunto 11.3a

3. Vea la figura B.12.

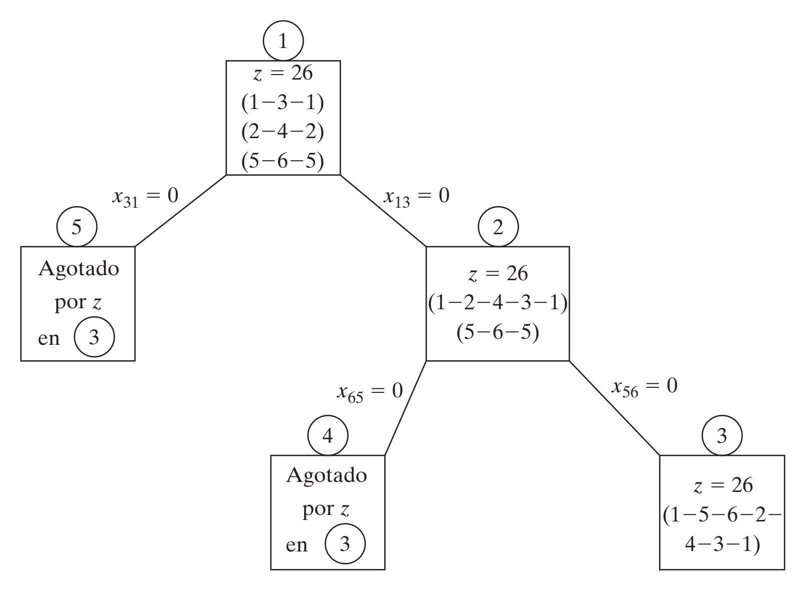


FIGURA B.12

CAPÍTULO 12

Conjunto 12.1a

1. Solución: Distancia más corta = 21 millas. Ruta 1-3-5-7.

Conjunto 12.2a

3. Solución: Distancia más corta = 17. Ruta: 1-2-3-5-7.

Conjunto 12.3a

2. (a) Solución: Valor = 120. $(m_1, m_2, m_3) = (0, 0, 3), (0, 4, 1), (0, 2, 2)$ o $(0, 6, 0)$.

5. Solución: Puntos totales = 250. Seleccione 2 cursos a partir de I, 3 de II, 4 a partir de III y 1 de IV.

7. Sea $x_j = 1$ si se acepta la solicitud j, y 0 si no. El modelo de la mochila equivalente es

Maximizar $z = 78x_1 + 64x_2 + 68x_3 + 62x_4 + 85x_5$ sujeto a

$$7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 8x_5 \leq 23, x_j = (0, 1), j = 1, 2, \ldots, 5$$

Solución: Aceptar todas excepto la primera solicitud. Valor = 279.

Conjunto 12.3b

1. (a) Solución: Contratar 6 para la semana 1, contratar 1 para la semana 2, despedir 2 para la semana 3, contratar 3 para la semana 4 y contratar 2 para la semana 5.

3. Solución: Rentar 7 autos en la semana 1, devolver 3 por la semana 2, rentar 4 para la semana 3, y ninguna acción durante la semana 4.

Conjunto 12.3c

2. Decisiones para los siguientes 4 años: Conservar, conservar, reemplazar, conservar. Costo total = \$458.

Conjunto 12.3d

3. (a) Sean x_i y y_i la cantidad de ovejas conservadas y vendidas al final del periodo i, y defina $z_i = x_i + y_i$.

$$f_n(z_n) = \max_{y_n = z_n}\{p_n y_n\}$$

$$f_i(z_i) = \max_{y_i \le z_i}\{p_i y_i + f_{i+1}(2z_i - 2y_i)\}, i = 1, 2, \ldots, n - 1$$

CAPÍTULO 13

Conjunto 13.3a

2. (a) Costo total por semana = \$51.50

(b) Costo total por semana = \$50.20, $y^* = 239.05$ lb.

4. (a) Seleccionar la política 1 porque su costo por día es de \$2.17 en contraste con \$2.50 para la política 2.

(b) Política óptima: Pedir 100 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 10 unidades.

Conjunto 13.3b

2. Política óptima: Pedir 500 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 130 unidades. Costo por día = \$258.50.

4. No hay ventaja alguna si $TCU_1(y_m) \le TCU_2(q)$, lo cual se traduce en ninguna ventaja si el factor de descuento no excede de .9344%.

Conjunto 13.3c

1. Solución obtenida con AMPL/Solver: $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (4.42, 6.87, 4.12, 7.2, 5.8)$, costo = \$568.12,

4. Restricción: $\sum_{i=1}^{4} \frac{365D_i}{y_i} \le 150.$

Solución obtenida con Solver/AMPL: $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (155.3, 118.82, 74.36, 90.09)$, costo = \$54.71.

Conjunto 13.4a

1. (a) 500 unidades requeridas al inicio de los periodos 1, 4, 7 y 10.

Conjunto 13.4b

3. Producir 173 unidades en el periodo 1, 180 en el periodo 2, 240 en el periodo 3, 110 en el periodo 4 y 203 en el periodo 5.

Conjunto 13.4c

1. (a) No, porque el inventario no debe mantenerse innecesariamente al final del horizonte.

(b) (i) $0 \le z_1 \le 5, 1 \le z_2 \le 5, 0 \le z_3 \le 4; x_1 = 4, 1 \le x_2 \le 6, 0 \le x_3 \le 4$.

(ii) $5 \le z_1 \le 12, 0 \le z_2 \le 7, 0 \le z_3 \le 4; x_1 = 0, 0 \le x_2 \le 7, 0 \le x_3 \le 4$.

2. (a) $z_1 = 7, z_2 = 0, z_3 = 6, z_4 = 0$. Costo total = $33.

Conjunto 13.4d

1. Utilizar el inventario inicial para satisfacer toda la demanda del periodo 1 y 4 unidades del periodo 2, y así se reduce la demanda en los cuatro periodos a 0, 22, 90 y 67, respectivamente.

Solución óptima: Pedir 112 unidades en el periodo 2 y 67 unidades en el periodo 4. Costo total = $632.

Conjunto 13.4e

1. Solución: Producir 210 unidades en enero, 255 en abril, 210 en julio y 165 en octubre.

CAPÍTULO 14

Conjunto 14.1a

1. (a) .15 y .25, respectivamente. (b) .571. (c) .821.

2. $n \ge 23$.

3. $n > 253$.

Conjunto 14.1b

3. $\frac{5}{32}$.

4. Sea p = probabilidad de que Liz gane. La probabilidad de que John gane es $3p$, la cual es igual a la probabilidad de que Jim gane. La probabilidad de que Ann gane es $6p$. Debido a que uno de los cuatro gana, $p + 3p + 3p + 3p + 6p = 1$.

(a) $\frac{3}{13}$.

(b) $\frac{7}{13}$.

(c) $\frac{6}{13}$.

Conjunto 14.1c

3. (a) .375. (b) .6.
7. .9545.

Conjunto 14.2a

2. (a) $K = 20$.
3. $P\{\text{Demanda} \geq 1100\} = .3$.

Conjunto 14.3a

3. (a) $P\{50 \leq \text{ejemplares vendidos} \leq 70\} = .6667$.
(b) Cantidad esperada de ejemplares no vendidos = 2.67
(c) Utilidad neta esperada = \$22.33

Conjunto 14.3b

1. Media = 3.667, varianza = 1.556.

Conjunto 14.3c

1. (a) $P(x_1 = 1) = P(x_2 = 1) = .4$, $P(x_1 = 2) = P(x_2 = 2) = .2$, $P(x_1 = 3) = P(x_2 = 3) = .4$.
(b) No, porque $P(x_1, x_2) \neq P(x_1)P(x_2)$.

Conjunto 14.4a

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.
2. .0547.

Conjunto 14.4b

1. .8646.
2. (a) $P\{n = 0\} = 0$.
(b) $P\{n \geq (2 + 1)\}$; $P\{n \geq 3\}$; 1.

Conjunto 14.4c

1. $\lambda = 12$ llegadas/min. $P\{t \leq 5 \text{ seg}\} = .63$.

Conjunto 14.4d

2. .001435.

CAPÍTULO 15

Conjunto 15.1a

1. Pesos para A, B y C = (.44214, .25184, .30602).

Conjunto 15.1b

2. CR > .1 para todas las matrices excepto **A**. (w_S, w_J, w_M) = (.331, .292, .377). Seleccionar Maisa.
4. Todas las matrices son consistentes. (w_H, w_p) = (.502, .498). Seleccionar H.

Conjunto 15.2a

2. (a) Vea la figura B.13.
   (b) EV(maíz) = −$8250, EV(soya) = $250. Seleccionar la soya.
6. (a) Vea la figura B.14.
   (b) EV(juego) = − $.025. No participar en el juego.

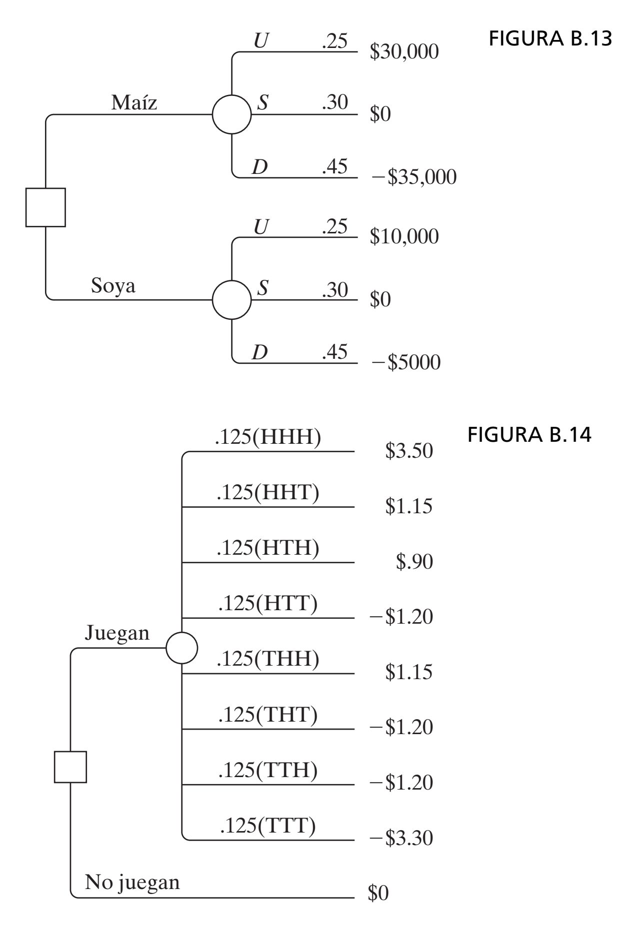


FIGURA B.13

FIGURA B.14

12. Ciclo de mantenimiento óptimo = 8 años. Costo por año = $397.50.
15. Tasa de producción óptima = 49 piezas por día.
19. El nivel debe estar entre 99 y 151 galones.

Conjunto 15.2b

2. Sea z el evento de tener un artículo defectuoso en una muestra de tamaño 5. Respuesta: $P\{A|z\} = .6097$, $P\{B|z\} = .3903$.
4. (a) Ingreso esperado si usted publica el libro = $196, 000.
Ingreso esperado si utiliza un editor = $163,000.
(b) Si la encuesta predice éxito, publique usted el libro, de lo contrario acuda a un editor.
7. (b) Envíe el lote a B si ambos artículos están defectuosos, de lo contrario envíelo a A.

Conjunto 15.2c

1. (a) Valor esperado = $5, por consiguiente no hay ventaja alguna.
(b) Para $0 \leq x < 10$, $U(x) = 0$, y para $x = 10$, $U(x) = 100$.
(c) Participe en el juego.
2. Lotería: $U(x) = 100 - 100p$, con $U(-\$1,250{,}000) = 0$ y $U(\$900{,}000) = 100$.

Conjunto 15.3a

1. (a) Todos los métodos: Estudiar toda la noche (acción a_1).
(b) Todos los métodos: Seleccionar las acciones a_2 o a_3.

Conjunto 15.4a

2. (a) Solución de punto de silla en (2, 3). Valor del juego = 4.
3. (a) $2 < v < 4$.

Conjunto 15.4b

1. Cada jugador debe combinar las estrategias 50-50. Valor del juego = 0.
2. Matriz de retribución de la policía:

	100% A	50% A-50% B	100% B
A	100	50	0
B	0	30	100

Estrategia de la policía: Combinar las estrategias 100% A y 100% B al 50-50.
Estrategia de Robin: Combinar las estrategias A y B al 50-50. Valor del juego = $50 (= multa esperada pagada por Robin).

Conjunto 15.4c

1. (a) Matriz de retribuciones para el equipo 1:

	AB	AC	AD	BC	BD	CD
AB	1	0	0	0	0	−1
AC	0	1	0	0	−1	0
AD	0	0	1	−1	0	0
BC	0	0	−1	1	0	0
BD	0	−1	0	0	1	0
CD	−1	0	0	0	0	1

Estrategias óptimas de ambos equipos: Combinar AB y CD al 50-50. Valor del juego = 0.

2. (a) *(m, n)* = (Regimientos en el Lugar 1, regimientos en el lugar 2). Cada lugar tiene una retribución de 1 si ganó y de − 1 si perdió. Por ejemplo, la estrategia de Blotto (1,1) contra la del enemigo (0,3) ganará el lugar 1 y perderá el lugar 2, con una retribución neta de 1 + (−1). Matriz de retribuciones para el coronel Blotto:

	3, 0	2, 1	1, 2	0, 3
2, 0	−1	−1	0	0
1, 1	0	−1	−1	0
0, 2	0	0	−1	−1

Estrategia óptima de Blotto: Blotto combina las estrategias (2-0) y (1-2) al 50-50 y el enemigo combina las estrategias (3-0) y (1-2) al 50-50. Valor del juego = −5, y Blotto pierde. El problema tiene soluciones óptimas alternativas.

CAPÍTULO 16

Conjunto 16.1a

1. (a) Pedir 1000 unidades siempre que el nivel del inventario se reduzca a 537 unidades.

Conjunto 16.1b

2. Solución: $y^* = 317.82$ galones, $R^* = 46.82$ galones.

3. Solución: $y^* = 316.85$ galones, $R^* = 58.73$ galones. En el ejemplo 14.1-2, $y^* = 319.44$ galones, $R^* = 93.61$ galones. La cantidad de pedido no cambia como en el ejemplo 14.1-2 pero R^* es menor porque la fdp de la demanda tiene una varianza menor.

Conjunto 16.2a

3. $.43 \leq p \leq .82$

6. 32 abrigos.

Conjunto 16.2b

1. Pedir $9 - x$ si $x < 4.53$, de lo contrario no pedir.

Conjunto 16.3a

2. Pedir $4.61 - x$ si $x < 4.61$, de lo contrario no pedir.

CAPÍTULO 17

Conjunto 17.1a

2. S1. Patrulla en vigilancia
S2: Patrulla respondiendo a una llamada
S3: Patrulla en la escena de la llamada
S4: Aprehensión realizada
S5. Transporte a la estación de policía

	S1	S2	S3	S4	S5
S1	0.4	0.6	0	0	0
S2	0.1	0.3	0.6	0	0
S3	0.1	0	0.5	0.4	0
S4	0.4	0	0	0	0.6
S5	1	0	0	0	0

Conjunto 17.2a

2. Probabilidades iniciales:

S1	S2	S3	S4	S5
0	0	1	0	0

Cadena de Markov de entrada:

	S1	S2	S3	S4	S5
S1	0.4	0.6	0	0	0
S2	0.1	0.3	0.6	0	0
S3	0.1	0	0.5	0.4	0
S4	0.4	0	0	0	0.6
S5	1	0	0	0	0

Matriz de transición de salida (2 pasos o 2 patrullajes) ($\mathbf{P}_2$)

	S1	S2	S3	S4	S5
S1	0.22	0.42	0.36	0	0
S2	0.13	0.15	0.48	0.24	0
S3	0.25	0.06	0.25	0.2	0.24
S4	0.76	0.24	0	0	0
S5	0.4	0.6	0	0	0

Probabilidades absolutas de 2 pasos = (0 0 1 0 0)$\mathbf{P}^2$

Estado	Absoluta (2 pasos)
S1	0.25
S2	0.06
S3	0.25
S4	0.2
S5	0.24

$P\{\text{aprehensión, S4, en 2 patrullajes}\} = .2$

Conjunto 17.3a

1. (a) Utilizando *excelMarkovChains.xls*, la cadena es periódica con periodo de 3.
(b) Los estados 1, 2 y 3 son transitorios, el estado 4 es absorbente.

Conjunto 17.4a

1. (a) Cadena de Markov de entrada:

	S	C	R
S	0.8	0.2	0
C	0.3	0.5	0.2
R	0.1	0.1	0.8

Probabilidades de estado estable:

$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)\mathbf{P}$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

Resultados de salida

Estado	*Estado estable*	*Tiempo de regreso medio*
S	0.50	2.0
C	0.25	4.0
R	0.25	4.0

Ingresos esperados = $2 \times .5 + 1.6 \times .25 + .4 \times .25 = \$1{,}500$

(b) Los días soleados regresarán cada $\mu_{SS} = 2$ días, es decir dos días sin sol.

5. (a) Cadena de Markov de entrada:

	nunca	a veces	siempre
Nunca	0.95	0.04	0.01
A veces	0.06	0.9	0.04
siempre	0	0.1	0.9

(b)

Resultados de salida		
Estado	*Estado estable*	*Tiempo de regreso medio*
nunca	0.441175	2.2666728
a veces	0.367646	2.7200089
siempre	0.191176	5.2307892

44.12% nunca, 36.76% a veces, 19.11% siempre

(c) Impuestos recaudados esperados/año = .12(\$5000 × .3676 + 12,000 × .1911) × 70,000,000 = \$34,711,641,097.07

Conjunto 17.5a

1. (a) Probabilidades iniciales:

1	2	3	4	5
1	0	0	0	0

Cadena de Markov de entrada:

1	2	3	4	5
0	.3333	.3333	.3333	0
.3333	0	.3333	0	.3333
.3333	.3333	0	0	.3333
.5	0	0	0	.5
0	.3333	.3333	.3333	0

Estado	Absoluto (3 pasos)	Estado estable
1	.07407	.214286
2	.2963	.214286
3	.2963	.214286
4	.25926	.142857
5	**.07407**	**.214286**

(b) $a_5 = .07407$
(c) $\pi_5 = .214286$
(d) $\mu_{15} = 4.6666$.

	$(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$				Mu
	1	2	3	5	
1	2	1	1	.6667	4.6666
2	1	1.625	.875	.3333	3.8333
3	1	.875	1.625	.3333	3.8333
4	1	.5	.5	1.3333	3.3333

5. (a) Cadena de Markov de entrada:

	A	B	C
A	.75	.1	.15
B	.2	.75	.05
C	.125	.125	.75

(b)

Estado	Estado estable
A	.394737
B	.307018
C	.298246

A: 39.5%, B: 30.7%, C: 29.8%

	$(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$			Mu
	A	C		B
A	5.71429	3.42857	A	**9.14286**
C	2.85714	5.71429	C	8.57143

	1	2		C
A	5.88235	2.35294	A	**8.23529**
B	4.70588	5.88235	B	1.5882

$A \longrightarrow B$, 9.14 años
$A \longrightarrow C$: 8.23 años

Conjunto 17.6a

2. (a) Estados: 1 semana, 2 semanas, 3 semanas, biblioteca

Matriz **P**:

	1	2	3	lib
1	0	0.3	0	0.7
2	0	0	0.1	0.9
3	0	0	0	1
lib	0	0	0	1

(b)

$(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$

	1	2	3
1	1	0.3	.03
2	0	1	.01
3	0	0	1

Mu

	lib
1	1.33
2	1.1
3	1

Conservo el libro 1.33 semanas en promedio.

8. (a)

Matriz **P**:

	1	2	3	4	F
1	0.2	0.8	0	0	0
2	0	0.22	0.78	0	0
3	0	0	0.25	0.75	0
4	0	0	0	0.3	0.7
F	0	0	0	0	1

(b)

$(\mathbf{I} - \mathbf{N})^{-1}$

	1	2	3	4
1	1.25	1.282	1.333	1.429
2	0	1.282	1.333	1.429
3	0	0	1.333	1.429
4	0	0	0	1.429

Mu

	F
1	5.29
2	4.04
3	2.76
4	1.43

(c) Para poder llevar el Cal II, el estudiante debe terminar en 16 semanas (4 transiciones) o menos. Promedio de transiciones necesarias = 5.29. Por consiguiente, un estudiante promedio no será capaz de terminar el Cal I a tiempo.
(d) No, de acuerdo con la respuesta en (c).

CAPÍTULO 18

Conjunto 18.1a

1. (a) Productividad = 71%.
(b) Los dos requisitos no pueden satisfacerse al mismo tiempo.

Conjunto 18.2a

1.

Situación	Cliente	Servidor
(a)	Avión	Pista de despegue
(b)	Pasajero	Taxi
(h)	Auto	Espacio de estacionamiento

Conjunto 18.3a

1. (b) (i) $\lambda = 6$ llegadas por hora, tiempo entre llegadas promedio $= \frac{1}{6}$ horas.
(c) (i) $\mu = 5$ servicios por hora, tiempo de servicio promedio = .2 horas.

3. (a) $f(t) = 20e^{-20t}, t > 0$.
(b) $P\left\{t > \frac{15}{60}\right\} = .00674$.

7. La retribución de Jim es de 2 centavos con probabilidad $P\{t \leq 1\} = .4866$ y -2 centavos con probabilidad $P\{t \geq 1\} = .5134$. En 8 horas, Jim le paga a Ann = 17.15 centavos.

10. (a) P$\{t \leq 4$ minutos$\}$ = .4866.
(b) Porcentaje de descuento promedio = 6.208.

Conjunto 18.4a

1. $p_{n\geq5}(1\,\text{hora}) = .55951$.

4. (a) $p_2(t = 7) = .24167$.

6. (a) Combinados $\lambda = \frac{1}{10} + \frac{1}{7}$, $p_2(t = 5) = .219$.

Conjunto 18.4b

2. (a) $p_0(t = 3) = .00532$.
(c) $p_{n\leq17}(t = 1) = .9502$.

5. $p_0(4) = .37116$.

8. (a) Tamaño de pedido promedio = 25 — 7.11 = 17.89 artículos.
(b) $p_0(t = 4) = .00069$.

Conjunto 18.5a

3. (a) $p_{n \geq 3} = .4445$.
(b) $p_{n \leq 2} = .5555$.

6. (a) $p_j = .2, j = 0, 1, 2, 3, 4$.
(b) Cantidad esperada en el taller = 2 clientes.
(c) $p_4 = .2$.

Conjunto 18.6a

1. (a) $L_q = 1p_6 + 2p_7 + 3p_8 = .1917$ carros.
(b) $\lambda_{perdida} = .1263$ autos por hora. Número promedio perdido en 8 horas = 1.01 carros.
(c)Cantidad de espacios vacíos $= c - (L_s - L_q) = c - \sum_{n=0}^{8} np_n + \sum_{n=c+1}^{8} (n - c)p_n$.

Conjunto 18.6b

2. (a) $p_0 = .2$.
(b) Ingreso mensual promedio $= \$50 \times \mu t = \$375$.
(c) Pago esperado $= \$40 \times L_q = \$128$.

5. (a) $p_0 = .4$.
(b) $L_q = .9$ autos.
(c) $W_q = 2.25$ min.
(d) $p_{n \geq 11} = .0036$.

6. (d) El número de espacios es al menos de 13.

Conjunto 18.6c

1. (a) $p_0 = .3654$.
(b) $W_q = .207$ horas.
(c) Cantidad esperada de espacios vacíos $= 4 - L_q = 3.212$.
(d) $p_5 = .04812$.
(e) Una reducción de 40% disminuye W_s a aproximadamente 9.6 minutos ($\mu = 10$ autos/h).

4. (a) $p_8 = .6$.
(b) $L_q = 6.34$ generadores.
(c) La probabilidad de encontrar un espacio vacío no puede exceder de .4 independientemente de la capacidad de la banda. Esto significa que la mejor utilización del departamento de ensamble es del 60%.

7. (a) $1 - p_5 = .962$.
(b) $\lambda_{perdida} = \lambda p_5 = .19$ clientes por hora.

Conjunto 18.6d

2. Para $c = 2, W_q = 3.446$ horas y para $c = 4, W_q = 1.681$ horas, una mejora de más de 51%.

5. Sea K la cantidad de espacios en la sala de espera. Aplicando TORA, $p_0 + p_1 + \ldots + p_{K+2} \geq .999$ produce $K \geq 10$.

7. (a) $p_{n\geq 4} = .65772$.
(e) Promedio de computadoras ociosas = .667 computadoras.

Conjunto 18.6e

2. (c) Utilización = 81.8%.
(d) $p_2 + p_3 + p_4 = .545$.

4. (a) $p_{40} = .00014$.
(b) $p_{30} + p_{31} + \cdots + p_{39} = .02453$.
(d) Cantidad esperada de espacios ocupados = $L_s - L_q = 20.043 - .046 \approx 20$.
(f) Probabilidad de no encontrar un espacio de estacionamiento = $1 - p_{n\leq 29} = .02467$. La cantidad de estudiantes que pueden estacionarse en un periodo de 8 horas es aproximadamente de 4.

Conjunto 18.6f

2. (a) Aproximadamente 7 asientos.
(b) $p_{n\geq 8} = .2911$.

Conjunto 18.6g

1. (b) Promedio de mecánicos ociosos = 2.01.
(d) P(2 o 3 servidores ociosos) = $p_0 + p_1 = .34492$.

4. (a) $L_S = 1.25$ máquinas.
(b) $p_0 = .33342$.
(c) $W_s = .25$ horas.

6. $\lambda = 2$ llamadas por hora por bebé, $\mu = .5$ bebés por hora, $R = 5, K = 5$.
(a) Cantidad de bebés despiertos = $5 - L_s = 1$ bebé.
(b) $p_5 = .32768$.
(c) $p_{n\leq 2} = .05792$.

Conjunto 18.7a

2. (a) $E\{t\} = 14$ minutos y $\text{var}\{t\} = 12$ minutos^2. $L_s = 7.8672$ carros.

4. $\lambda = .0625$ prescripciones por minuto, E{t} = 15 minutos, var{t} = 9.33 minutos^2.
(a) $p_0 = .0625$.
(b) $L_q = 7.3$ prescripciones
(c) $W_s = 132.17$ minutos

Conjunto 18.9a

2. Use (M/M/1):(GD/10/10). El costo por hora es de $431.50 para el técnico 1 y de $386.50 con el técnico 2.

4. (b) $\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2\lambda}{c_1}}$
(c) Tasa de producción óptima = 2725 piezas por hora.

Conjunto 18.9b

2. (a) El costo por hora es de $86.4 con dos técnicos y de $94.80 con tres.
(b) Pérdida por descompostura = $30 $\times$ W_s = $121.11 con dos técnicos y de $94.62 con tres.

4. Tasa de descomposturas por máquina, $\lambda = .36125$ por hora, $\mu = 10$ por hora. El modelo (M/M/3):(GD/20/20) resulta $L_s = .70529$ máquinas. Ingreso perdido = $36.60 y el costo de tres técnicos = $60.

Conjunto 18.9c

1. (a) Números de técnicos en reparaciones ≥ 5.
(b) Número de técnicos en reparaciones ≥ 4.

CAPÍTULO 19

Conjunto 19.1a

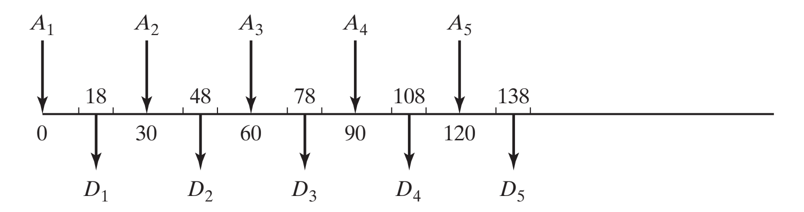
4. (a) $P(H) = P\{T\} = .5$. Si $0 \leq R \leq .5$, Jim obtiene $10.00. Si $.5 < R \leq 1$, Jan obtiene $10.00.

7. Muestreo del tiempo de espera: Si $0 \leq R \leq .5$, $L = 1$ día. Si $.5 < R \leq 1$, $L = 2$ días. Demanda por día: Si $0 \leq R \leq .2$, demanda = 0 unidades. Si $.2 < R \leq .9$, demanda = 1 unidad. Si $.9 < R \leq 1$, demanda = 2 unidades. Use una R para muestrear L. Si $L = 1$, use otra R para muestrear la demanda de un día, de lo contrario si $L = 2$, use una R para generar la demanda del día 1 y luego otra R para generar la demanda del día 2.

Conjunto 19.2a

1. (a) Discreta.

FIGURA B.15



Conjunto 19.3a

4. Vea la figura B.15.

Conjunto 19.3b

1. $t = -\frac{1}{\lambda} \ln (1 - R)$, $\lambda = 4$ clientes por hora.

Cliente	R	t (hr)	Tiempo de llegada
1	—	—	0
2	0.0589	0.015176	0.015176
3	0.6733	0.279678	0.294855
4	0.4799	0.163434	0.458288

2. $t = a + (b - a)R$.

4. (a) $0 \leq R < .2: d = 0, .2 \leq R < .5: d = 1, .5 \leq R < .9: d = 2, .9 \leq R \leq 1: d = 3$.

9. Si $0 \leq R \leq p$, entonces $x = 0$, de lo contrario $x = \left(\text{entero máximo} \leq \frac{\ln (1 - R)}{\ln q}\right)$.

Conjunto 19.3c

1. $y = -\frac{1}{10} \ln(.0589 \times .6733 \times .4799 \times .9486) = .401$ horas.

6. $t = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, donde $x_i = 10 + 10R_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Conjunto 19.4a

1. En el ejemplo 16.4-1, longitud del ciclo = 4. Con los nuevos parámetros el ciclado no fue evidente después de que se generaron 50 números aleatorios. La conclusión es que la juiciosa selección de los parámetros es importante.

Conjunto 19.5a

2. (a) Basado en observaciones.
(b) Basado en el tiempo.

3. (a) 1.48 clientes.
(b) 7.4 horas.

Conjunto 19.6a

2. Intervalo de confianza: $15.07 \leq \mu \leq 23.27$.

CAPÍTULO 20

Conjunto 20.1a

1. (a) Sin puntos estacionarios.
(b) Mínimo en $x = 0$.
(e) Punto de inflexión en $x = 0$, mínimo en $x = .63$ y máximo en $x = -.63$.

4. $(x_1, x_2) = (21, 1)$ o $(2,4)$.

Conjunto 20.2a

1. (b) $(\partial x_1, \partial x_2) = (2.83, -2.5)\,\partial x_2$

Conjunto 20.2b

3. Condiciones necesarias: $2\left(x_i - \frac{x_n^2}{x_i}\right) = 0, i = 1, 2, \ldots, n - 1$. La solución es

$$x_i = \sqrt[n]{C}, i = 1, 2, \ldots, n.\ \partial f = 2\delta\sqrt[n]{C^{2-n}}.$$

6. (b) Solución $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{5}{74}, -\frac{10}{74}, \frac{155}{74}, \frac{60}{74}\right)$, la cual es un punto mínimo.

Conjunto 20.2c

2. Puntos mínimos: $(x_1, x_2, x_3) = (-14.4, 4.56, -1.44)$ y $(4.4, .44, .44)$.

CAPÍTULO 21

Conjunto 21.1a

2. (c) $x = 2.5$, logrado con $\Delta = .000001$.
(e) $x = 2$, logrado con $\Delta = .000001$.

Conjunto 21.1b

1. De acuerdo con la expansión de Taylor $\nabla f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}^0) + \mathbf{H}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)$. La hessiana $\mathbf{H}$ es independiente de $\mathbf{X}$ porque $f(\mathbf{X})$ es cuadrática. Además, la expansión dada es exacta porque las derivadas de mayor orden son cero. Por consiguiente $\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ representa $\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 - \mathbf{H}^{-1}\nabla f(\mathbf{X}^0)$. Debido a que $\mathbf{X}$ satisface $\nabla f(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{X}$ debe ser óptima independientemente de la elección de la $\mathbf{X}^0$ inicial.

Conjunto 21.2a

2. Solución óptima: $x_1 = 0, x_2 = 3, z = 17$.

4. Sea $w_j = x_j + 1, j = 1, 2, 3, v_1 = w_1 w_2, v_2 = w_1 w_3$. Entonces,

Maximizar $z = v_1 + v_2 - 2w_1 - w_2 + 1$
sujeto a $v_1 + v_2 - 2w_1 - w_2 \leq 9,\ \ln v_1 - \ln w_1 - \ln w_2 = 0,$

$$\ln v_2 = \ln w_1 - \ln w_3 = 0, \text{todas las variables son no negativas.}$$

Conjunto 21.2b

1. Solución: $x_1 = 1, x_2 = 0, z = 4.$
2. Solución: $x_1 = 0, x_2 = .4, x_3 = .7, z = -2.35.$

Conjunto 21.2c

1. Maximizar $z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$
   sujeto a $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 1.28y \leq 10$
   $9x_1^2 + 16x_3^2 - y^2 = 0$
   $7x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12$
   $x_1, x_2, x_3, y \geq 0$

Índice[1]

[1]Los números de página con prefijos se refieren a los capítulos y apéndices disponibles en el sitio web. Por ejemplo 22.3-7 se refiere a las páginas 3 a 7 del capítulo 22, y C.4-8 a las páginas 4 a 8 del apéndice C.

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

N

O

P

T

V

Novena edición

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

HAMDY A. TAHA

Esta novena edición del reconocido libro de Taha contiene, de manera más concisa que las anteriores, tanto el texto como el software de apoyo, con el fin de que el lector se enfoque de lleno en la puesta en ejecución algorítmica y práctica de las técnicas de investigación de operaciones.

El libro recalca que, si bien el modelado matemático es la piedra angular de la IO, en la decisión final se deben tomar en cuenta factores incuantificables, como el comportamiento humano; asimismo, hace hincapié en que la definición correcta de los problemas es la fase más importante y más difícil de la IO. Por último, la obra presenta varias aplicaciones que utilizan ejemplos resueltos y problemas específicos.

Novedades en esta edición:

- La nueva sección 3.7 ofrece un marco de trabajo (sin necesidad de utilizar matemáticas) sobre cómo implementar los diferentes algoritmos de programación lineal (simplex, simplex dual, simplex revisado y de punto interior) en códigos comerciales, con el fin de incrementar la velocidad de cómputo y la precisión necesarias para resolver problemas muy grandes.

- El nuevo capítulo 10 cubre la heurística y la metaheurística diseñadas para obtener buenas soluciones aproximadas a problemas de programación entera y combinatoria.

- El nuevo capítulo 11, dedicado al importante problema del agente viajero, incluye varias aplicaciones y el desarrollo de algoritmos de solución heurísticos y exactos.

- Todos los algoritmos de los capítulos 10 y 11 se codificaron en Excel para una agradable experimentación interactiva con los modelos.

- En todos los capítulos se agregaron numerosos problemas nuevos.

- También se actualizó el software TORA.

Para mayor información, visite:
pearsoneducacion.net/taha

Visítenos en:
www.pearsoneducacion.net